Capitolo 2

Teoria della misura

2.1 La misura secondo Peano-Jordan

Ricordiamo brevemente i passi necessari per definire la misura (e la misurabilità) secondo Peano-Jordan di un sottoinsieme di $\mathbf{R}$.

- La *lunghezza* di un intervallo aperto $I = (a, b)$ di $\mathbf{R}$ è definita come $l(I) = b - a$ (e lo stesso per intervalli della forma $[a, b)$, $(a, b]$ e $[a, b]$).
- Un *pluriintervallo* è un insieme
$$P = \bigcup_{j=1}^{n} I_j\,,$$
con gli I_j intervalli a due a due disgiunti, e la sua misura $m(P)$ è definita come la somma delle lunghezze degli I_j.
- La *misura esterna* di un sottoinsieme limitato E di $\mathbf{R}$ è definita da
$$m(PJ)^*(E) = \inf\{m(P)\,,\ P \text{ pluriintervallo, } E \subseteq P\}\,.$$
La *misura interna* di un sottoinsieme E di $\mathbf{R}$ è definita da
$$m(PJ)_*(E) = \sup\{m(P)\,,\ P \text{ pluriintervallo, } P \subseteq E\}\,.$$
- Un sottoinsieme limitato E di $\mathbf{R}$ si dice *misurabile* secondo Peano-Jordan ($E \in \mathcal{PJ}$) se e solo se $m(PJ)^*(E) = m(PJ)_*(E)$. In questo caso, si definisce $m_{\rm PJ}(E) = m(PJ)^*(E)$ la sua misura.

Come conseguenza di questa costruzione, si ottiene una funzione di insieme $m_{\mathrm{PJ}} : \mathcal{PJ} \to \mathbf{R}$ che estende il concetto di lunghezza ad insiemi più "complicati" (si dimostra infatti che $m_{\mathrm{PJ}}(I) = l(I)$ per ogni intervallo I di $\mathbf{R}$), ed è tale che se $E_1, \ldots, E_n$ sono n insiemi in $\mathcal{PJ}$, allora è in $\mathcal{PJ}$ anche la loro unione. In più

$$m_{\mathrm{PJ}}\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} m_{\mathrm{PJ}}(E_j)\,,$$

l'uguale valendo nel caso in cui gli E_j siano a due a due disgiunti.

Il maggior "difetto" della misura secondo Peano-Jordan è il fatto che (a differenza di quanto accade per le unioni finite) l'unione numerabile di insiemi misurabili non è necessariamente un insieme misurabile, come si vede dal seguente esempio.

Esempio 2.1.1 L'insieme $E = \mathbf{Q} \cap [0, 1]$ non è misurabile secondo Peano-Jordan. Infatti, è facile vedere che $m(PJ)_*(E) = 0$ (dal momento che E non contiene intervalli, e pertanto l'unico pluriintervallo interno è l'insieme vuoto). Sia ora $\{I_j,\ j = 1, \ldots, N\}$ una famiglia finita di intervalli tali che

$$E \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} I_j\,,$$

con gli I_j a due a due disgiunti, e mostriamo che la somma delle lunghezze degli I_j è maggiore o uguale a 1. Se, infatti, la somma delle lunghezze fosse strettamente minore di 1, l'insieme $[0, 1] \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{N} I_j\right)$ avrebbe misura interna strettamente positiva, e quindi dovrebbe contenere almeno un intervallo. Siccome in questo intervallo cadono infiniti razionali, l'unione degli I_j non può ricoprire E. Pertanto, $m(PJ)^*(E) \geq 1$ (in realtà, è esattamente uguale ad 1, dato che $[0, 1]$ ricopre E), e quindi E non è misurabile. Dal momento che E è numerabile, si può vederlo come unione (infinita) dei suoi punti, che sono, invece, sottoinsiemi misurabili di $\mathbf{R}$.

Dunque, unire infiniti insiemi misurabili può dare come risultato un insieme non misurabile. Ciò vuol dire — in un certo senso — che la misura di Peano-Jordan non si comporta bene rispetto alle successioni di insiemi, ovvero che si presta poco a trattare problemi nei quali sia necessario approssimare oggetti "complicati" con successioni di oggetti semplici. Per risolvere tale problema, è necessario quindi modificare il concetto di misura, a partire dalla definizione di misura esterna.

2.2 La misura secondo Lebesgue

Definizione 2.2.1 Sia I un intervallo di $\mathbf{R}$. Se I è limitato, la sua lunghezza $l(I)$ è definita come la differenza dei due estremi; se I è illimitato, la sua lunghezza $l(I)$ è definita $+\infty$.

Sia E un sottoinsieme di $\mathbf{R}$. La *misura esterna* $m^*(E)$ è così definita:

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j \in J} l(I_j)\,,\ \{I_j\}_{j\in J} \begin{array}{c}\text{famiglia al più numerabile}\\ \text{di intervalli aperti}\end{array} : \ E \subseteq \textstyle\bigcup_{j\in J} I_j \right\} .$$

Osservazione 2.2.2 Si noti che E non deve necessariamente essere limitato; la principale differenza con la misura esterna definita precedentemente, è che adesso si possono considerare unioni infinite di intervalli, e non solo unioni finite. Si ha poi, per ogni sottoinsieme limitato E di $\mathbf{R}$, $m^*(E) \leq m(PJ)^*(E)$ (dal momento che i ricoprimenti ammissibili per il calcolo di $m(PJ)^*(E)$ lo sono anche per il calcolo di $m^*(E)$). Dalla definizione segue immediatamente che

$$m^* : \mathcal{P}(\mathbf{R}) \to [0, +\infty]\,,$$

e che $m^*(\emptyset) = 0$.

Esempio 2.2.3 Sia $E = \mathbf{Q} \cap [0, 1]$. Allora $m^*(E) = 0$. Infatti, sia $E = \{q_n\}$, con n in $\mathbf{N}$, sia $\varepsilon > 0$ e sia

$$I_n = \left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right) .$$

Allora $\{I_n\}$ è una famiglia numerabile di intervalli aperti che ricopre E (dato che q_n appartiene ad I_n), e si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} l(I_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon\,.$$

Pertanto, per definizione, $m^*(E) \leq \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$, da cui la tesi. Si noti che la stessa dimostrazione può essere ripetuta per un qualsiasi altro insieme numerabile.

Dimostriamo ora alcune proprietà della misura esterna.

Teorema 2.2.4 (Monotonia) *Siano A e B sottoinsiemi di* $\mathbf{R}$ *con $A \subseteq B$. Allora*
$$m^*(A) \leq m^*(B)\,. \tag{2.1}$$

Dimostrazione. Se $\{I_j\}_{j\in J}$ è un ricoprimento di intervalli aperti di B, allora $\{I_j\}_{j\in J}$ è un ricoprimento di intervalli aperti di A; si ha dunque, per definizione,
$$m^*(A) \leq \sum_{j\in J} l(I_j)\,.$$
Prendendo l'estremo inferiore al variare di tutti i ricoprimenti di intervalli aperti di B si ha la tesi. ■

Teorema 2.2.5 (Regolarità) *Sia A un sottoinsieme di* $\mathbf{R}$ *con $m^*(A) < +\infty$. Allora*
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \{I_j^\varepsilon\}_{j\in J_\varepsilon} : A \subseteq \bigcup_{j\in J_\varepsilon} I_j^\varepsilon\,, \quad \sum_{j\in J_\varepsilon} l(I_j^\varepsilon) \leq m^*(A) + \varepsilon\,. \tag{2.2}$$

Dimostrazione. La tesi segue dalla definizione di m^* e dalle proprietà dell'estremo inferiore. ■

Teorema 2.2.6 (Estensione) *Sia I un intervallo di* $\mathbf{R}$*. Allora $m^*(I) = l(I)$.*

Dimostrazione. Sia $I = [a, b]$. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$, $I \subset I_\varepsilon = (a-\varepsilon, b+\varepsilon)$ e pertanto
$$m^*(I) \leq l(I_\varepsilon) = b - a + 2\varepsilon = l(I) + 2\varepsilon\,,$$
da cui $m^*(I) \leq l(I)$. Sia ora $\{I_j\}_{j\in J}$ un ricoprimento di intervalli aperti di I. Se J è infinito, essendo I compatto, da $\{I_j\}$ si può estrarre un sottoricoprimento finito; pertanto, in ogni caso, esistono $I_1 \ldots, I_n$ intervalli aperti della famiglia $\{I_j\}_{j\in J}$ tali che
$$I \subseteq \bigcup_{j=1}^n I_j\,.$$

Si ha allora che la somma delle lunghezze degli I_j è maggiore o uguale a $l(I)$. Infatti, dal momento che a è in I, esiste un j tra 1 ed n tale che a appartenga a I_j; supponiamo che sia $j = 1$ e quindi che $a \in I_1 = (a_1, b_1)$, con $a_1 < a$. Se b appartiene a I_1 ci fermiamo, altrimenti osserviamo che si ha $b_1 \leq b$ e quindi b_1 è in I. Pertanto, b_1 appartiene ad un altro degli intervalli I_j, diciamo $I_2 = (a_2, b_2)$. Si ha allora $a_2 < b_1 < b_2$. Se b appartiene a I_2 ci fermiamo, altrimenti continuiamo come prima. Dopo un numero finito di passi (al più n), il procedimento finisce, ovvero b appartiene ad un certo $I_k = (a_k, b_k)$. Abbiamo allora

$$a_1 < a \leq b_1\,, \quad a_2 < b_1 \leq b_2\,, \quad \ldots\,, \quad a_k < b_{k-1} \leq b < b_k\,.$$

Pertanto $l(I_h) = b_h - a_h > a_{h+1} - a_h$, per ogni h da 2 a $k-1$, mentre $l(I_k) = b_k - a_k > b - a_k$ e $l(I_1) = b_1 - a_1 > a_2 - a$. Sommando, si ottiene

$$\sum_{h=1}^{k} l(I_h) > b - a = l(I)\,.$$

D'altra parte (avendo ridotto il numero degli I_j), si ha

$$\sum_{j \in J} l(I_j) \geq \sum_{h=1}^{k} l(I_h)\,,$$

e quindi $m * (I) \geq l(I)$, da cui segue la tesi.

Sia ora $I = (a, b)$; ovviamente, dato che I è un ricoprimento aperto di se stesso, si ha $m^*(I) \leq l(I)$; se consideriamo $I_\varepsilon = [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$, si ha $I_\varepsilon \subset I$, da cui segue (per (2.1)) $m^*(I_\varepsilon) \leq m^*(I)$. Per quanto appena dimostrato, $m^*(I_\varepsilon) = l(I_\varepsilon) = b - a - 2\varepsilon = l(I) - 2\varepsilon$. Pertanto

$$l(I) - 2\varepsilon \leq m^*(I) \leq l(I)\,,$$

da cui la tesi per l'arbitrarietà di ε.

Infine, sia I illimitato superiormente e sia x_0 in I. Siccome I è illimitato, per ogni $M > 0$ esiste x_M in I tale che $x_M > M$ e $x_M > x_0$. Essendo I un intervallo, $I_M = [x_0, x_M]$ è tutto contenuto in I, e pertanto (per (2.1)),

$$m^*(I) \geq m^*(I_M) = l(I_M) = x_M - x_0 > M - x_0\,.$$

Dunque, $m^*(I) \geq M - x_0$ per ogni $M > 0$. Pertanto, $m^*(I) = +\infty = l(I)$. Analoga dimostrazione vale nel caso in cui I sia illimitato inferiormente.

■

Teorema 2.2.7 (σ-subadditività) *Sia $\{E_n\}_{n\in J}$ una famiglia al più numerabile di sottoinsiemi di* $\mathbf{R}$. *Allora*

$$m^*\left(\bigcup_{n\in J} E_n\right) \leq \sum_{n\in J} m^*(E_n)\,. \tag{2.3}$$

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare il teorema nel caso in cui J sia numerabile (se J è finito, si può aggiungere un'infinità di volte l'insieme vuoto, che ha misura esterna nulla e non "contribuisce" all'unione). Se la somma della serie a destra in (2.3) è $+\infty$ (ovvero se la serie diverge positivamente), non c'è nulla da dimostrare, così come non c'è nulla da dimostrare se uno degli E_n ha misura esterna infinita. Pertanto, supponiamo che tutti gli E_n abbiano misura esterna finita e che la serie converga. Sia $\varepsilon > 0$; per la (2.2), per ogni n in $\mathbf{N}$, esiste una famiglia $\{I_j^{(n)}\}_{j\in J_n}$ di intervalli aperti che ricopre E_n ed è tale che

$$\sum_{j\in J_n} l(I_j^{(n)}) \leq m^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\,.$$

La famiglia $\{I^{(n)}\}_{n\in\mathbf{N},\,j\in J_n}$ è ora una famiglia (al più numerabile, in quanto unione numerabile di famiglie al più numerabili) di intervalli aperti che ricopre l'unione degli E_n. Si ha allora

$$\begin{aligned} m^*\left(\bigcup_{n\in J} E_n\right) &\leq \sum_{n\in\mathbf{N},j\in J_n} l(I_j^{(n)}) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{j\in J_n} l(I_j^{(n)})\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty}\left(m^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(E_n) + \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di ε segue la tesi. ■

Osservazione 2.2.8 Dal teorema precedente, e dal fatto — di verifica immediata — che $m^*(\{x\}) = 0$, segue che ogni insieme numerabile ha misura esterna nulla. Pertanto, essendo $m^*([0,1]) = l([0,1]) = 1$, si ha che $[0,1]$ non è numerabile.

Ricordiamo che se E è un sottoinsieme di $\mathbf{R}$ e x è in $\mathbf{R}$, il traslato di E tramite x è definito da

$$E + x = \{x + y\,,\ y \in E\}\,.$$

Teorema 2.2.9 (Invarianza per traslazioni) *Si ha* $m^*(E + x) = m^*(E)$ *per ogni* E *sottoinsieme di* $\mathbf{R}$ *e per ogni* x *in* $\mathbf{R}$.

Dimostrazione. Se I è un intervallo, si ha ovviamente $l(I + x) = l(I)$ per ogni x in $\mathbf{R}$. Dal momento che

$$E \subseteq \bigcup_{j\in J} I_j \iff (E + x) \subseteq \bigcup_{j\in J} (I_j + x)\,,$$

i due sottoinsiemi di $[0, +\infty]$ il cui estremo inferiore è rispettivamente $m^*(E)$ e $m^*(E + x)$ sono identici, da cui la tesi. ■

2.3 Misurabilità e misura

Possiamo ora dare la definizione di insieme misurabile. Ricordiamo che se E è un sottoinsieme di $\mathbf{R}$, il suo complementare E^c è l'insieme $E^c = \mathbf{R}\setminus E$.

Definizione 2.3.1 Un sottoinsieme E di $\mathbf{R}$ si dice **misurabile secondo Lebesgue** se per ogni A sottoinsieme di $\mathbf{R}$ si ha

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)\,. \tag{3.1}$$

Dal momento che la misura esterna è subadditiva (Teorema 2.2.7), e siccome $A = (A \cap E) \cup (A \cap E^c)$, si ha, per ogni A sottoinsieme di $\mathbf{R}$,

$$m^*(A) \le m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)\,,$$

cosicché la misurabilità di un insieme è equivalente a dimostrare che, per ogni A sottoinsieme di $\mathbf{R}$,

$$m^*(A) \ge m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)\,. \tag{3.2}$$

Osserviamo che $E = \emptyset$ è misurabile, e che, essendo la definizione simmetrica in E e E^c, un sottoinsieme di $\mathbf{R}$ è misurabile se e solo se lo è il suo complementare. Pertanto, $\mathbf{R} = \emptyset^c$ è misurabile.

Un primo risultato sugli insiemi misurabili è il seguente.

Teorema 2.3.2 *Sia E un sottoinsieme di $\mathbf{R}$ tale che $m^*(E) = 0$. Allora E è misurabile.*

Dimostrazione. Sia A un sottoinsieme di $\mathbf{R}$. Usando la monotonia della misura esterna (Teorema 2.2.4) si ha

$$A \cap E \subseteq E \Longrightarrow 0 \leq m^*(A \cap E) \leq m^*(E) = 0 \Longrightarrow m^*(A \cap E) = 0\,,$$

e

$$A \cap E^{\mathrm{c}} \subseteq A \Longrightarrow 0 \leq m^*(A \cap E^{\mathrm{c}}) \leq m^*(A)\,.$$

Pertanto, $m^*(A) \geq m^*(A \cap E^{\mathrm{c}}) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^{\mathrm{c}})$, che è la (3.2).

■

Come conseguenza del teorema precedente, l'insieme $E = \mathbf{Q} \cap [0, 1]$, così come qualsiasi altro insieme numerabile, è misurabile. Ricordiamo che E non era misurabile secondo Peano-Jordan.

La famiglia degli insiemi misurabili secondo Lebesgue è chiusa rispetto all'unione finita.

Teorema 2.3.3 *Siano E_1 e E_2 due insiemi misurabili. Allora $E_1 \cup E_2$ è misurabile.*

Dimostrazione. Sia B un sottoinsieme di $\mathbf{R}$. Dal momento che E_2 è misurabile si ha, scegliendo $A = B \cap {E_1}^{\mathrm{c}}$ in (3.1),

$$\begin{aligned} m^*(B \cap {E_1}^{\mathrm{c}}) &= m^*((B \cap {E_1}^{\mathrm{c}}) \cap E_2) + m^*((B \cap {E_1}^{\mathrm{c}}) \cap {E_2}^{\mathrm{c}}) \\ &= m^*((B \cap {E_1}^{\mathrm{c}}) \cap E_2) + m^*(B \cap (E_1 \cup E_2)^{\mathrm{c}}) \end{aligned} \tag{3.3}$$

D'altra parte, essendo

$$B \cap (E_1 \cup E_2) = (B \cap E_1) \cup (B \cap E_1 \cap {E_2}^{\mathrm{c}})\,,$$

la subadditività della misura esterna implica

$$m^*(B \cap (E_1 \cup E_2)) \leq m^*(B \cap E_1) + m^*(B \cap E_1 \cap {E_2}^{\mathrm{c}})\,. \tag{3.4}$$

Pertanto, usando (3.3) e (3.4),

$$\begin{aligned} & m^*(B \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*(B \cap (E_1 \cup E_2)^{\mathrm{c}}) \\ &\qquad \leq m^*(B \cap E_1) + m^*(B \cap E_1 \cap {E_2}^{\mathrm{c}}) + m^*(B \cap (E_1 \cup E_2)^{\mathrm{c}}) \\ &\qquad = m^*(B \cap E_1) + m^*(B \cap {E_1}^{\mathrm{c}}) \\ &\qquad = m^*(B)\,, \end{aligned}$$

essendo E_1 misurabile. Abbiamo così ottenuto (3.2) e quindi la misurabilità di $E_1 \cup E_2$. ■

Come conseguenza di questo teorema, si ha che l'unione di n insiemi misurabili è ancora misurabile. Siccome l'intersezione di due insiemi è il complementare dell'unione dei loro complementari, se ne deduce che l'intersezione di due (e quindi di n) insiemi misurabili è ancora misurabile.

La misura esterna ha un buon comportamento sulle unioni disgiunte di insiemi misurabili.

Teorema 2.3.4 *Siano $E_1, \ldots, E_n$ insiemi misurabili a due a due disgiunti. Allora, per ogni A sottoinsieme di $\mathbf{R}$ si ha*

$$m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right)\right) = \sum_{j=1}^{n} m^*(A \cap E_j)\,. \tag{3.5}$$

Dimostrazione. Si ragiona per induzione su n. Se $n = 1$ la (3.5) è l'identità $m^*(A \cap E_1) = m^*(A \cap E_1)$, ed è dunque vera. Supponiamo ora la (3.5) vera per n insiemi e dimostriamola per $n+1$. Siano pertanto $E_1, \ldots, E_{n+1}$ insiemi misurabili a due a due disgiunti. Si ha allora

$$\left(\bigcup_{j=1}^{n+1} E_j\right) \cap E_{n+1} = E_{n+1}\,, \qquad \left(\bigcup_{j=1}^{n+1} E_j\right) \cap (E_{n+1})^{\mathrm{c}} = \left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right)\,.$$

Pertanto, dal momento che E_{n+1} è misurabile per ipotesi, per ogni sottoinsieme A di $\mathbf{R}$ si ha, usando l'ipotesi induttiva,

$$\begin{aligned}
m^*&\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n+1} E_j\right)\right) \\
&= m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n+1} E_j\right) \cap E_{n+1}\right) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n+1} E_j\right) \cap (E_{n+1})^{\mathrm{c}}\right) \\
&= m^*(A \cap E_{n+1}) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right)\right) \\
&= m^*(A \cap E_{n+1}) + \sum_{j=1}^{n} m^*(A \cap E_j) = \sum_{j=1}^{n+1} m^*(A \cap E_j)\,,
\end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. ■

Osservazione 2.3.5 Nel caso particolare in cui $A = \mathbf{R}$, il risultato del teorema precedente diventa: se $E_1, \ldots, E_n$ sono insiemi misurabili a due a due disgiunti, si ha

$$m^*\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) = \sum_{j=1}^{n} m^*(E_j)\,, \tag{3.6}$$

che prende il nome di **finita additività della misura esterna**.

Grazie ai risultati provati precedentemente, è possibile mostrare che non solo l'unione finita, ma anche l'unione numerabile di insiemi misurabili è misurabile.

Teorema 2.3.6 (σ-additività) *Sia $\{E_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ una famiglia numerabile di insiemi misurabili. Allora*

$$E = \bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j\,,$$

è misurabile. Se poi gli E_j sono a due a due disgiunti, si ha

$$m^*\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} m^*(E_j)\,. \tag{3.7}$$

Dimostrazione. Iniziamo con l'osservare che E può essere scritto come unione numerabile di insiemi misurabili a due a due disgiunti:

$$E = \bigcup_{j=1}^{+\infty} F_j\,.$$

Infatti, definiamo $F_1 = E_1$ e, per $n > 1$,

$$F_n = E_n \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} E_j\right) = E_n \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} E_j\right)^{\mathrm{c}}.$$

Essendo E_j misurabile per ogni j, è misurabile l'unione G_{n-1} dei primi $n-1$ degli E_j, quindi lo è il complementare di G_{n-1}, ed infine lo è F_n essendo l'intersezione tra i due insiemi (misurabili) E_n e G_{n-1}. Se $n > m$ si ha, essendo $F_n \subseteq E_n$ per ogni n,

$$F_n \cap F_m \subseteq F_n \cap E_m = E_n \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} E_j\right)^{\mathrm{c}} \cap E_m \subseteq E_n \cap {E_m}^{\mathrm{c}} \cap E_m = \emptyset\,,$$

e pertanto gli F_n sono a due a due disgiunti. Ovviamente, si ha che l'unione degli F_n è contenuta nell'unione degli E_n (che è E) e pertanto non resta che dimostare che se x appartiene ad E, allora appartiene a qualche F_n. Se x è in E, x appartiene a qualcuno degli E_n e pertanto è ben definito

$$N(x) = \min\{n \in \mathbf{N} : x \in E_n\},$$

dal momento che ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbf{N}$ ammette minimo. Se $N(x) = 1$, allora x appartiene ad E_1, e quindi, per definizione, ad F_1. Se $N(x) > 1$, allora x è in $E_{N(x)}$ ma non appartiene a nessuno degli E_n con $n < N(x)$. In altre parole,

$$x \in E_{N(x)} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{N(x)-1} E_j \right) = F_{N(x)},$$

che è quanto si voleva mostrare.

Mostriamo ora che l'unione degli F_n (cioè E) è misurabile. Sia, per n in $\mathbf{N}$,

$$H_n = \bigcup_{j=1}^{n} F_j.$$

Si ha, evidentemente, $H_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbf{N}} F_n = E$ e quindi $E^{\mathrm{c}} \subseteq H_n{}^{\mathrm{c}}$. Siccome H_n è misurabile (come unione finita di insiemi misurabili), per ogni sottoinsieme A di $\mathbf{R}$ si ha,

$$m^*(A) = m^*(A \cap H_n) + m^*(A \cap H_n{}^{\mathrm{c}}) \geq m^*(A \cap H_n) + m^*(A \cap E^{\mathrm{c}}),$$

per la monotonia della misura esterna. D'altra parte, essendo gli F_n a due a due disgiunti, si può applicare il Teorema 3.5:

$$m^*(A \cap H_n) = \sum_{j=1}^{n} m^*(A \cap F_j),$$

da cui

$$m^*(A) \geq \sum_{j=1}^{n} m^*(A \cap F_j) + m^*(A \cap E^{\mathrm{c}}).$$

Siccome la disuguaglianza precedente è valida per ogni n in $\mathbf{N}$, si può passare all'estremo superiore su n, ottenendo

$$m^*(A) \geq \sum_{j=1}^{+\infty} m^*(A \cap F_j) + m^*(A \cap E^{\mathrm{c}}).$$

D'altra parte, per la σ-subadditività della misura esterna,

$$m^*(A \cap E) = m^*\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} (A \cap F_j)\right) \le \sum_{j=1}^{+\infty} m^*(A \cap F_j)\,,$$

e pertanto $m^*(A) \ge m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^{\rm c})$, ovvero E è misurabile.

Proviamo ora la (3.7). Già sappiamo, per il Teorema 2.2.7, che

$$m^*\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j\right) \le \sum_{j=1}^{+\infty} m^*(E_j)\,.$$

D'altra parte, per ogni n in $\mathbf{N}$,

$$\bigcup_{j=1}^{n} E_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j\,,$$

e pertanto, per (2.1) e (3.6),

$$m^*\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j\right) \ge m^*\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) = \sum_{j=1}^{n} m^*(E_j)\,.$$

Facendo tendere n ad infinito, si trova

$$m^*\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j\right) \ge \sum_{j=1}^{+\infty} m^*(E_j)\,,$$

da cui la tesi. ■

Come conseguenza di questo teorema, l'intersezione numerabile di insiemi misurabili è ancora misurabile.

Un caso particolare è quello delle successioni di insiemi "monotone".

Teorema 2.3.7 *Sia $\{E_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ una successione di insiemi misurabili.*

i) Se la successione è crescente, ovvero $E_j \subseteq E_{j+1}$ per ogni j in $\mathbf{N}$, allora

$$m^*\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j\right) = \lim_{j\to+\infty} m^*(E_j)\,. \tag{3.8}$$

ii) Se la successione è decrescente, ovvero $E_{j+1} \subseteq E_j$ per ogni j in $\mathbf{N}$, e $m^*(E_1) < +\infty$, allora

$$m^*\left(\bigcap_{j=1}^{+\infty} E_j\right) = \lim_{j\to+\infty} m^*(E_j)\,. \tag{3.9}$$

Dimostrazione. Iniziamo con l'osservare che, in entrambi i casi, il limite di $m^*(E_j)$ esiste dal momento che la successione $\{m^*(E_j)\}$ è monotona.

i) Sia $E = \bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j$; se esiste k tale che $m^*(E_k) = +\infty$, allora il limite delle misure esterne degli E_j è $+\infty$, e anche la misura esterna di E è $+\infty$ (dato che E contiene E_k). Supponiamo allora che $m^*(E_j) < +\infty$ per ogni j in $\mathbf{N}$, e definiamo $F_j = E_{j+1} \backslash E_j$. Allora F_j è misurabile per ogni j,

$$E = E_1 \cup \left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} F_j\right)\,,$$

e l'unione è disgiunta. Per (3.7) si ha allora

$$m^*(E) = m^*(E_1) + \sum_{j=1}^{+\infty} m^*(F_j)\,. \tag{3.10}$$

Essendo $m^*(E_{j+1}) = m^*(F_j) + m^*(E_j)$ (come si verifica facilmente), si ha $m^*(F_j) = m^*(E_{j+1}) - m^*(E_j)$ e pertanto la serie in (3.10) è una serie telescopica, la cui somma è esattamente il limite di $m^*(E_j)$.

ii) Sia $E = \bigcap_{j=1}^{+\infty} E_j$ e definiamo $F_j = E_j \backslash E_{j+1}$. Allora

$$E_1 \backslash E = \bigcup_{j=1}^{+\infty} F_j\,.$$

Essendo gli F_j a due a due disgiunti e misurabili, si ha, per la (3.7),

$$m^*(E_1 \backslash E) = \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(F_j)\,. \tag{3.11}$$

Ora, $m^*(E_1) = m^*(E) + m^*(E_1 \backslash E)$ (perché $E \subseteq E_1$), e quindi $m^*(E_1 \backslash E) = m^*(E_1) - m^*(E)$ (si noti che qui si usa il fatto che $m^*(E_1)$ è finita); inoltre

$m^*(F_j) = m^*(E_j \backslash E_{j+1}) = m^*(E_j) - m^*(E_{j+1})$. Pertanto, la serie che compare in (3.11) è una serie telescopica, e la sua somma è

$$\sum_{n=1}^{+\infty} m^*(F_j) = m^*(E_1) - \lim_{j \to +\infty} m^*(E_j)\,.$$

Dunque

$$m^*(E_1) - m^*(E) = m^*(E_1) - \lim_{j \to +\infty} m^*(E_j)\,,$$

da cui la tesi. ∎

Osservazione 2.3.8 La condizione $m^*(E_1) < +\infty$ (che può essere sostituita con la condizione $m^*(E_k) < +\infty$ per qualche k) non è una condizione tecnica. Infatti, se $E_n = (n, +\infty)$, allora $\bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n = \emptyset$, ma $m^*(E_n) = +\infty$ per ogni n (e quindi il limite vale $+\infty$).

Teorema 2.3.9 *Sia E un sottoinsieme misurabile di $\mathbf{R}$. Allora $E + x$ è misurabile per ogni x in $\mathbf{R}$.*

Dimostrazione. La tesi segue dal fatto che $(F + x)^{\mathrm{c}} = F^{\mathrm{c}} + x$, e dal fatto che $A \cap (F + x) = ((A - x) \cap F) + x$. Si ha allora, ricordando il Teorema 2.2.9, e siccome E è misurabile,

$$\begin{aligned} &m^*(A \cap (E + x)) + m^*(A \cap (E + x)^{\mathrm{c}}) \\ &\quad = m^*(((A - x) \cap E) + x) + m^*(((A - x) \cap E^{\mathrm{c}}) + x) \\ &\quad = m^*((A - x) \cap E) + m^*((A - x) \cap E^{\mathrm{c}}) \\ &\quad = m^*(A - x) = m^*(A)\,, \end{aligned}$$

e quindi $E + x$ è misurabile. ∎

I teoremi precedenti danno alcune proprietà della misura esterna e degli insiemi misurabili, ma, a parte il Teorema 2.3.2, non danno alcuna indicazione su come siano fatti gli insiemi misurabili. Il prossimo teorema mostra che una semiretta aperta è misurabile.

Teorema 2.3.10 *Sia a in $\mathbf{R}$; la semiretta $E = (a, +\infty)$ è misurabile.*

Dimostrazione. Sia A un sottoinsieme di $\mathbf{R}$, e siano $A_1 = A \cap E$ e $A_2 = A \cap E^c$. Vogliamo dimostrare che $m^*(A) \geq m^*(A_1) + m^*(A_2)$. Se la misura esterna di A è infinita, non c'è nulla da dimostrare; supponiamo pertanto che $m^*(A)$ sia finita. Sia $\varepsilon > 0$; per il Teorema 2.2, esiste una famiglia $\{I_j^\varepsilon\}_{j \in J_\varepsilon}$ di intervalli aperti che ricoprono A e tali che

$$\sum_{j \in J_\varepsilon} l(I_j^\varepsilon) \leq m^*(A) + \varepsilon \,.$$

Definiamo, per j in J_ε, $I_j^{\varepsilon,1} = I_j^\varepsilon \cap E$ e $I_j^{\varepsilon,2} = I_j^\varepsilon \cap E^c$. Siccome sia E che il suo complementare sono intervalli, anche $I_j^{\varepsilon,1}$ e $I_j^{\varepsilon,2}$ lo sono. Inoltre, per definizione di A_1 e A_2,

$$A_1 \subseteq \bigcup_{j \in J_\varepsilon} I_j^{\varepsilon,1} \,, \qquad A_2 \subseteq \bigcup_{j \in J_\varepsilon} I_j^{\varepsilon,2} \,.$$

Per la σ-subadditività della misura esterna, e siccome gli $I_j^{\varepsilon,1}$ e gli $I_j^{\varepsilon,2}$ sono intervalli,

$$m^*(A_1) \leq \sum_{j \in J_\varepsilon} m^*(I_j^{\varepsilon,1}) = \sum_{j \in J_\varepsilon} l(I_j^{\varepsilon,1}) \,,$$

$$m^*(A_2) \leq \sum_{j \in J_\varepsilon} m^*(I_j^{\varepsilon,2}) = \sum_{j \in J_\varepsilon} l(I_j^{\varepsilon,2}) \,.$$

Pertanto, dato che $l(I_j^{\varepsilon,1}) + l(I_j^{\varepsilon,2}) = l(I_j^\varepsilon)$,

$$m^*(A_1) + m^*(A_2) \leq \sum_{j \in J_\varepsilon} \Big(l(I_j^{\varepsilon,1}) + l(I_j^{\varepsilon,2}) \Big) = \sum_{j \in J_\varepsilon} l(I_j^\varepsilon) \leq m^*(A) + \varepsilon \,,$$

da cui la tesi per l'arbitrarietà di ε. ∎

Teorema 2.3.11 *Sono insiemi misurabili le semirette, gli intervalli, gli aperti e i chiusi di* $\mathbf{R}$ *(di* $(\mathbf{R}, |\cdot|)$*).*

Dimostrazione. La semiretta $(a, +\infty)$ è misurabile per il teorema precedente, e pertanto lo è la semiretta $(-\infty, a]$ (che ne è il complementare). Siccome

$$(-\infty, a) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(-\infty, a + \frac{1}{n} \right] \,,$$

le semirette $(-\infty, a)$ sono misurabili. Essendo $(a,b) = (-\infty, b) \cap (a, +\infty)$, gli intervalli aperti sono misurabili, e pertanto lo sono $(a,b]$, $[a,b)$ e $[a,b]$ (ottenuti da (a,b) "aggiungendo" uno o due punti, che sono misurabili perché hanno misura esterna nulla). Dal momento che ogni aperto di $\mathbf{R}$ è unione numerabile di intervalli aperti, gli aperti sono misurabili, e quindi (passando al complementare) lo sono i chiusi. ∎

Infine, un risultato che mostra come un insieme misurabile sia "quasi" un aperto (o un chiuso).

Teorema 2.3.12 *Sia $E \subseteq \mathbf{R}$ un insieme misurabile. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto A_ε contenente E, ed un chiuso C_ε contenuto in E, tali che $m^*(A_\varepsilon \backslash E) < \varepsilon$ e $m^*(E \backslash C_\varepsilon) < \varepsilon$.*

Dimostrazione. Iniziamo con il caso in cui $m^*(E)$ sia finita. Se $\varepsilon > 0$, per il Teorema 2.2 esiste una famiglia $\{I_j^\varepsilon\}_{j \in J_\varepsilon}$ di intervalli aperti che ricopre E e tale che

$$\sum_{j \in J_\varepsilon} l(I_j^\varepsilon) \leq m^*(E) + \varepsilon \,.$$

Definiamo

$$A_\varepsilon = \bigcup_{j \in J_\varepsilon} I_j^\varepsilon \,,$$

cosicché A_ε è un aperto che contiene E. Inoltre, essendo A_ε l'unione disgiunta di $A_\varepsilon \backslash E$ e di E,

$$m^*(A_\varepsilon) = m^*(A_\varepsilon \backslash E) + m^*(E) \,,$$

da cui, per la σ-subadditività della misura esterna,

$$m^*(A_\varepsilon \backslash E) = m^*(A_\varepsilon) - m^*(E) \leq \sum_{j \in J_\varepsilon} m^*(I_j^\varepsilon) - m^*(E) = \sum_{j \in J_\varepsilon} l(I_j^\varepsilon) - m^*(E) \leq \varepsilon \,,$$

come volevasi dimostrare. Se $m^*(E)$ non è finita, scriviamo

$$E = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} (E \cap (n, n+1]) = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} E_n \,.$$

Gli E_n sono insiemi misurabili, a due a due disgiunti, di misura esterna finita (minore o al più uguale ad 1); pertanto, per ogni $\varepsilon > 0$, e per ogni n in $\mathbf{Z}$, esiste un aperto A_n^ε contenente E_n e tale che

$$m^*(A_n^\varepsilon \backslash E_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^{|n|}} \,.$$

Sia A_ε l'unione degli A_n^ε. A_ε è ovviamente un aperto che contiene E. Si ha poi, essendo $E_n \subseteq E$, e quindi $E^c \subseteq {E_n}^c$,

$$A_\varepsilon \backslash E = \left(\bigcup_{n \in \mathbf{Z}} A_n^\varepsilon \right) \cap E^c = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} (A_n^\varepsilon \cap E^c) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} (A_n^\varepsilon \cap {E_n}^c) = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} (A_n^\varepsilon \backslash E_n) \, .$$

Usando la σ-subadditività della misura, si ha allora che

$$m^*(A_\varepsilon \backslash E) \leq \sum_{n \in \mathbf{Z}} m^*(A_n^\varepsilon \backslash E_n) \leq \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{\varepsilon}{2^{|n|}} = 3\varepsilon \, .$$

Sia ora E misurabile. Siccome E^c è misurabile, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto A_ε contenente E^c e tale che

$$m^*(A_\varepsilon \backslash E^c) \leq \varepsilon \, .$$

Detto $C_\varepsilon = {A_\varepsilon}^c$, C_ε è un chiuso contenuto in E. Inoltre, $A_\varepsilon \backslash E^c = A_\varepsilon \cap E$, e $E \backslash C_\varepsilon = E \cap A_\varepsilon$. Pertanto, $m^*(E \backslash C_\varepsilon) = m^*(A_\varepsilon \backslash E^c) \leq \varepsilon$. ■

Osservazione 2.3.13 Il teorema precedente si può invertire: se E è un sottoinsieme di $\mathbf{R}$ tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto A_ε (un chiuso C_ε) contenente E (contenuto in E) e tale che $m^*(A_\varepsilon \backslash E) \leq \varepsilon$ ($m^*(E \backslash C_\varepsilon) \leq \varepsilon$), allora E è misurabile.

Definizione 2.3.14 Sia

$$\mathcal{M} = \{E \subseteq \mathbf{R} : \; E \text{ è misurabile}\} \, .$$

La famiglia $\mathcal{M}$, detta famiglia degli insiemi misurabili secondo Lebesgue, gode delle seguenti proprietà:

- $\emptyset$ e $\mathbf{R}$ appartengono a $\mathcal{M}$;
- E appartiene a $\mathcal{M}$ se e solo se E^c vi appartiene;
- se $\{E_j\}_{j \in \mathbf{N}}$ è una famiglia numerabile di insiemi di $\mathcal{M}$, la loro unione vi appartiene.

Una famiglia di insiemi che goda di queste proprietà si dice σ-algebra, e $\mathcal{M}$ viene pertanto detta la σ-algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue.

Se E appartiene a $\mathcal{M}$, definiamo $m(E)$, la **misura di Lebesgue** di E, come $m^*(E)$. Come funzione di insieme, m eredita le proprietà di m^*, e quindi è non negativa, σ-subadditiva (in generale), σ-additiva (sulle successioni di insiemi misurabili e disgiunti), invariante per traslazione.

Come si è visto nei teoremi precedenti, la famiglia $\mathcal{M}$ degli insiemi misurabili secondo Lebesgue è abbastanza ricca: contiene infatti gli aperti ed i chiusi di $\mathbf{R}$, ed ogni sottoinsieme numerabile di $\mathbf{R}$. È quindi lecito chiedersi se sia vero o no che $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbf{R})$, ovvero se ogni sottoinsieme di $\mathbf{R}$ sia misurabile. La risposta è "no" ed è data dal seguente esempio (la cui artificiosità dovrebbe far intuire che è ragionevole che ogni insieme che si incontra (non nel corso, ovviamente!) sia misurabile...).

Esempio 2.3.15 Sia $X = [0,1)$. Definiamo la *somma modulo 1* di x e y in X nella maniera seguente:

$$x \oplus y = \begin{cases} x+y & \text{se } x+y<1, \\ x+y-1 & \text{se } x+y \geq 1. \end{cases}$$

Analogamente, dato $E \subseteq X$, e x in X, definiamo

$$E \oplus x = \{x \oplus y\,,\ y \in E\}\,,$$

il traslato modulo 1 di E tramite x.

Si ha il seguente risultato: *se $E \in \mathcal{M}$, allora $E \oplus x \in \mathcal{M}$ e $m(E \oplus x) = m(E)$ per ogni x in X.* Per provare questo fatto, siano $E_1 = E \cap [0, 1-x)$ e $E_2 = E \cap [1-x, 1)$. Allora E_1 e E_2 sono misurabili e disgiunti, e la loro unione è E. Pertanto, $m(E) = m(E_1)+m(E_2)$. Dalla definizione di E_1, si ha $E_1 \oplus x = E + x$, e pertanto (ricordando che m è invariante per traslazioni), $E_1 \oplus x$ è misurabile e la sua misura è uguale alla misura di E_1. Inoltre, $E_2 \oplus x = E_2 + (x-1)$ e pertanto $E_2 \oplus x$ è misurabile e la sua misura è uguale a $m(E_2)$. In definitiva, essendo $E \oplus x = (E_1 \oplus x) \cup (E_2 \oplus x)$, $E \oplus x$ è misurabile e la sua misura è uguale alla misura di E (dato che $E_1 \oplus x$ e $E_2 \oplus x$ sono disgiunti).

Definiamo ora la seguente relazione in $X \times X$: si ha $x\,\rho\,y$ se e solo se $x - y \in \mathbf{Q}$. La relazione ρ è di equivalenza (come si verifica facilmente) e pertanto si può definire l'insieme quoziente $Y = X/\rho$. Ad esempio, $[0] = \mathbf{Q} \cap X$, mentre $[1/\pi] = \{x \in X : x - 1/\pi \text{ è razionale}\}$. Si noti che ognuna delle classi di equivalenza in Y contiene un'infinità numerabile di elementi (tanti quanti sono i razionali) e che pertanto, essendo Y una partizione di X, Y ha un'infinità non numerabile di elementi.

Ricordiamo ora l'assioma della scelta: *sia $Y = \{X_i\}_{i \in I}$ una famiglia di insiemi; è possibile formare un insieme P "scegliendo" un elemento x_i (ed uno solo) da ciascuno degli X_i.* Se I è finito, ed ognuno degli X_i anche, questo assioma è equivalente all'affermazione di poter prendere un elemento dal primo insieme, uno dal secondo e così via; nel caso in cui I (o gli X_i) sia non numerabile, la "verità" di tale affermazione è evidente, ma non dimostrabile, da cui l'assioma.

Usando l'assioma della scelta, costruiamo P scegliendo un elemento da ciascuna delle classi di equivalenza in cui rimane diviso X dalla relazione ρ. Sia ora $\mathbf{Q} \cap X = \{r_j\}_{j \in \mathbf{N}}$, con $r_0 = 0$, e definiamo

$$P_j = P \oplus r_j \,.$$

Sia $x \in P_i \cap P_j$; allora $x = p_i + r_i = p_j + r_j$, con p_i, p_j in P e r_i, r_j razionali. Pertanto, $p_i - p_j = r_j - r_i$, e quindi $p_i - p_j$ è razionale, cioè $p_i \,\rho\, p_j$: p_i e p_j sono nella stessa classe di equivalenza. Siccome P è costruito scegliendo uno ed un solo elemento da ognuna delle classi di equivalenza, si ha $p_i = p_j$, da cui $r_i = r_j$ e quindi $P_i = P_j$. In altre parole, se $i \neq j$, si ha $P_i \cap P_j = \emptyset$.

Sia ora x in X, e sia $[x]$ la classe di equivalenza cui appartiene x. Sempre per come è stato costruito P, esiste un elemento p di P (ed uno solo), tale che $p \,\rho\, x$. Se $x = p$, allora x appartiene a $P_0 = P$; se $x > p$, allora $x = p + r_i = p \oplus r_i$ per qualche r_i, e quindi x è in P_i; infine, se $p > x$, allora $x = p + r_j - 1 = p \oplus r_j$, per qualche r_j, da cui segue che x è in P_j. Quindi,

$$X = \bigcup_{j=1}^{+\infty} P_j \,.$$

Se P fosse misurabile, lo sarebbero anche i P_j (perché sono traslati modulo 1 di P) e si avrebbe $m(P_j) = m(P)$ per ogni j. Per la numerabile additività della misura si avrebbe allora

$$1 = m(X) = \sum_{j=1}^{+\infty} m(P_j) = \sum_{j=1}^{+\infty} m(P) \,,$$

il che è assurdo. Pertanto, P non è misurabile.

Si osservi che, essendo P non misurabile, esiste un sottoinsieme A di $\mathbf{R}$ tale che

$$m^*(A) \neq m^*(A \cap P) + m^*(A \cap P^c)\,.$$

Siccome non si può avere $m^*(A) > m^*(A \cap P) + m^*(A \cap P^c)$ (perché vale sempre la disuguaglianza "larga" opposta), deve per forza essere

$$m^*(A) < m^*(A \cap P) + m^*(A \cap P^c)\,,$$

e pertanto $E_1 = A \cap P$ e $E_2 = A \cap P^c$ sono due insiemi disgiunti per i quali l'additività della misura esterna non vale. Si noti inoltre che $m^*(P) > 0$ (non può essere $m^*(P) = 0$ perché altrimenti P sarebbe misurabile).

Infine, se E è un sottoinsieme misurabile di P, allora deve essere necessariamente $m(E) = 0$. Infatti, detto $E_i = E \oplus r_i$, allora anche E_i è misurabile e si ha $m(E_i) = m(E)$ per ogni i. Inoltre, essendo $\{P_i\}$ un ricoprimento di $[0,1)$, $\{E_i\}$ ricopre un insieme F, misurabile, contenuto in $[0,1)$. Allora

$$1 = m([0,1)) \geq m(F) = \sum_{i=1}^{+\infty} m(E_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} m(E)\,,$$

da cui $m(E) = 0$.

L'insieme non misurabile P non è unico: infatti ogni insieme A per il quale $m^*(A) > 0$ contiene un insieme non misurabile secondo Lebesgue. Se, ad esempio, $A \subset (0,1)$, sia $E_i = A \cap P_i$. Se E_i fosse misurabile, allora dovrebbe essere $m(E_i) = 0$ (dato che $E_i \subset P_i$), e quindi $\sum_{i=1}^{+\infty} m(E_i) = 0$. Siccome A è l'unione degli E_i, ne seguirebbe che $m^*(A) = 0$, che non è.

2.4 Funzioni misurabili

Dopo aver introdotto la misura secondo Lebesgue, iniziamo a studiare i legami che intercorrono tra funzioni definite su $\mathbf{R}$ e insiemi misurabili. A tale proposito vale il seguente teorema.

Teorema 2.4.1 *Sia D un insieme misurabile di $\mathbf{R}$ e sia $f : D \to \bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ una funzione. Allora le seguenti sono equivalenti:*

i) per ogni α in $\mathbf{R}$ l'insieme $E_\alpha(f) = \{x \in D : f(x) > \alpha\}$ è misurabile;

ii) per ogni α *in* $\mathbf{R}$ *l'insieme* $E'_\alpha(f) = \{x \in D : f(x) \geq \alpha\}$ *è misurabile;*

iii) per ogni α *in* $\mathbf{R}$ *l'insieme* $E''_\alpha(f) = \{x \in D : f(x) < \alpha\}$ *è misurabile;*

iv) per ogni α *in* $\mathbf{R}$ *l'insieme* $E'''_a l(f) = \{x \in D : f(x) \leq \alpha\}$ *è misurabile;*

Una qualsiasi delle quattro precedenti affermazioni implica che

v) per ogni α *in* $\bar{\mathbf{R}}$ *l'insieme* $G_\alpha(f) = \{x \in D : f(x) = \alpha\}$ *è misurabile;*

Dimostrazione. Dal momento che $(E_\alpha(f))^{\mathrm{c}} = E'''_\alpha(f)$, e che $(E'_\alpha(f))^{\mathrm{c}} = E''_\alpha(f)$, si ha evidentemente $i) \iff iv)$ e $ii) \iff iii)$. Siccome

$$E'_\alpha(f) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} E_{\alpha-\frac{1}{n}}(f)\,,$$

si ha che $i) \Rightarrow ii)$; viceversa, essendo

$$E_\alpha(f) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E'_{\alpha+\frac{1}{n}}(f)\,,$$

si ha che $ii) \Rightarrow i)$ e quindi le prime quattro affermazioni sono equivalenti fra loro.

Se α è in $\mathbf{R}$, $ii) + iv) \Rightarrow v)$, dal momento che $G_\alpha(f) = E'_\alpha(f) \cap E'''_\alpha(f)$. Se $\alpha = +\infty$, si ha

$$G_{+\infty}(f) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} E'_n(f)\,,$$

e quindi $G_{+\infty}(f)$ è misurabile; analogamente, essendo $G_{-\infty}(f)$ l'intersezione di $E'''_{-n}(f)$ al variare di n in $\mathbf{N}$, si ha che $G_{-\infty}(f)$ è misurabile. ∎

Osservazione 2.4.2 La validità di $v)$ per ogni α in $\mathbf{R}$ non implica nessuna delle prime quattro affermazioni. Ad esempio, la funzione $f(x)$ uguale a $|x| + 1$ su un insieme non misurabile P, e $-|x| - 1$ su $\mathbf{R} \setminus P$, assume ogni valore al più due volte (e pertanto $G_\alpha(f)$ è misurabile per ogni α in $\bar{\mathbf{R}}$), ma l'insieme $E_0(f)$ coincide con P, che non è misurabile.

Il teorema precedente giustifica la seguente definizione.

Definizione 2.4.3 Sia D un insieme misurabile, e sia $f : D \to \bar{\mathbf{R}}$. La funzione f si dice *misurabile secondo Lebesgue* se soddisfa una qualsiasi tra $i)$, $ii)$, $iii)$ e $iv)$.

Osservazione 2.4.4 Ogni funzione continua è misurabile; infatti $E_\alpha(f)$ è un aperto di $\mathbf{R}$ (quindi un insieme misurabile) per ogni α in $\mathbf{R}$. Se $f : D \to \bar{R}$ è misurabile, e E è un sottoinsieme misurabile di D, allora la restrizione di f a E è ancora misurabile (dal momento che si tratta di interesecare gli $E_\alpha(f)$ con E).

Lo spazio delle funzioni misurabili è (almeno) uno spazio vettoriale.

Teorema 2.4.5 *Siano f e g due funzioni misurabili definite da D in $\bar{\mathbf{R}}$, e sia c in $\mathbf{R}$. Allora $f + c$, $c\,f$, $f + g$ e $f\,g$ sono misurabili.*

Dimostrazione. Essendo $E_\alpha(f + c) = E_{\alpha-c}(f)$, la misurabilità di $f + c$ discende direttamente dalla misurabilità di f. Se $c = 0$, $c\,f$ è misurabile perché è continua; se $c > 0$, si ha $E_\alpha(c\,f) = E_{\alpha/c}(f)$, mentre se $c < 0$ si ha $E_\alpha(c\,f) = E''_{\alpha/c}(f)$. In entrambi i casi, $c\,f$ è misurabile.

Se x appartiene a $E_\alpha(f + g)$, ovvero se $f(x) + g(x) > \alpha$, allora $f(x) > \alpha - g(x)$ e ciò è vero se e solo se esiste un razionale r tale che $f(x) > r > \alpha - g(x)$, ovvero se e solo se esiste un razionale r tale che x appartiene a $E_r(f) \cap E_{\alpha-r}(g)$. Pertanto,

$$E_\alpha(f + g) = \bigcup_{r\in\mathbf{Q}} \left[E_r(f) \cap E_{\alpha-r}(g)\right] ,$$

da cui segue che $f + g$ è misurabile.

Se f è misurabile, f^2 è misurabile; infatti $E_\alpha(f^2)$ è tutto D se $\alpha \le 0$, ed è dato dall'unione di $E_{\sqrt{\alpha}}(f)$ e $E''_{-\sqrt{\alpha}}(f)$ se $\alpha > 0$. In entrambi i casi si tratta di insiemi misurabili. Infine, $f\,g$ è misurabile essendo

$$f\,g = \frac{1}{2}\left[(f + g)^2 - f^2 - g^2\right] .$$

∎

Il concetto di misurabilità si adatta bene anche a successioni di funzioni misurabili. Prima di enunciare e dimostrare il teorema, diamo una definizione.

Definizione 2.4.6 Sia $\{x_n\}$ una successione di numeri reali; definiamo il **massimo limite** della successione $\{x_n\}$ la quantità

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbf{N}} \sup_{k\geq n} x_k = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} x_k \,.$$

Analogamente, definiamo il **minimo limite** della successione $\{x_n\}$ la quantità

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbf{N}} \inf_{k\geq n} x_k = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n} x_k \,.$$

Si noti che in entrambi i casi l'estremo inferiore e il superiore sono dei limiti perché le successioni $n \mapsto \sup_{k\geq n} x_k$ e $n \mapsto \inf_{k\geq n} x_k$ sono monotone (una decrescente, l'altra crescente).

Si ha, sempre, $\liminf x_n \leq \limsup x_n$, e si ha uguaglianza se e solo se la successione ammette limite.

Se $f_n : D \to \bar{\mathbf{R}}$ è una successione di funzioni, il massimo e il minimo limite di $\{f_n\}$ sono definiti puntualmente: ad esempio $\limsup f_n$ è la funzione che assume in x il valore $\limsup f_n(x)$.

Teorema 2.4.7 *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili su D; allora, per ogni N in $\mathbf{N}$ sono misurabili le funzioni*

$$h_N(x) = \max\{f_1(x), \ldots, f_N(x)\}\,, \qquad k_N(x) = \min\{f_1(x), \ldots, f_N(x)\}\,.$$

Sono inoltre misurabili le funzioni

$$h_\infty(x) = \sup\{f_n(x),\ n \in \mathbf{N}\}\,, \qquad k_\infty(x) = \inf\{f_n(x),\ n \in \mathbf{N}\}\,,$$

e le funzioni

$$\limsup_{n\to+\infty} f_n(x)\,, \qquad \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)\,.$$

Se la successione $\{f_n\}$ ammette limite puntuale f, allora f è misurabile.

Dimostrazione. Si ha

$$E_\alpha(h_N) = \bigcup_{n=1}^{N} E_\alpha(f_n)\,,$$

e quindi h_N è misurabile, così come k_N, dato che

$$E_\alpha(k_N) = \bigcap_{n=1}^{N} E_\alpha(f_n)\,.$$

Essendo

$$E_\alpha(h_\infty) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_\alpha(f_n)\,,$$

la funzione h_∞ è misurabile (e analogamente per k_∞). Essendo

$$\limsup_{n\to+\infty} f_n(x) = \inf_{n\in\mathbf{N}} [\sup_{k\geq n} f_k(x)]\,,$$

il massimo limite è misurabile per i risultati su h_∞ e k_∞ (analogamente per il minimo limite). Infine, se $\{f_n\}$ ammette limite f, allora f è misurabile perché coincide con il massimo limite delle f_n. ■

Osservazione 2.4.8 Per il teorema precedente, le funzioni

$$f^+(x) = \max(f(x), 0)\,, \qquad f^-(x) = \max(-f(x), 0)\,,$$

sono misurabili se f lo è. Essendo $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$, $|f|$ è misurabile se f lo è.

Particolare importanza nella misura di Lebesgue hanno gli insiemi di misura nulla.

Definizione 2.4.9 Una proprietà $P(x)$ si dice essere valida **quasi ovunque (q.o.)**[1] se l'insieme degli x tali che $P(x)$ non vale ha misura nulla.

Due funzioni f e g definite sullo stesso insieme D si dicono uguali quasi ovunque, e si scrive $f = g$ q.o., se

$$m(\{x \in D : f(x) \neq g(x)\}) = 0\,.$$

Analogamente, si dice che una successione $\{f_n\}$ di funzioni converge quasi ovunque ad una funzione f se l'insieme degli x tali che $f_n(x)$ non converge ad $f(x)$ ha misura nulla.

Teorema 2.4.10 *Sia $f : D \to \bar{\mathbf{R}}$ una funzione misurabile. Se $g = f$ q.o., allora g è misurabile.*

[1] In inglese, *almost everywhere (a.e.)*; in francese, *presque partout (p.p.)*.

Dimostrazione. Sia $E = \{x \in D : f(x) \neq g(x)\}$; allora $m(E) = 0$; sia α in $\mathbf{R}$; allora gli insiemi

$$E_1 = \{x \in E : g(x) > \alpha\}\,, \qquad E_2 = \{x \in E : g(x) \leq \alpha\}\,,$$

sono entrambi misurabili come sottoinsiemi di E, che ha misura nulla. Essendo

$$E_\alpha(g) = \{x \in D : g(x) > \alpha\} = \{x \in D : f(x) > \alpha\} \cup E_1 \cap {E_2}^{\mathrm{c}}\,,$$

$E_\alpha(g)$ è misurabile, e quindi lo è la funzione g. ∎

Definizione 2.4.11 Sia A un sottoinsieme di $\mathbf{R}$. La **funzione caratteristica** di A è la funzione

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Ovviamente, χ_A è misurabile se e solo se A è misurabile. Pertanto χ_P fornisce un esempio di funzione non misurabile.

Una funzione $\varphi : D \to \mathbf{R}$ si dice **semplice** se è misurabile e se assume solo un numero finito di valori. Se φ è semplice ed assume i valori $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, allora

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \chi_{A_i}(x)\,, \qquad A_i = G_{\alpha_i}(\varphi) = \{x \in D : \varphi(x) = \alpha_i\}\,.$$

Sappiamo già che le funzioni continue sono misurabili; così come il Teorema 2.3.12 afferma che ogni insieme misurabile è un aperto a meno di insiemi di misura piccola, il prossimo teorema mostra come ogni funzione misurabile sia continua a meno di un insieme di misura arbitrariamente piccola.

Teorema 2.4.12 *Sia $f : D \to \mathbf{R}$ una funzione misurabile e finita quasi ovunque (ovvero, l'insieme $\{x \in D : f(x) = \pm\infty\}$ ha misura nulla). Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme chiuso C_ε contenuto in D tale che*

- *$m(D \backslash C_\varepsilon) \leq \varepsilon$;*
- *f è continua su C_ε.*

Dimostrazione. La dimostrazione è divisa in sei passi.
Passo 1: Sia $f = \chi_F$ con F misurabile, e sia $m(D) < +\infty$.

Per il Teorema 2.3.12, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un chiuso $C'_\varepsilon \subseteq F$ tale che $m(F \backslash C'_\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Essendo $D \backslash F$ misurabile, esiste un chiuso $C''_\varepsilon \subseteq D \backslash F$ tale che $m((D \backslash F) \backslash C''_\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Definiamo $C_\varepsilon = C'_\varepsilon \cup C''_\varepsilon$. Si ha

$$m(D \backslash C_\varepsilon) = m((D \backslash F) \backslash C_\varepsilon) + m(F \backslash C_\varepsilon) = m((D \backslash F) \backslash C'_\varepsilon) + m(F \backslash C''_\varepsilon) \leq \varepsilon \,,$$

ed inoltre, essendo $f \equiv 1$ su C'_ε e $f \equiv 0$ su C''_ε, f è continua su C_ε.

Passo 2: Sia f semplice, e sia $m(D) < +\infty$.

Il risultato segue dalla definizione di funzione semplice, e dal Passo 1: basta scegliere C_ε l'unione dei $C_{\varepsilon,i}$ ottenuti applicando il Passo 1 a $\alpha_i \, \chi_{A_i}$ con ε/n.

Passo 3: f è una funzione positiva e limitata: $0 \leq f < L$, e $m(D) < +\infty$.

Sia n in $\mathbf{N}$ fissato, e dividiamo l'intervallo $[0, L)$ in n parti uguali[2] mediante i punti $y_k = \frac{kL}{n}$, con k da 0 a n. Definiamo

$$F_k = \{x \in D : y_k \leq f(x) < y_{k+1}\} = E'_{y_k}(f) \cap E''_{y_{k+1}}(f)\,, \quad k = 0, \ldots, n-1\,.$$

Essendo f misurabile, gli F_k sono misurabili; sono inoltre a due a due disgiunti, e la loro unione è tutto D. Definiamo

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \, \chi_{F_k}(x)\,,$$

cosicché φ_n è semplice. Sia ora x in D; allora x appartiene ad uno degli F_k, e quindi

$$|f(x) - \varphi_n(x)| = |f(x) - y_k| \leq y_{k+1} - y_k = \frac{L}{n}\,.$$

Pertanto,

$$\sup_{x \in D} |f(x) - \varphi_n(x)| \leq \frac{L}{n}\,,$$

da cui segue che $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente a f. Applicando il Passo 2 a φ_n, per ogni $\varepsilon > 0$ fissato e per ogni n in $\mathbf{N}$ esiste un insieme chiuso $C_{\varepsilon,n}$ contenuto in D e tale che

$$m(D \backslash C_{\varepsilon,n}) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}\,, \qquad \varphi_n \text{ è continua su } C_{\varepsilon,n}.$$

[2] Attenzione! Stiamo dividendo il codominio della funzione f, non il suo dominio!

Definiamo C_ε l'intersezione dei $C_{\varepsilon,n}$ al variare di n in $\mathbf{N}$. Allora C_ε è un chiuso (come intersezione di chiusi) contenuto in D. Si ha

$$\begin{aligned} m(D\backslash C_\varepsilon) &= m\left(D\cap\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} C_{\varepsilon,n}\right)^{\mathrm{c}}\right) = m\left(D\cap\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}(C_{\varepsilon,n})^{\mathrm{c}}\right)\right) \\ &= m\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}(D\backslash C_{\varepsilon,n}\right) \le \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Siccome φ_n converge uniformemente a f su D, φ_n converge uniformemente ad f su C_ε. D'altra parte, φ_n è continua su $C_{\varepsilon,n}$, e quindi lo è su C_ε; da questo segue che f è continua su C_ε.

Passo 4: Sia $f \ge 0$ e $m(D) < +\infty$.

Siccome la funzione f è finita quasi ovunque, si ha $m(G_{+\infty}(f)) = 0$. Definiamo

$$E_n = E'_n(f) = \{x \in D : f(x) \ge n\}\,.$$

Allora $\{E_n\}$ è una successione decrescente di insiemi misurabili e tali che $m(E_1) \le m(D) < +\infty$. Pertanto, detto

$$E = \bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n\,,$$

dal Teorema 2.3.7 segue che $m(E) = \lim_{n\to+\infty} m(E_n)$; essendo $E = G_{+\infty}(f)$ si ha che la misura degli E_n tende a zero. Pertanto, fissato $\varepsilon > 0$, esiste L (dipendente da ε), tale che $m(E_L) \le \varepsilon/2$. Consideriamo ora $D' = D\backslash E_L$. L'insieme D' è misurabile, ed inoltre $0 \le f < L$ su D'. Pertanto, per il Passo 3, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste C_ε contenuto in D' (dunque in D) tale che $m(D'\backslash C_\varepsilon) \le \varepsilon/2$ e f è continua su C_ε. Dal momento che

$$m(D\backslash C_\varepsilon) = m(E_L) + m(D'\backslash C_\varepsilon) \le \varepsilon\,,$$

si ha il risultato nelle ipotesi del Passo 4.

Passo 5: Sia $f \ge 0$.

Sia n in $\mathbf{Z}$, e definiamo $D_n = D \cap [n, n+1)$. Allora D_n è misurabile e ha misura finita. Usando il Passo 4, per ogni $\varepsilon > 0$, e per ogni n in $\mathbf{Z}$, esiste $C_{\varepsilon,n}$ chiuso, contenuto in D_n, con $m(D_n\backslash C_{\varepsilon,n}) \le \frac{\varepsilon}{2^{|n|}}$, e tale che f è continua su $C_{n,\varepsilon}$. Definiamo

$$C_\varepsilon = \bigcup_{n\in\mathbf{Z}} C_{\varepsilon,n}\,.$$

È facile verificare che $m(D\backslash C_\varepsilon) \leq 3\varepsilon$ e che f è continua su C_ε (dal momento che i $C_{\varepsilon,n}$ sono a due a due disgiunti). L'unica cosa da verificare è che C_ε è chiuso. Sia pertanto $\{x_n\}$ una successione contenuta in C_ε e convergente (in $\mathbf{R}$) a x_0. Allora la successione è limitata, ovvero $|x_n| \leq M$ per ogni n in $\mathbf{N}$. Pertanto,

$$\{x_n\} \subseteq \bigcup_{n=-M}^{M} C_{\varepsilon,n} = C'_{\varepsilon,M}\,,$$

e quest'ultimo insieme è chiuso (come unione finita di chiusi). Pertanto x_0 appartiene a $C'_{\varepsilon,M}$ e dunque a C_ε, che lo contiene.

Passo 6: Sia f come nelle ipotesi del teorema.

Scriviamo $f = f^+ - f^-$. Sia f^+ che f^- soddisfano le ipotesi del Passo 5; esiste pertanto C_ε^+ chiuso, contenuto in D, tale che $m(D\backslash C_\varepsilon^+) \leq \varepsilon/2$, con f^+ continua su C_ε^+ e, analogamente, esiste C_ε^- chiuso, contenuto in D, tale che $m(D\backslash C_\varepsilon^-) \leq \varepsilon/2$, con f^- continua su C_ε^-. Se definiamo $C_\varepsilon = C_\varepsilon^+ \cap C_\varepsilon^-$, si ha che C_ε è un chiuso, che $m(D\backslash C_\varepsilon) \leq \varepsilon$, e che f è continua su C_ε dal momento che f^+ e f^- lo sono. ∎

Dunque, misurabilità e continuità, così come misurabilità e "essere aperti" sono concetti "vicini". Per una successione di funzioni misurabili sono vicini anche i concetti di convergenza quasi ovunque e convergenza uniforme.

Teorema 2.4.13 *Sia D un insieme misurabile di misura finita. Sia $f_n : D \to \mathbf{R}$ una successione di funzioni misurabili che converge quasi ovunque ad una funzione f. Allora, fissati $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$, esiste un insieme misurabile $A_{\varepsilon,\delta}$ contenuto in D, con $m(A_{\varepsilon,\delta}) \leq \delta$, e un intero $N_{\varepsilon,\delta}$ tale che, per ogni $n \geq N_{\varepsilon,\delta}$ si ha*

$$\sup_{D\backslash A_{\varepsilon,\delta}} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\,.$$

Dimostrazione. Sia B l'insieme di misura nulla sul quale f_n non converge ad f, e definiamo $E = D\backslash B$. Si ha ovviamente $m(E) = m(D)$. Sia poi n in $\mathbf{N}$ e definiamo

$$G_n = \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\,.$$

Essendo sia f_n che f (per il Teorema 2.4.7) misurabili su E, G_n è misurabile. Pertanto è misurabile, per ogni N in $\mathbf{N}$, l'insieme

$$E_N = \bigcup_{n=N}^{+\infty} G_n = \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\,,\ \text{per qualche } n \geq N\}\,.$$

Evidentemente, si ha che $\{E_N\}$ è una successione decrescente di insiemi, e $m(E_1) \leq m(E) < +\infty$. Per il Teorema 2.3.7 si ha allora

$$m\left(\bigcap_{N=1}^{+\infty} E_N\right) = \lim_{N\to+\infty} m(E_N)\,.$$

Siccome $f_n(x)$ converge a $f(x)$ per ogni x in E, si ha che, definitivamente, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, e pertanto x non appartiene definitivamente ad E_N. Pertanto, l'intersezione di tutti gli E_N è vuota, e quindi la misura di E_N tende a zero. Dunque, per δ fissato, esiste $N_{\varepsilon,\delta}$ tale che $m(E_{N_{\varepsilon,\delta}}) \leq \delta$. Definiamo $A_{\varepsilon,\delta} = E_{N_{\varepsilon,\delta}} \cup B$, in modo che la misura di $A_{\varepsilon,\delta}$ sia minore di δ. Se x non appartiene a $A_{\varepsilon,\delta}$, x non appartiene ad E_n per ogni $n \geq N_{\varepsilon,\delta}$, e pertanto $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, come si voleva dimostrare. ■

Osservazione 2.4.14 Si osservi che l'insieme $A_{\varepsilon,\delta}$ dipende da ε, e pertanto la tesi del teorema precedente non dà la convergenza uniforme di f_n a f. È però possibile arrivare alla convergenza uniforme applicando più volte il risultato precedente, ed è quello che viene fatto per dimostrare il prossimo teorema.

Teorema 2.4.15 (Egorov) *Sia D un insieme di misura finita, e sia $f_n : D \to \mathbf{R}$ una successione di funzioni misurabili che converge quasi ovunque ad una funzione f. Allora, per ogni $\delta > 0$ esiste un insieme $A_\delta \subseteq D$ con $m(A_\delta) < \delta$ e tale che f_n converge uniformemente ad f su $D \setminus A_\delta$.*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ e sia $\delta_n = \frac{\delta}{2^n}$. Per il teorema precedente, esiste un insieme $A_n = A_{\varepsilon_n,\delta_n}$ di misura minore di δ_n, tale che

$$\sup_{D\setminus A_n} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}\,.$$

Definiamo A_δ come l'unione di tutti gli A_n. Per la σ-subadditività della misura, $m(A_\delta) \leq \delta$; inoltre, siccome $D \setminus A_\delta \subseteq D \setminus A_n$ per ogni n in $\mathbf{N}$, si ha

$$\sup_{D\setminus A_\delta} |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{D\setminus A_n} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}\,,$$

da cui la tesi. ■

Osservazione 2.4.16 La condizione $m(D) < +\infty$ è essenziale per dimostrare il Teorema di Egorov. Sia infatti $D = \mathbf{R}$ e $f_n(x) = \chi_{(-n,n)}(x)$. La successione f_n converge ovunque in $\mathbf{R}$ alla funzione $f(x) \equiv 1$, e la convergenza non è uniforme al di fuori di nessun insieme di misura piccola di $\mathbf{R}$, dal momento che l'insieme su cui f_n è diversa da f ha misura infinita per ogni n in $\mathbf{N}$.