Capitolo 1

Spazi metrici

1.1 Definizioni ed esempi

Definizione 1.1.1 Sia X un insieme qualsiasi. Una **distanza** su X è un'applicazione $d : X \times X \to \mathbf{R}$ tale che

i) $d(x, y) \geq 0$ per ogni x, y in X, e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$ (positività);

ii) $d(x, y) = d(y, x)$ per ogni x, y in X (simmetria);

iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ per ogni x, y e z in X (disuguaglianza triangolare).

Uno **spazio metrico** è una coppia (X, d) con X insieme qualsiasi, e d distanza su X.

Esempio 1.1.2 Sia X un insieme qualsiasi e $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$, $d(x, y) = 0$ se $x = y$. Si verifica facilmente che i) e ii) valgono; per la iii), se $x = y$ non c'è nulla da dimostrare; se $x \neq y$, si deve provare che $d(x, z) + d(z, y) \geq 1$ per ogni x, y e z in X con $x \neq y$, fatto questo che risulta essere vero, essendo almeno uno tra i valori $d(x, z)$ e $d(y, z)$ uguale a 1 (non possono essere entrambi nulli, dato che se lo fossero, si avrebbe $x = z$ e $z = y$ per la i), da cui $x = y$, il che non è). La distanza d prende il nome di distanza discreta.

Esempio 1.1.3 Sia $X = \mathbf{R}$ e $d(x, y) = |x - y|$. Allora $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ è uno spazio metrico (le tre proprietà sono ben note...).

Teorema 1.1.4 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz) *Date due N-ple di numeri reali $(s_1, \ldots, s_N)$ e $(t_1, \ldots, t_N)$, si ha:*

$$\sum_{i=1}^{N} |s_i\, t_i| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} (s_i^2 + t_i^2)\,. \tag{1.1}$$

$$\sum_{i=1}^{N} |s_i\, t_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{N} s_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{N} t_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}\,. \tag{1.2}$$

Dimostrazione. La formula (1.1) si ottiene sommando (per i che va da 1 a N) le disuguaglianze

$$|s_i\, t_i| \leq \frac{s_i^2 + t_i^2}{2}\,,$$

evidentemente vere essendo equivalenti alla disuguaglianza $(|s_i| - |t_i|)^2 \geq 0$. Per dimostrare la (1.2), osserviamo che è evidentemente vera se $(s_1, \ldots, s_N) = (0, \ldots, 0)$ o se $(t_1, \ldots, t_N) = (0, \ldots, 0)$; altrimenti, applichiamo la (1.1) alle N-ple $(x_1, \ldots, x_N)$ e $(y_1, \ldots, y_N)$ definite da

$$x_i = \frac{|s_i|}{\left(\sum_{i=1}^{N} s_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}\,, \qquad y_i = \frac{|t_i|}{\left(\sum_{i=1}^{N} t_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}\,.$$

Si ottiene, essendo $\sum_{i=1}^{N} x_i^2 = 1 = \sum_{i=1}^{N} y_i^2$,

$$\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{N} s_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{N} t_i^2\right)^{\frac{1}{2}}} \sum_{i=1}^{N} |s_i\, t_i| = \sum_{i=1}^{N} \frac{|s_i\, t_i|}{\left(\sum_{i=1}^{N} s_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{N} t_i^2\right)^{\frac{1}{2}}} \leq 1\,,$$

da cui la tesi. ∎

Esempio 1.1.5 Sia $X = \mathbf{R}^N$ e

$$d((x_1, \ldots, x_N), (y_1, \ldots, y_N)) = \left(\sum_{i=1}^{N} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}\,.$$

Si ha che $(\mathbf{R}^N, d)$ è uno spazio metrico. La i) e la ii) sono evidenti, mentre per la iii) procediamo come segue, indicando con $X = (x_1, \ldots, x_N)$, $Y =$

$(y_1, \ldots, y_N)$ e $Z = (z_1, \ldots, z_N)$ tre vettori di $\mathbf{R}^N$:

$$\begin{aligned}
[d(X,Y)]^2 &= \sum_{i=1}^{N} (x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{N} (x_i - z_i + z_i - y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{N} [(x_i - z_i)^2 + 2(x_i - z_i)\,(z_i - y_i) + (z_i - y_i)^2] \\
&= [d(X,Z)]^2 + [d(Z,Y)]^2 + 2\, \sum_{i=1}^{N} (x_i - z_i)\,(z_i - y_i)\,.
\end{aligned}$$

Applicando la (1.2), si ha

$$\sum_{i=1}^{N} (x_i - z_i)\,(z_i - y_i) \le \left(\sum_{i=1}^{N} (x_i - z_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{N} (z_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = d(X,Y)\, d(Z,Y)\,.$$

Pertanto,

$$[d(X,Y)]^2 \le [d(X,Z)]^2 + [d(Z,Y)]^2 + 2d(X,Z)\, d(Z,Y) = [d(X,Z) + d(Z,Y)]^2\,,$$

che è la iii).

Teorema 1.1.6 (Disuguaglianza di Young) *Siano s, t due numeri reali e siano p e q due numeri reali tali che*

$$p > 1\,, \quad q > 1\,, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.$$

Allora

$$|s\,t| \le \frac{|s|^p}{p} + \frac{|t|^q}{q}\,. \tag{1.3}$$

Dimostrazione. Se uno tra s e t è zero, non c'è nulla da provare. Se sono entrambi non nulli, dividiamo la (1.3) per $|t|^q$, ottenendo

$$\frac{|s|}{|t|^{q-1}} \le \frac{|s|^p}{p\,|t|^q} + \frac{1}{q}\,.$$

Definiamo

$$\rho = \frac{|s|}{|t|^{q-1}}\,.$$

Essendo $1/p + 1/q = 1$, si ha $p(q-1) = q$, e quindi

$$\rho^p = \frac{|s|^p}{|t|^{p(q-1)}} = \frac{|s|^p}{|t|^q}\,.$$

Dimostrare la (1.3) è quindi equivalente a mostrare che

$$\rho \leq \frac{\rho^p}{p} + \frac{1}{q}\,,$$

per ogni $\rho \geq 0$, ovvero che

$$\varphi(\rho) = \frac{\rho^p}{p} - \rho + \frac{1}{q}$$

è positiva su $[0, +\infty)$. Si ha $\varphi(0) = 1/q$, mentre φ diverge per ρ tendente a $+\infty$ (essendo $p > 1$). Si ha poi

$$\varphi'(\rho) = \rho^{p-1} - 1\,,$$

e quindi $\varphi'(\rho) = 0$ se e solo se $\rho = 1$. Si vede facilmente che $\rho = 1$ è di minimo (assoluto) per φ; essendo

$$\varphi(1) = \frac{1}{p} - 1 + \frac{1}{q} = 0\,,$$

si ha la tesi. ∎

Semplice conseguenza del Teorema precedente (si ragiona come nella dimostrazione del Teorema 1.1.4) è il risultato che segue.

Teorema 1.1.7 (Disuguaglianza di Hölder) *Siano date due N-ple di numeri reali $(s_1, \ldots, s_N)$ e $(t_1, \ldots, t_N)$. Siano p e q due numeri reali tali che*

$$p > 1\,, \quad q > 1\,, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.$$

Allora

$$\sum_{i=1}^{N} |s_i\, t_i| \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{N} |s_i|^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{N} |t_i|^q\,. \tag{1.4}$$

$$\sum_{i=1}^{N} |s_i\, t_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{N} |s_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{N} |t_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}\,. \tag{1.5}$$

Si osservi che essendo $1/2+1/2=1$ (!), le formule (1.1) e (1.2) sono casi particolari di (1.4) e (1.5).

Esempio 1.1.8 Sia $X=\mathbf{R}^N$, $p>1$ e

$$d_p((x_1,\dots,x_N),(y_1,\dots,y_N))=\left(\sum_{i=1}^N |x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Allora $(\mathbf{R}^N,d_p)$ è uno spazio metrico. Al solito, i) e ii) sono evidenti, mentre la disuguaglianza triangolare è di dimostrazione più complicata; si ha (supponendo $d_p(X,Y)\neq 0$, altrimenti la tesi è banale)

$$\begin{aligned}[d_p(X,Y)]^p &= \sum_{i=1}^N |x_i-y_i|^p = \sum_{i=1}^N |x_i-y_i|^{p-1}\,|x_i-y_i| \\ &= \sum_{i=1}^N |x_i-y_i|^p\,|x_i-z_i+z_i-y_i| \\ &\le \sum_{i=1}^N |x_i-y_i|^{p-1}\,|x_i-z_i| + \sum_{i=1}^N |x_i-y_i|^{p-1}\,|z_i-y_i|\,.\end{aligned} \tag{1.6}$$

Applicando la (1.5), si ha

$$\sum_{i=1}^N |x_i-y_i|^{p-1}\,|x_i-z_i| \le \left(\sum_{i=1}^N |x_i-y_i|^{(p-1)\,q}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^N |x_i-z_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

e

$$\sum_{i=1}^N |x_i-y_i|^{p-1}\,|z_i-y_i| \le \left(\sum_{i=1}^N |x_i-y_i|^{(p-1)\,q}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^N |z_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Essendo $(p-1)q=p$, si ha allora

$$\sum_{i=1}^N |x_i-y_i|^{p-1}\,|x_i-z_i| \le [d_p(X,Y)]^{\frac{p}{q}}\,d_p(X,Z)\,,$$

e

$$\sum_{i=1}^N |x_i-y_i|^{p-1}\,|z_i-y_i| \le [d_p(X,Y)]^{\frac{p}{q}}\,d_p(Z,Y)\,.$$

Sostituendo in (1.6), si ha

$$[d_p(X,Y)]^p \le [d_p(X,Y)]^{\frac{p}{q}} \, [d_p(X,Z) + d_p(Z,Y)] \, .$$

Dividendo per $d_p(X,Y)$ (che è diverso da zero per ipotesi), si ottiene la disuguaglianza triangolare osservando che $p - p/q = 1$.

Sempre in $\mathbf{R}^N$ è possibile definire

$$d_\infty((x_1,\dots,x_N),(y_1,\dots,y_N)) = \max\{|x_i - y_i|, i = 1,\dots,N\} \, .$$

Lo spazio $(\mathbf{R}^N, d_\infty)$ è uno spazio metrico (verifica molto semplice, in questo caso).

Esercizio 1.1.9 Dimostrare che

$$\lim_{p\to+\infty} d_p((x_1,\dots,x_N),(y_1,\dots,y_N)) = d_\infty((x_1,\dots,x_N),(y_1,\dots,y_N)) \, .$$

Teorema 1.1.10 (Cauchy-Schwartz e Hölder) *Siano date $\{s_n\}$ e $\{t_n\}$ due successioni di numeri reali;*

a) se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} s_n^2 < +\infty \, , \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} t_n^2 < +\infty \, ,$$

si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |s_n\, t_n| \le \left(\sum_{n=1}^{+\infty} s_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} t_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \; ; \tag{1.7}$$

b) dati p e q due numeri reali tali che

$$p > 1 \, , \quad q > 1 \, , \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \, ,$$

se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |s_n|^p < +\infty \, , \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} |t_n|^q < +\infty \, ,$$

si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |s_n\, t_n| \le \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |s_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |t_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} \, . \tag{1.8}$$

Dimostrazione. Dimostriamo solo la prima formula (l'altra ha dimostrazione analoga). Sia N fissato; applicando (1.2), si ha

$$\sum_{n=1}^{N} |s_n\, t_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{N} s_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{N} t_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} s_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} t_n^2\right)^{\frac{1}{2}} ;$$

la seconda disuguaglianza è dovuta al fatto che le serie sono a termini non negativi (e quindi la successione delle somme parziali è monotona crescente). Pertanto, essendo la disuguaglianza precedente vera per ogni N in $\mathbf{N}$, si ha

$$\sup\left\{\sum_{n=1}^{N} |s_n\, t_n|, n \in \mathbf{N}\right\} \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} s_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} t_n^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Essendo la serie di termine generico $|s_n\, t_n|$ una serie a termini non negativi, la successione delle somme parziali è monotona crescente, cosicché l'estremo superiore coincide con il limite per N tendente a $+\infty$, cioè la somma della serie. ■

Esempio 1.1.11 Sia $p \geq 1$, e siano

$$X = \ell^p = \left\{\{x_n\} \subset \mathbf{R} : \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty\right\} ,$$

$$d_p(\{x_n\}, \{y_n\}) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n - y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Allora (ℓ^p, d_p) è uno spazio metrico. Come al solito, i) e ii) sono di verifica immediata, più complicato è il controllo della disuguaglianza triangolare. La verifica si effettua come nel caso di $(\mathbf{R}^n, d_p)$, usando (1.8). Se $p = 1$, la verifica discende semplicemente dalla disugaglianza triangolare in $\mathbf{R}$.

Si noti che gli spazi ℓ^p soddisfano le seguenti inclusioni, se $q > p \geq 1$:

$$\ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^q ,$$

e le inclusioni sono strette. Per verificare le inclusioni, è sufficiente osservare che se $\{x_n\}$ appartiene a ℓ^p, allora $|x_n|^p$ tende a zero, e quindi $|x_n|$ tende a zero. Pertanto, $|x_n|$ è definitivamente minore di 1, il che implica che $|x_n|^q \leq$

$|x_n|^p$ definitivamente (essendo $q > p$). Quindi $\{x_n\}$ appartiene a ℓ^q (per il criterio del confronto). L'inclusione è stretta in quanto (ad esempio) $x_n = 1/[n^{1/q} \ln^2(n)]$ è in ℓ^q ma non in ℓ^p se $p < q$.

Sia poi

$$X = \ell^\infty = \{\{x_n\} \subset \mathbf{R} : \{x_n\} \text{ è limitata}\} \,,$$
$$d_\infty(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sup\{|x_n - y_n|, n \in \mathbf{N}\} \,. \tag{1.9}$$

Allora (ℓ^∞, d_∞) è uno spazio metrico (la verifica questa volta è facile!) tale che $\ell^p \subset \ell^\infty$ per ogni $p \geq 1$, con inclusione stretta (ogni successione limitata ma non infinitesima non appartiene ad ℓ^p dal momento che la condizione necessaria di convergenza della serie non è verificata).

Esempio 1.1.12 Siano

$$X = C^0([a,b], \mathbf{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbf{R} \;\; f \text{ continua}\} \,,$$

e

$$d_\infty(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)|, x \in [a,b]\} = \max\{|f(x) - g(x)|, x \in [a,b]\} \,.$$

Allora $(C^0([a,b], \mathbf{R}), d_\infty)$ è uno spazio metrico, come si verifica facilmente (anche la disuguaglianza triangolare!).

Esempio 1.1.13 Siano

$$X = C^0([a,b], \mathbf{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbf{R} \;\; f \text{ continua}\} \,,$$

e

$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx \,.$$

Allora $(C^0([a,b], \mathbf{R}), d_1)$ è uno spazio metrico: la ii) e la iii) sono facilmente verificate (ricordando la monotonia dell'integrale), mentre la i) segue dall'osservazione che se l'integrale del modulo di una funzione continua h è nullo, allora h è identicamente nulla. Infatti, se h non fosse nulla, esisterebbe x_0 in $[a,b]$ tale che $|h(x_0)| > 0$; per il teorema della permanenza del segno, esisterebbe un intorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ sul quale si ha $|h(x)| > |h(x_0)|/2$. Pertanto

$$0 = \int_a^b |h(x)| \, dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |h(x)| \, dx > \delta \, |h(x_0)| > 0 \,,$$

da cui l'assurdo.

Teorema 1.1.14 (Disuguaglianza di Hölder) *Siano f e g due funzioni in $C^0([a,b],\mathbf{R})$ e siano p e q maggiori di 1 e tali che $1/p+1/q=1$. Allora*

$$\int_a^b |f(x)\,g(x)|\,dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.10}$$

Dimostrazione. È sufficiente partire dalla disuguaglianza di Young, vera per ogni x in $[a,b]$,

$$|f(x)\,g(x)| \le \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^q}{q},$$

integrare i due termini su $[a,b]$ e poi applicare la disuguaglianza così trovata a

$$\bar{f}(x) = \frac{|f(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}}, \qquad \bar{g}(x) = \frac{|g(x)|}{\left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}},$$

non prima di aver osservato che se l'integrale di $|f(x)|^p$ (o di $|g(x)|^q$) è nullo, la f (ovvero la g) è nulla e la disuguaglianza (1.10) è banalmente vera.

■

Esempio 1.1.15 Siano $p>1$,

$$X = C^0([a,b],\mathbf{R}) = \{f:[a,b]\to\mathbf{R}\ \ f \text{ continua}\},$$

e

$$d_p(f,g) = \left(\int_a^b |f(x)-g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ragionando come nell'Esempio 1.1.11, ed usando la (1.10), si dimostra facilmente che $(C^0([a,b],\mathbf{R}),d_p)$ è uno spazio metrico.

(!)Esercizio 1.1.16 Dimostrare che

$$\lim_{p\to+\infty} d_p(f,g) = d_\infty(f,g).$$

Esempio 1.1.17 Siano

$$X = C^1([a,b], \mathbf{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbf{R} \;\; f \text{ continua con derivata continua}\}\,,$$

$$\bar{d}_{\infty,1}(f,g) = \sup\{|f'(x) - g'(x)|, x \in [a,b]\} = d_\infty(f',g')\,,$$

e

$$d_{\infty,1}(f,g) = d_\infty(f',g') + d_\infty(f,g)\,.$$

Allora $(C^1([a,b], \mathbf{R}), \bar{d}_{\infty,1})$ non è uno spazio metrico (dal momento che se f e g differiscono per una costante, $\bar{d}$ è nulla), mentre $(C^1([a,b], \mathbf{R}), d_{\infty,1})$ lo è. Dal momento che l'aggiunta di $d_\infty(f,g)$ è dovuta solo alla necessità di distinguere due funzioni la cui differenza è costante, si può considerare su $C^1([a,b], \mathbf{R})$ la distanza

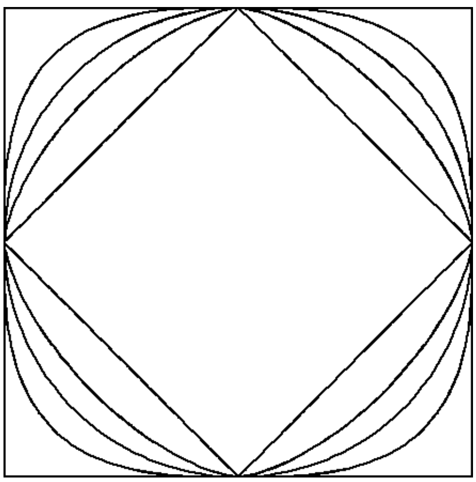
$$\tilde{d}_{\infty,1}(f,g) = d_\infty(f',g') + |f(x_0) - g(x_0)|\,,$$

con x_0 punto qualsiasi di $[a,b]$. In questa maniera, per calcolare la distanza tra f e g è sufficiente "conoscere" le derivate di f e g, ed il valore delle due funzioni in un unico punto (e non su tutto l'intervallo).

1.2 Proprietà degli spazi metrici

Definizione 1.2.1 Sia (X,d) uno spazio metrico, sia x_0 in X e $r > 0$. La **sfera aperta** di centro x_0 e raggio r è l'insieme

$$B_d(x_0,r) = \{x \in X : d(x,x_0) < r\}\,.$$



Le sfere di $(\mathbf{R}^2, d_p)$ per $p = 1$, $\frac{3}{2}$, 2, 3 e ∞ (procedendo dall'interno verso l'esterno)

Un sottoinsieme A di (X,d) si dice **aperto** se per ogni x_0 in A esiste $r>0$ tale che $B_d(x_0,r)\subseteq A$. Un sottoinsieme C di (X,d) si dice **chiuso** se $A=C^{\mathrm{c}}=X\backslash C$ è aperto.

Si verifica facilmente che in $(X,\text{discreta})$ ogni sottoinsieme è aperto (e quindi anche chiuso), mentre gli aperti di $(\mathbf{R},|\cdot|)$ e di $(\mathbf{R}^N,d_p)$ (per ogni p) sono gli aperti "soliti".

Definizione 1.2.2 Sia (X,d) uno spazio metrico. Una successione $\{x_n\}$ contenuta in X si dice **convergente** a x_0 in X se si ha

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n,x_0)=0\,.$$

Quindi, come si vede, la definizione di convergenza in uno spazio metrico è ricondotta (in maniera naturale) alla convergenza a zero in $\mathbf{R}$ (meglio, nello spazio metrico $(\mathbf{R},|\cdot|)$) della successione $\{d(x_n,x_0)\}$.

Ad esempio, nello spazio metrico dell'Esempio 1.1.2, le successioni convergenti sono tutte e sole le successioni che sono definitivamente costanti. La convergenza in $(\mathbf{R},|\cdot|)$ e in $(\mathbf{R}^N,d_p)$ (per ogni p) è la convergenza solita che si dà per successioni in $\mathbf{R}$ ed in $\mathbf{R}^N$ (quest'ultima è — come è noto — equivalente alla convergenza in $(\mathbf{R},|\cdot|)$ delle N componenti).

La convergenza in $C^0([a,b]),d_\infty)$ è la convergenza uniforme.

Teorema 1.2.3 *Sia $\{x_n\}$ una successione convergente in (X,d). Allora il limite è unico.*

Dimostrazione. Se x_n convergesse a x_0 e a y_0, si avrebbe

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n,x_0)=\lim_{n\to+\infty} d(x_n,y_0)=0\,.$$

Ma allora, per la disuguaglianza triangolare,

$$d(x_0,y_0)\le d(x_n,x_0)+d(x_n,y_0)\,,$$

da cui, ricordando che $d(x_0,y_0)\ge 0$ e passando al limite, $d(x_0,y_0)=0$. Pertanto, $x_0=y_0$. ■

Definizione 1.2.4 Siano (X, d) e $(Y, \bar{d})$ due spazi metrici. Una funzione $f : X \to Y$ si dice **continua** in $x_0 \in X$ se, per ogni successione $\{x_n\}$ di X convergente a x_0, la successione $\{f(x_n)\}$ di Y converge a $f(x_0)$. Analogamente,

$$\lim_{d(x_n, x_0) \to 0} \bar{d}(f(x_n), f(x_0)) = 0 .$$

Questa definizione — negli spazi metrici — è equivalente all'altra (ben nota) data in termini di ε e δ:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 : d(x, x_0) < \delta_\varepsilon \Rightarrow \bar{d}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon .$$

Esempio 1.2.5 Siano $(X, \text{discreta})$ e $(Y, \bar{d})$ due spazi metrici. Allora ogni funzione $f : X \to Y$ è continua. Infatti, se $\{x_n\}$ è una qualsiasi successione convergente in $(X, \text{discreta})$ a x_0, allora si deve avere $x_n = x_0$ definitivamente. Pertanto, $f(x_n) = f(x_0)$ definitivamente, da cui $\bar{d}(f(x_n), f(x_0)) \to 0$.

Esercizio 1.2.6 Sia (X, d) uno spazio metrico e sia x_0 in X. Dimostrare che la funzione $d_{x_0} : X \to \mathbf{R}$ definita da $d_{x_0}(x) = d(x_0, x)$ è continua.

Definizione 1.2.7 Sia (Y, d) uno spazio metrico. Una funzione $f : X \to Y$ si dice **limitata** se esistono $M > 0$ ed y_0 in Y tali che

$$f(x) \in B_d(y_0, M) , \qquad \forall x \in X . \tag{2.1}$$

Definizione 1.2.8 Siano (X, d) e $(Y, \bar{d})$ due spazi metrici. Definiamo

$$L(X, Y) = \{f : X \to Y \, , \ f \text{ limitata}\} ,$$

$$C(X, Y) = \{f : X \to Y \, , \ f \text{ continua e limitata}\} .$$

L'insieme $L(X, Y)$ (e quindi anche $C(X, Y)$ che ne è un sottoinsieme) può essere reso uno spazio metrico introducendo la distanza

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} \bar{d}(f(x), g(x)) . \tag{2.2}$$

È facile verificare che d_∞ è effettivamente una distanza; si noti che è ben definita perché sia f che g sono funzioni limitate. Nel caso in cui $(X, d) = ([a, b], |\cdot|)$ e $(Y, \bar{d}) = (\mathbf{R}, |\cdot|)$, $C(X, Y)$ è proprio $C^0([a, b], \mathbf{R})$, dal momento che la limitatezza delle funzioni continue su $[a, b]$ è data dal teorema di Weierstrass. Inoltre, d_∞ è esattamente la distanza definita nell'Esempio 1.1.12.

Esempio 1.2.9 Siano $(X, d) = (\mathbf{N}, \text{discreta})$ e $(Y, \bar{d}) = (\mathbf{R}, |\cdot|)$. Si ha allora, dal momento che ogni funzione f da X a Y non è niente altro che una successione di numeri reali,

$$L(X, Y) = \{\text{successioni limitate di numeri reali}\} = \ell^\infty .$$

Inoltre, essendo ogni "funzione" da X a Y continua (Esempio 1.2.5), si ha $C(X, Y) = L(X, Y)$. La distanza d_∞ definita da (2.2) è esattamente la distanza definita su ℓ^∞ da (1.9).

1.3 Spazi metrici completi

Il seguente teorema mostra come una successione convergente soddisfi una proprietà aggiuntiva.

Teorema 1.3.1 *Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $\{x_n\}$ una successione in X convergente a x_0 in X. Allora la successione $\{x_n\}$ soddisfa la* **condizione di Cauchy***, ovvero*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N} : d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon .$$

Dimostrazione. Se x_n converge a x_0 in X, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che $d(x_n, x_0) < \varepsilon/2$ per ogni $n \geq n_\varepsilon$. Se n e m sono entrambi maggiori di n_ε si ha allora, per la disuguaglianza triangolare,

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_0) + d(x_0, x_m) < \varepsilon ,$$

da cui la tesi. ∎

Esempio 1.3.2 Il viceversa del teorema precedente non è vero: non tutte le successioni di Cauchy sono convergenti. Sia $X = (0, 2)$ e $d(x, y) = |x - y|$. Allora (X, d) è uno spazio metrico, come si verifica facilmente, e la successione $x_n = 1/n$, pur essendo di Cauchy, non è convergente. La successione è di Cauchy perché è convergente in $(\mathbf{R}, d)$, ma non è convergente in X perché il suo (unico!) limite è zero, che non appartiene ad X.

Definizione 1.3.3 Uno spazio metrico si dice **completo** se ogni successione di Cauchy è convergente.

Nell'Esempio 1.1.2 lo spazio è completo perché le successioni di Cauchy sono tutte e sole le successioni definitivamente costanti (quindi convergenti). Tutti gli spazi metrici su $\mathbf{R}$ o $\mathbf{R}^N$ considerati nei vari esempi sono completi.

Un primo risultato generale sulla completezza è il seguente.

Teorema 1.3.4 *Sia (X, d) uno spazio metrico completo, e sia $C \subseteq X$ un insieme chiuso. Allora (C, d) è completo.*

Dimostrazione. Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy in (C, d). Allora $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy in (X, d), che è completo per ipotesi. Pertanto, esiste x_0 in X tale che x_n converge a x_0. Essendo C chiuso, x_0 appartiene a C (se, infatti, x_0 non appartenesse a C, sarebbe nel complementare di C, che è aperto; allora esisterebbe un numero reale $r > 0$ tale che $B_d(x_0, r) \cap C = \emptyset$, il che è assurdo perché la successione $\{x_n\}$ si trova definitivamente in tale intorno per definizione di limite), che quindi è completo. ■

Un secondo risultato, ben più importante, riguarda $L(X, Y)$ e $C(X, Y)$.

Teorema 1.3.5 *Siano (X, d) e $(Y, \bar{d})$ due spazi metrici. Se $(Y, \bar{d})$ è completo, lo sono sia $L(X, Y)$ e $C(X, Y)$, dotati della metrica definita da (2.2).*

Dimostrazione. Sia $\{f_n\}$ una successione di Cauchy in $(L(X, Y), d_\infty))$. Allora

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N} : \sup_{x \in X} \bar{d}(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon \, .$$

Per definizione di sup, questo implica che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N} : \bar{d}(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon \, , \ \forall x \in X \, .$$

Pertanto, per ogni x in X la successione $\{f_n(x)\}$ è di Cauchy in $(Y, \bar{d})$, completo, e quindi converge ad un elemento di Y che definiremo $f(x)$. Passando al limite per m tendente ad infinito nella disuguaglianza $\bar{d}(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$, si trova (grazie all'Esercizio 1.2.6)

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N} : \bar{d}(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \, , \quad \forall n \geq n_\varepsilon \, , \ \forall x \in X \, . \tag{3.1}$$

Sia ora y in Y. Si ha, per la disuguaglianza triangolare, ed essendo f_{n_ε} limitata per ipotesi,

$$\bar{d}(f(x), y) \leq \bar{d}(f(x), f_{n_\varepsilon}(x)) + \bar{d}(f_{n_\varepsilon}(x), y) \leq \varepsilon + M \, ,$$

e quindi f appartiene a $L(X,Y)$. Inoltre, prendendo l'estremo superiore per x in X in (3.1), si ha

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N} : d_\infty(f_n(x), f(x)) \le \varepsilon \quad \forall n \ge n_\varepsilon\,,$$

e quindi f_n converge a f in $(L(X,Y), d_\infty)$.

Se $\{f_n\}$ è una successione di Cauchy in $C(X,Y)$, lo stesso ragionamento svolto precedentemente permette di costruire una funzione in $L(X,Y)$ tale che f_n converge a f in d_∞. L'unica cosa da dimostrare è pertanto la continuità di f. Se x_0 e x_1 appartengono a X, si ha

$$\bar{d}(f(x_0), f(x_1)) \le \bar{d}(f(x_0), f_{n_\varepsilon}(x_0)) + \bar{d}(f_{n_\varepsilon}(x_0), f_{n_\varepsilon}(x_1)) + \bar{d}(f_{n_\varepsilon}(x_1), f(x_1))\,.$$

La prima e la terza quantità sono minori di ε, mentre la seconda può essere scelta piccola prendendo x_0 ed x_1 vicini (dal momento che f_{n_ε} è continua). Pertanto, f è continua. ■

Corollario 1.3.6 *Sia $(C^0([a,b],\mathbf{R}), d_\infty)$ che (ℓ^∞, d_∞) sono completi.*

Teorema 1.3.7 *Sia $p > 1$. Lo spazio (ℓ^p, d_p) è completo.*

Dimostrazione. Sia $\{x^{(n)}\}$ una successione di Cauchy in (ℓ^p, d_p). Si ha allora

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N} : \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \quad \forall n, m \ge n_\varepsilon\,. \tag{3.2}$$

Pertanto, per ogni k in $\mathbf{N}$,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N} : |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^p < \varepsilon^p \quad \forall n, m \ge n_\varepsilon\,,$$

e quindi la successione $\{n \mapsto x_k^{(n)}\}$ è di Cauchy in $(\mathbf{R}, |\cdot|)$, che è completo. Siano allora x_k il limite per n tendente ad infinito di $x_k^{(n)}$, e $\bar{x}$ la successione $\{x_k\}$. Dal momento che da (3.2) segue che, per ogni N in $\mathbf{N}$,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N} : \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \quad \forall n, m \ge n_\varepsilon\,,$$

passando al limite per m tendente ad infinito, si ha

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N} : \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k^{(n)} - x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon \, .$$

Prendendo l'estremo superiore su N in $\mathbf{N}$,

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N} : \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k^{(n)} - x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon \, ,$$

da cui segue che $\{x^{(n)}\}$ converge a $\bar{x}$ in (ℓ^p, d_p). Il fatto che $\bar{x}$ appartenga ad ℓ^p segue poi dalla disuguaglianza triangolare per d_p:

$$\left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = d_p(\bar{x}, 0) \leq d_p(\bar{x}, x^{(n_\varepsilon)}) + d_p(x^{(n_\varepsilon)}, 0) < +\infty \, ,$$

essendo $x^{(n_\varepsilon)}$ in ℓ^p. ■

Esempio 1.3.8 Lo spazio $C^0([a,b]), d_1)$ non è completo. Consideriamo infatti $C^0([-1,1], \mathbf{R})$ e la successione $f_n(x)$ così definita:

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [-1, -1/n], \\ nx & \text{se } x \in (-1/n, 1/n) \\ \;\;1 & \text{se } x \in [1/n, 1]. \end{cases}$$

La successione f_n è di Cauchy; infatti f_n e f_m differiscono al più (se $m > n$) sull'insieme $(-1/n, 1/n)$ e su questo insieme si ha $|f_n(x) - f_m(x)| \leq 2$. Allora

$$d_1(f_n, f_m) = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)| \, dx = \int_{-1/n}^{1/n} |f_n(x) - f_m(x)| \, dx \leq \frac{4}{n} \, ,$$

che può essere reso minore di ε se n è sufficientemente grande. D'altra parte non esiste nessuna funzione continua f tale che

$$d_1(f_n, f) = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f(x)| \, dx \to 0 \, .$$

Sia infatti $a > 0$; allora

$$\int_{a}^{1} |f_n(x) - f(x)| \, dx \to 0 \, ,$$

essendo questa quantità positiva e minore di $d_1(f_n, f)$. Se n è tale che $1/n < a$ (fatto che accade definitivamente), dalla definizione di f_n si ha

$$\int_a^1 |1 - f(x)|\, dx \to 0\,,$$

da cui (essendo questa quantità indipendente da n),

$$\int_a^1 |1 - f(x)|\, dx = 0\,,$$

il che implica che $f \equiv 1$ su $[a, 1]$ per ogni $a > 0$. Con ragionamento analogo si prova che $f \equiv -1$ su $[-1, -a]$ con $a > 0$. Ma allora

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \neq 1 = \lim_{x \to 0^+} f(x)\,,$$

e quindi f non può essere continua in $x = 0$.

Esempio 1.3.9 Lo spazio $(X, d) = ((0, 1), |\cdot|)$ non è completo. Può, però, essere "reso" completo, aggiungendo i due punti 0 ed 1, senza modificare la distanza; in altre parole, si può prendere la "chiusura" di X in $\mathbf{R}$ (di $(X, |\cdot|)$ nello spazio metrico $(\mathbf{R}, |\cdot|)$), ed ottenere così uno spazio metrico completo. L'aggiunta dei due punti 0 ed 1 è "minimale" nel senso che per rendere X completo (senza cambiare metrica) non è necessario utilizzare altri punti. Si osservi che esistono successioni di Cauchy tutte contenute in X che convergono a 0 o ad 1 (mentre non esistono successioni di Cauchy contenute in X che convergono ad un qualsiasi numero reale non appartenente a $[0, 1]$).

Lo spazio $(X, d) = (\mathbf{Q}, |\cdot|)$ non è completo. Ad esempio, la successione

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\,,$$

è contenuta in $\mathbf{Q}$, è di Cauchy (perché converge in $\mathbf{R}$ ad "e"), ma il limite non è un numero razionale. Anche in questo caso, come nel precedente, si può rendere $(\mathbf{Q}, |\cdot|)$ completo "aggiungendo" i limiti delle successioni di Cauchy di razionali. Ricordando che ogni numero reale è limite (in $(\mathbf{R}, |\cdot|)$) di una successione di razionali (dunque di una successione di Cauchy di razionali), si ottiene tutto $\mathbf{R}$.

Lo spazio $(X, d) = (\{f \in C^0([a, b], \mathbf{R}) : d_\infty(f, 0) < 1\}, d_\infty)$ non è completo. Ad esempio, la successione $f_n(x) = 1 - \frac{1}{n}$ è in X, è di Cauchy (dal momento che converge uniformemente a $f(x) = 1$), ma il suo limite non è in X. Anche in questo caso, si può rendere (X, d) completo "aggiungendo" le funzioni continue su $[a, b]$ tali che $d_\infty(f, 0) = 1$. Il risultato, che è $(\{f \in C^0([a, b], \mathbf{R}) : d_\infty(f, 0) \leq 1\}, d_\infty)$, è completo essendo chiuso in $(C^0([a, b], \mathbf{R}), d_\infty)$, come si verifica facilmente. Si noti che, essendo possibile ottenere ogni funzione f tale che $d_\infty(f, 0) = 1$ come limite uniforme della successione $f_n = \frac{n}{n+1} f$ (che è tutta contenuta in X), e dal momento che nessuna funzione tale che $d_\infty(f, 0) > 1$ può essere ottenuta come limite uniforme di funzioni in X, ancora una volta abbiamo reso X completo aggiungendo i limiti delle successioni di Cauchy contenute in X.

A questo punto ci si può chiedere se questa operazione si può sempre effettuare. La risposta è affermativa, ed è data dal seguente teorema.

Teorema 1.3.10 (Completamento) *Dato uno spazio metrico (X, d), esiste uno spazio metrico* **completo** $(Y, \bar{d})$ *ed un'applicazione $i : X \to Y$ tale che*

1. *i è un'***isometria***, ovvero $\bar{d}(i(x_0), i(x_1)) = d(x_0, x_1)$, per ogni x_0, x_1 in X;*

2. *$i(X)$ è* **denso** *in Y, ovvero la chiusura di $i(X)$ in Y è Y.*

Dimostrazione. Sia

$$\mathcal{C} = \{\{x_n\} \text{ di Cauchy in } (X, d)\}.$$

Passo 1: Se $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ appartengono a $\mathcal{C}$, allora la successione $z_n = d(x_n, y_n)$ è di Cauchy in $(\mathbf{R}, |\cdot|)$.

Infatti si ha

$$z_n = d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n) = d(x_n, x_m) + z_m + d(y_m, y_n),$$

da cui

$$z_n - z_m \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n).$$

Scambiando il ruolo di n e m si trova la disuguaglianza $z_m - z_n \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n)$, da cui segue

$$|z_n - z_m| \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n).$$

A questo punto, fissato $\varepsilon > 0$, è sufficiente scegliere n ed m più grandi di $n_\varepsilon = \max(n_\varepsilon(\{x_n\}), n_\varepsilon(\{y_n\}))$ per avere che $|z_n - z_m| < \varepsilon$.

Passo 2: Essendo $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ completo, per ogni coppia di successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ di $\mathcal{C}$, esiste il limite di $d(x_n, y_n)$. Definiamo in $\mathcal{C}$ la relazione seguente

$$\{x_n\}\rho\{y_n\} \iff \lim_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) = 0\,.$$

Si vede facilmente che ρ è una relazione di equivalenza (la transitività è conseguenza della disuguaglianza triangolare) su $\mathcal{C}$. Definiamo Y come lo spazio quoziente di $\mathcal{C}$ modulo la relazione ρ. Successivamente, rendiamo Y uno spazio metrico nel modo seguente: siano $\bar{x}$ e $\bar{y}$ in Y, e siano $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ due successioni in $[\bar{x}]$ e $[\bar{y}]$ rispettivamente. Allora

$$\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{n\to+\infty} d(x_n, y_n)\,.$$

Tale definizione è ben posta, dal momento che cambiando rappresentanti in $[\bar{x}]$ e $[\bar{y}]$ il limite non cambia (sempre per la disuguaglianza triangolare). La funzione $\bar{d}$ è non negativa (dal momento che d lo è), e si annulla se e solo se $\bar{x} = \bar{y}$ (per definizione, se il limite di $d(x_n, y_n)$ è zero, $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sono nella stessa classe di equivalenza). La simmetria è conseguenza della simmetria di d, mentre la disuguaglianza triangolare segue passando al limite per n tendente ad infinito nella disuguaglianza

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, z_n) + d(z_n, y_n)\,.$$

Passo 3: Dato x in X, definiamo $\mathrm{cost}(x)$ la successione che ha tutte le componenti uguali ad x. Tale successione è evidentemente in $\mathcal{C}$. Definiamo $i : X \to Y$ nel modo seguente: $i(x) = [\mathrm{cost}(x)]$. Essendo la definizione di $\bar{d}$ indipendente dalla scelta del rappresentante nella classe di equivalenza, si può scegliere la successione $\mathrm{cost}(x)$ in $[\mathrm{cost}(x)]$ e si ha allora

$$\bar{d}(i(x), i(y)) = \lim_{n\to+\infty} d((\mathrm{cost}(x))_n, (\mathrm{cost}(y))_n) = \lim_{n\to+\infty} d(x, y) = d(x, y)\,,$$

e quindi i è un'isometria.

Passo 4: $i(X)$ è denso in $(Y, \bar{d})$.

Sia $\bar{y}$ in Y, e sia $\{x_m\}$ una successione qualsiasi in $[\bar{y}]$. Definiamo $y_m = i(x_m) = [\text{cost}(x_m)]$ e calcoliamo $\bar{d}(y_m, y)$. Si ha

$$\bar{d}(y_m, y) = \lim_{n\to+\infty} d((\text{cost}(x_m))_n, x_n) = \lim_{n\to+\infty} d(x_m, x_n)\,.$$

Essendo la successione $\{x_m\}$ in $\mathcal{C}$, la successione $\{x_m\}$ è di Cauchy in (X, d). Pertanto, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste n_ε in $\mathbf{N}$ tale che

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon\,, \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon\,.$$

Questo fatto implica che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste n_ε in $\mathbf{N}$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_m, x_n) \leq \varepsilon\,, \quad \forall m \geq n_\varepsilon$$

(ricordiamo che tale limite esiste perché la successione $\{n \mapsto d(x_m, x_n)\}$ è di Cauchy in $(\mathbf{R}, |\cdot|)$). Pertanto, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste n_ε in $\mathbf{N}$ tale che $\bar{d}(y_m, y) \leq \varepsilon$ per ogni $m > n_\varepsilon$, ovvero si ha che $\{y_m\}$ converge a y in $(Y, \bar{d})$.

Passo 5: $(Y, \bar{d})$ è completo.

Sia $\{x^{(n)}\}$ una successione di Cauchy in $(Y, \bar{d})$. Dal momento che $i(X)$ è denso in $(Y, \bar{d})$, per ogni n in $\mathbf{N}$ esiste x_n in X tale che

$$\bar{d}(x^{(n)}, i(x_n)) \leq \frac{1}{n}\,. \tag{3.3}$$

Mostriamo che la successione $\{x_n\}$ è in $\mathcal{C}$. Si ha infatti (ricordando che i è un'isometria),

$$d(x_n, x_m) = \bar{d}(i(x_n), i(x_m)) \leq \bar{d}(i(x_n), x^{(n)}) + \bar{d}(x^{(n)}, x^{(m)}) + \bar{d}(x^{(m)}, i(x_m))\,.$$

Usando (3.3), e scegliendo n e m sufficientemente grandi (in modo che $\frac{1}{n}$ e $\frac{1}{m}$ siano minori di ε, e in modo che $\bar{d}(x^{(n)}, x^{(m)})$ sia anch'essa minore di ε), si prova che $d(x_n, x_m) < 3\varepsilon$ e quindi $\{x_n\}$ è in $\mathcal{C}$. Sia ora $\bar{x} = [\{x_n\}]$; mostriamo che $\{x^{(n)}\}$ converge a $\bar{x}$ in $(Y, \bar{d})$. Si ha infatti, sempre per (3.3), e per definizione di $\bar{d}$,

$$\bar{d}(\bar{x}, x^{(n)}) \leq \bar{d}(\bar{x}, i(x_n)) + \bar{d}(i(x_n), x^{(n)}) \leq \lim_{m\to+\infty} d(x_n, x_m) + \frac{1}{n}\,.$$

Ricordando che $\{x_n\}$ è di Cauchy, se n è sufficientemente grande si ha $\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$ e $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$. Pertanto, per tali n, $\bar{d}(\bar{x}, x^{(n)}) \leq 2\varepsilon$, da cui la tesi. ■

Osservazione 1.3.11 Si può anche dimostrare che lo spazio metrico $(Y, \bar{d})$ è unico a meno di isometrie, ovvero se esiste un altro spazio metrico $(Z, \tilde{d})$ che verifica 1. e 2. del teorema precedente, allora esiste un'isometria biiettiva $\bar{i}$ tra $(Y, \bar{d})$ e $(Z, \tilde{d})$.

(!)Esercizio 1.3.12 Nel caso di $(C^0([a, b], \mathbf{R}), d_1)$, chi sono Y e i? Ovvero, se $\{f_n\}$ è una successione di Cauchy in d_1, che proprietà ha il suo limite in Y? È chiaro che non è possibile ragionare come nell'Esempio 1.3.9, perché in tutti e tre i casi era sufficiente prenderne la chiusura (e scegliere per i l'identità) per completarlo (dato che lo spazio non completo era contenuto in un altro completo). In questo caso $C^0([a, b], \mathbf{R})$ è già "tutto lo spazio", il che vuol dire che sarà necessario ampliarlo con funzioni non continue per renderlo completo. Ma non tutte le funzioni discontinue sono integrabili (secondo Riemann)...