

Appunti di  
Variabile Complessa

a.a. 2002-2003

Luigi Orsina  
19 dicembre 2002

# Indice

1	Definizioni	3
2	Convergenza e continuità	6
3	Integrali curvilinei	18
4	La formula di Cauchy	27
5	Successioni e serie di funzioni	35
6	Prolungamento analitico Superfici di Riemann	45
7	Serie di Laurent e singolarità	57
8	Residui	65
9	Residuo logaritmico Teorema di Rouché e Teorema di Brouwer	80
10	La trasformata di Fourier	88
A	Appendice: Forme differenziali	101

# 1 Definizioni

Sia  $\mathbf{C}$  l'insieme dei numeri complessi. Un **numero complesso**  $z = x + iy$  è identificato in maniera univoca assegnando due numeri reali  $x$  e  $y$ , detti rispettivamente **parte reale**  $x = \Re(z)$  e **parte immaginaria**  $y = \Im(z)$ . la “quantità”  $i$  viene detta **unità immaginaria**. Dato  $z = x + iy$  numero complesso, il suo **coniugato**  $\bar{z}$  è definito da  $\bar{z} = x - iy$ , e pertanto  $\Re(\bar{z}) = \Re(z)$  e  $\Im(\bar{z}) = -\Im(z)$ . Se  $z_1$  e  $z_2$  sono due numeri complessi, la loro somma è definita componente per componente:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

mentre il prodotto è definito da

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Dalla definizione di prodotto si ricava subito che  $ii = i^2 = -1$ . Il **modulo** di un numero complesso è definito da  $|z|^2 = z\bar{z}$ . Eseguendo i conti, si trova

$$|z|^2 = x^2 + y^2.$$

Pertanto,  $|z|^2$  è un numero reale, e quindi  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  (scegliendo la determinazione positiva per la radice quadrata). Si noti che il modulo del numero complesso  $z$  non è altro che la lunghezza euclidea del vettore  $(x, y) = (\Re(z), \Im(z))$  di  $\mathbf{R}^2$ . Pertanto,  $d_{\mathbf{C}}(z, w) = |z - w|$  è una distanza su  $\mathbf{C}$ , che diventa così uno spazio metrico.

Lo spazio vettoriale  $\mathbf{C}$  si può rendere uno spazio dotato di prodotto scalare, definendo

$$(z | w) = z\bar{w}.$$

In questa maniera, si ottiene un'applicazione da  $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$  in  $\mathbf{C}$ , che è bilineare, antisimmetrica, nel senso che

$$(z | w) = \overline{(w | z)},$$

è tale che  $(z | z) \geq 0$ , e verifica la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz:

$$|(z | w)| \leq \sqrt{(z | z)} \sqrt{(w | w)}.$$

Dal momento che  $\sqrt{(z|z)} = |z|$ , ne segue che  $(\cdot|\cdot)$  induce su  $\mathbf{C}$  la distanza  $d_{\mathbf{C}}$ .

Se  $z \neq 0$ , si può definire l'**inverso** di  $z$  come l'unico numero complesso  $w$  tale che  $zw = 1$ . Denotando  $w = \frac{1}{z}$ , si vede facilmente che

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Così come si possono introdurre le coordinate polari in  $\mathbf{R}^2$ , è possibile dare una rappresentazione in coordinate polari per i numeri complessi: ogni numero complesso è identificato da una coppia  $(\rho, \theta)$ , con  $\rho \geq 0$  e  $\theta$  in  $\mathbf{R}$ . L'interpretazione geometrica è la solita:  $\rho$  è esattamente  $|z|$ , mentre  $\theta$  è l'angolo formato con l'asse  $x$  dal vettore che unisce l'origine a  $z$ . Se, al solito, identifichiamo  $x$  e  $y$  — dati  $\rho$  e  $\theta$  — dalle formule

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta), \\ y = \rho \sin(\theta), \end{cases}$$

ne segue che  $z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ . Dal momento che le funzioni seno e coseno sono periodiche, a  $\theta$  e  $\theta + 2k\pi$  ( $k$  intero relativo) corrisponde lo stesso numero complesso  $z$ . In altre parole, se  $z \neq 0$ , l'argomento è determinato a meno di multipli interi di  $2\pi$ . Definiamo  $\text{Arg}(z)$  uno qualsiasi dei valori di  $\theta$  per i quali  $z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ , mentre definiamo  $\arg(z)$  l'unico valore di  $\theta$  compreso tra  $\varphi_0$  e  $\varphi_0 + 2\pi$ , con  $\varphi_0$  fissato *a priori* nel contesto; nella maggior parte dei casi si sceglierà  $\varphi_0 = 0$ , oppure  $\varphi_0 = -\pi$ . Se  $z = 0$ , dal momento che  $\rho = 0$ ,  $\arg(z)$  e  $\text{Arg}(z)$  non sono definiti.

Se  $\theta$  è in  $\mathbf{R}$  definiamo  $e^{i\theta}$  come il numero complesso  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ . In questo modo,  $|e^{i\theta}| = 1$  e, se  $\rho = |z|$  e  $\theta = \text{Arg}(z)$ ,

$$z = \rho e^{i\theta}.$$

Dati  $e^{i\theta_1}$  e  $e^{i\theta_2}$  in  $\mathbf{C}$ , si ha poi

$$\begin{aligned}
 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} &= [\cos(\theta_1) + i \operatorname{sen}(\theta_1)] [\cos(\theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_2)] \\
 &= [\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \operatorname{sen}(\theta_1) \operatorname{sen}(\theta_2)] \\
 &\quad + i [\operatorname{sen}(\theta_1) \cos(\theta_2) + \cos(\theta_1) \operatorname{sen}(\theta_2)] \\
 &= [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \\
 &= e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.
 \end{aligned}$$

Pertanto, la funzione  $\theta \mapsto e^{i\theta}$  segue le consuete regole degli esponenziali. Dalla formula appena dimostrata segue facilmente che se  $z_1$  e  $z_2$  sono due numeri complessi, allora  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$  e  $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2)$ . Si ha poi

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho e^{i\theta}} = \frac{\overline{\rho e^{i\theta}}}{|\rho e^{i\theta}|^2} = \frac{e^{-i\theta}}{\rho},$$

e pertanto  $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$  e  $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$ . Come conseguenza, se  $z_1$  e  $z_2$  sono due numeri complessi con  $z_2 \neq 0$ ,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\arg(z_1) - \arg(z_2))}.$$

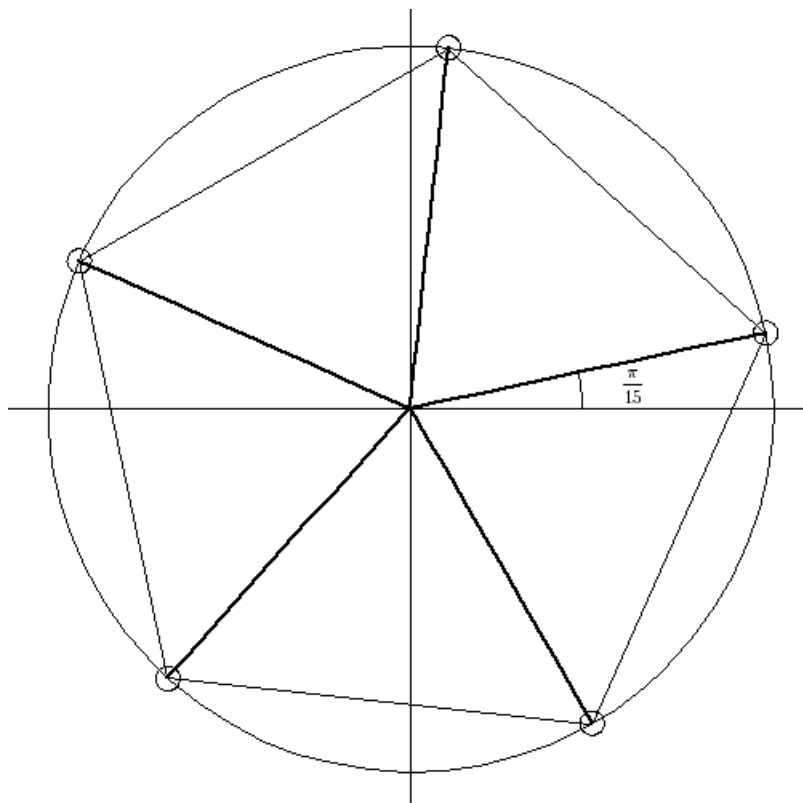
Dalle formule appena dimostrate segue poi che, se  $z$  è un numero complesso, e  $n$  è un intero relativo (se  $n$  è negativo,  $z$  deve essere diverso da zero), allora

$$z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}.$$

Da questa formula si ottiene formula che dà le radici  $n$ -sime di un numero complesso  $z$ . Infatti, se  $z = \rho e^{i\theta}$ , allora

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}, k = 0, \dots, n-1 \right\}.$$

Geometricamente, le radici  $n$ -sime di  $z$  sono i vertici di un poligono regolare di  $n$  lati inscritto nella circonferenza di centro l'origine e raggio  $\sqrt[n]{\rho}$ .



Le cinque radici quinte di  $e^{i\frac{\pi}{5}}$

## 2 Convergenza e continuità

Essendo  $(\mathbf{C}, d_{\mathbf{C}})$  uno spazio metrico,  $\mathbf{C}$  è uno spazio topologico. Dal momento che l'applicazione  $I : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{R}^2$  definita da  $I(z) = (\Re(z), \Im(z))$  è un'isometria (se in  $\mathbf{R}^2$  si considera la distanza euclidea), tutte le proprietà topologiche di  $\mathbf{R}^2$  si trasferiscono automaticamente su  $\mathbf{C}$ . In altre parole, gli aperti di  $\mathbf{C}$  non sono altro che gli aperti di  $\mathbf{R}^2$ , e lo stesso vale per gli insiemi chiusi, i compatti, i connessi, la chiusura e l'interno di un insieme.

La definizione di convergenza per una successione  $\{z_n\}$  contenuta in  $\mathbf{C}$  è la solita:  $z_n$  converge a  $z_0$  se e solo se  $d_{\mathbf{C}}(z_n, z_0) = |z_n - z_0|$  tende a zero. Ricordando la definizione di modulo (e l'isometria tra  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{R}^2$ ),

$$z_n \rightarrow z_0 \iff \begin{cases} \Re(z_n) \rightarrow \Re(z_0) \\ \Im(z_n) \rightarrow \Im(z_0) \end{cases} .$$

In altre parole, la convergenza di successioni può essere “letta” in  $\mathbf{R}^2$  e dimostrata componente per componente.

Un sottoinsieme  $E$  di  $\mathbf{C}$  si dice un **dominio** se  $E$  è un aperto connesso. Sia  $E$  un dominio e  $f : E \rightarrow \mathbf{C}$  una funzione; assegnare una funzione da  $E$  in  $\mathbf{C}$  è equivalente ad assegnare due funzioni da  $E$  (che — da ora in poi — identificheremo sistematicamente con  $E$ ) a valori in  $\mathbf{R}$ . In altre parole, se  $z = x + iy$ , allora  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , con  $u(x, y) = \Re(f(z))$  e  $v(x, y) = \Im(f(z))$ .

Una funzione  $f : E \rightarrow \mathbf{C}$  ammette limite  $L$  per  $z$  tendente a  $z_0$  se e solo se  $f(z_n)$  converge a  $L$  per ogni successione  $\{z_n\}$  contenuta in  $E$  e tendente a  $z_0$ . In termini di parte reale e immaginaria,  $f(z)$  tende a  $L$  per  $z$  tendente a  $z_0$  se e solo se  $u(x_n, y_n)$  converge a  $\Re(L)$  e  $v(x_n, y_n)$  converge a  $\Im(L)$ . Una funzione  $f : E \rightarrow \mathbf{C}$  si dice **continua** in  $z_0$  se e solo se  $f(z)$  converge a  $f(z_0)$  quando  $z$  tende a  $z_0$ . A causa dell’identificazione tra convergenza di  $f(z)$  e convergenza della parte reale e della parte immaginaria,  $f$  è continua in  $z_0$  se e solo se  $u$  e  $v$  sono continue in  $(x_0, y_0) = (\Re(z_0), \Im(z_0))$ . In altre parole, saper determinare la continuità di funzioni definite da  $\mathbf{R}^2$  in  $\mathbf{R}$  è sufficiente (ed anche necessario. . .) per determinare la continuità di funzione definite da  $\mathbf{C}$  a valori complessi.

Dal momento che la continuità di una funzione complessa  $f$  si “legge” dalla continuità delle funzioni  $u$  e  $v$ , si estendono a funzioni a valori complessi tutti i teoremi validi per funzioni continue da  $\mathbf{R}^2$  in  $\mathbf{R}$ . In particolare, se  $E$  è un compatto di  $\mathbf{C}$ , e  $f : E \rightarrow \mathbf{C}$  è una funzione continua, allora  $|f(z)|$  è una funzione continua da  $E$  in  $\mathbf{R}$  (perché è composizione di funzioni continue) e pertanto ammette massimo e minimo per il teorema di Weierstrass.

**Definizione 2.1** Sia  $E$  un dominio in  $\mathbf{C}$ , e sia  $f : E \rightarrow \mathbf{C}$  una funzione. Dato  $z_0$  in  $E$ ,  $f$  si dice **derivabile** in  $z_0$  se e solo se esiste

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Se  $f$  è derivabile in  $z_0$ , si definisce  $f'(z_0)$  il valore del limite:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

**Osservazione 2.2** Ricordiamo che  $\Delta z \rightarrow 0$  vuol dire “per ogni successione  $z_n$  tendente a zero”; in altre parole,  $\Delta z$  può tendere a zero in un modo qualsiasi, senza “regole” prefissate. Se scriviamo  $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ , allora  $\Delta z \rightarrow 0$  è equivalente a  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ , cosicché il limite che definisce la derivabilità di una funzione complessa è, in un certo senso, un limite in due variabili.

**Esempio 2.3** Sia  $f(z) = L$ , con  $L$  numero complesso fissato. Allora, per ogni  $z_0$ ,

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{L - L}{\Delta z} = 0,$$

e quindi  $f(z) = L$  è derivabile ovunque e la sua derivata vale 0. Sia  $f(z) = z$ , e sia  $z_0$  qualsiasi. Allora

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{z_0 + \Delta z - z_0}{\Delta z} = 1,$$

e pertanto  $f(z) = z$  è derivabile in ogni punto del piano complesso e la sua derivata vale 1. Sia ora  $n$  in  $\mathbf{N}$  e  $f(z) = z^n$ . Allora, per la formula del binomio di Newton,

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{(z_0 + \Delta z)^n - (z_0)^n}{\Delta z} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} z_0^k (\Delta z)^{n-k}}{\Delta z},$$

che converge a  $n z_0^{n-1}$ . La funzione  $f(z) = z^n$  è pertanto derivabile su tutto il piano complesso, e la sua derivata vale  $n z^{n-1}$  (ritrovando così la formula che dà la derivata (reale) di  $x^n$ ). Se  $n$  è un intero negativo, la funzione  $f(z) = z^n$  è derivabile in  $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ , e la sua derivata vale  $n z^{n-1}$  (come si verifica facilmente).

Sia ora  $f(z) = \Re(z)$ ; si ha

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\Re(z_0) + \Re(\Delta z) - \Re(z_0)}{\Re(\Delta z) + i\Im(\Delta z)} = \frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Se facciamo tendere  $\Delta z$  a zero scegliendo  $(\Delta x, \Delta y) = (t, 0)$  (con  $t$  tendente a zero), otteniamo come limite 1. Se, invece, facciamo tendere  $\Delta z$  a zero scegliendo  $(\Delta x, \Delta y) = (0, t)$  (con  $t$  tendente a zero), otteniamo come limite 0. Pertanto,  $f(z) = \Re(z)$  non è derivabile in nessun punto di  $\mathbf{C}$ . Se calcoliamo la parte reale e la parte immaginaria di  $\Re(z)$ , si ha  $u(x, y) = x$  e  $v(x, y) = 0$ , che

sono due funzioni  $C^\infty$  su  $\mathbf{R}^2$ . In altre parole, e a differenza di quanto accade per la continuità, la derivabilità in  $\mathbf{C}$  **non** è equivalente alla derivabilità di parte reale e parte immaginaria, e neanche a regolarità superiori di  $u$  e  $v$ . In maniera analoga, si dimostra che  $f(z) = \Im(z)$  e  $f(z) = \bar{z}$  non sono derivabili in nessun punto di  $\mathbf{C}$ .

**Teorema 2.4** Sia  $f : E \rightarrow \mathbf{C}$  una funzione e sia  $z_0$  in  $E$ . Se  $f$  è derivabile in  $z_0$ , allora  $f$  è **differenziabile** in  $z_0$ , ovvero

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) - f'(z_0) \Delta z}{\Delta z} = 0.$$

**Dimostrazione.** Evidente dalla definizione di derivabilità. ■

La derivabilità di  $u$  e  $v$  non è sufficiente a garantire la derivabilità di  $f$  perché la parte reale e la parte immaginaria di una funzione derivabile in  $\mathbf{C}$  devono soddisfare delle relazioni ben precise.

**Teorema 2.5** Sia  $f : E \rightarrow \mathbf{C}$  una funzione derivabile in  $z_0$  appartenente ad  $E$ . Allora la parte reale  $u$  e la parte immaginaria  $v$  di  $f$  sono differenziabili in  $z_0 = (x_0, y_0)$  e si ha

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0). \end{cases} \quad (2.1)$$

Le equazioni (2.1) sono dette **equazioni di Cauchy-Riemann**.

**Dimostrazione.** Si ha

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Scegliamo ora  $\Delta z = (\Delta x, 0)$ , cosicché

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0) + i[v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)]}{\Delta x}.$$

Dal momento che il limite esiste, la parte reale converge alla parte reale del limite, e la parte immaginaria converge alla parte immaginaria. Pertanto, se  $f'(z_0) = a + ib$ , allora

$$\begin{aligned} u_x(x_0, y_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} = a, \\ v_x(x_0, y_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} = b. \end{aligned}$$

Scegliamo ora  $\Delta z = (0, \Delta y)$ ; si ha

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) + i[v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)]}{i \Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0) - i[u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)]}{\Delta y}. \end{aligned}$$

Analogamente a prima, si trova

$$\begin{aligned} v_y(x_0, y_0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} = a, \\ -u_y(x_0, y_0) &= -\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y} = b, \end{aligned}$$

cosicché  $u$  e  $v$  sono derivabili in  $(x_0, y_0)$  e soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann.

Verifichiamo ora che  $u$  e  $v$  sono differenziabili: dobbiamo dimostrare che, quando  $(\Delta x, \Delta y)$  tende a  $(0, 0)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) - u_x(x_0, y_0)\Delta x - u_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} &\rightarrow 0, \\ \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0) - v_x(x_0, y_0)\Delta x - v_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Essendo  $f$  differenziabile in  $z_0$ , quando  $\Delta z$  tende a zero si ha

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) - f'(z_0) \Delta z}{\Delta z} \rightarrow 0. \quad (2.2)$$

Scriviamo ora parte reale e parte immaginaria del numeratore; essendo  $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ , ed essendo  $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$ , si ha che la parte reale è

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) - u_x(x_0, y_0)\Delta x + v_x(x_0, y_0)\Delta y,$$

che, per le (2.1), diventa

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) - u_x(x_0, y_0)\Delta x - u_y(x_0, y_0)\Delta y,$$

mentre la parte immaginaria è

$$\Delta v = v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0) - v_x(x_0, y_0)\Delta x - u_x(x_0, y_0)\Delta y,$$

che, sempre per le (2.1), si riscrive

$$\Delta v = v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0) - v_x(x_0, y_0)\Delta x - v_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Pertanto, la (2.2) afferma che

$$\frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta z} \rightarrow 0,$$

ovvero che

$$\frac{|\Delta u + i\Delta v|}{|\Delta z|} \rightarrow 0,$$

quando  $\Delta z$  tende a zero; dal momento che tale limite è zero se e solo se

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta u|}{|\Delta z|} = 0, \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta v|}{|\Delta z|} = 0,$$

ricordando che  $|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ , si ha che  $u$  e  $v$  sono differenziabili in  $z_0$ . ■

È anche vero il viceversa del teorema precedente.

**Teorema 2.6** *Sia  $f : E \rightarrow \mathbf{C}$  un funzione, con  $f = u + iv$ , e sia  $z_0$  in  $E$ . Se  $u$  e  $v$  sono differenziabili in  $z_0$  e verificano le (2.1), allora  $f$  è derivabile in  $z_0$ .*

**Dimostrazione.** Essendo  $u$  e  $v$  differenziabili in  $z_0$ , si ha

$$u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) = u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + \xi(\Delta x, \Delta y),$$

e

$$v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0) = v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y + \eta(\Delta x, \Delta y),$$

con  $\xi(\Delta x, \Delta y)$  e  $\eta(\Delta x, \Delta y)$  tali che

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\xi(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\xi(\Delta z)}{|\Delta z|} = 0, \quad (2.3)$$

e

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\eta(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\eta(\Delta z)}{|\Delta z|} = 0. \quad (2.4)$$

Sfruttando le (2.1), si ha

$$u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) = u_x(x_0, y_0)\Delta x - v_x(x_0, y_0)\Delta y + \xi(\Delta x, \Delta y),$$

e

$$v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0) = v_x(x_0, y_0)\Delta x + u_x(x_0, y_0)\Delta y + \eta(\Delta x, \Delta y).$$

Pertanto,

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= \frac{u_x(x_0, y_0)[\Delta x + i\Delta y] + i v_x(x_0, y_0)[\Delta x + i\Delta y]}{\Delta x + i\Delta y} \\ &\quad + \frac{\xi(\Delta z) + i\eta(\Delta z)}{\Delta z} \\ &= u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0) + \frac{\xi(\Delta z) + i\eta(\Delta z)}{\Delta z}. \end{aligned}$$

Da (2.3) e (2.4) segue allora la tesi. ■

**Osservazione 2.7** In virtù delle equazioni di Cauchy-Riemann, se  $f$  è derivabile in  $z_0$  allora si ha

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0) = u_x(x_0, y_0) - i u_y(x_0, y_0) \\ &= v_y(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - i u_y(x_0, y_0). \end{aligned}$$

**Osservazione 2.8** La scrittura  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  non è l'unica possibile per una funzione a valori complessi. Infatti, possiamo rappresentare  $z$  in forma polare come  $z = \rho e^{i\theta}$ , e pertanto possiamo scrivere  $f(z) = u(\rho, \theta) + i v(\rho, \theta)$ . La condizione di derivabilità diviene allora

$$\frac{u(\rho_0 + \Delta\rho, \theta_0 + \Delta\theta) - u(\rho_0, \theta_0) + i[v(\rho_0 + \Delta\rho, \theta_0 + \Delta\theta) - v(\rho_0, \theta_0)]}{(\rho_0 + \Delta\rho) e^{i(\theta_0 + \Delta\theta)} - \rho_0 e^{i\theta_0}} \rightarrow 0,$$

quando  $(\Delta\rho, \Delta\theta)$  tende a  $(0, 0)$ . Separando parte reale e parte immaginaria segue che (se  $\rho_0 \neq 0$ ), le derivate parziali di  $u$  e  $v$  sono legate dalle equazioni

$$u_\rho(\rho_0, \theta_0) = \frac{1}{\rho_0} v_\theta(\rho_0, \theta_0), \quad u_\theta(\rho_0, \theta_0) = -\frac{1}{\rho_0} v_\rho(\rho_0, \theta_0). \quad (2.5)$$

Se, analogamente, scriviamo  $f(z) = \rho(x, y) e^{i\theta(x, y)}$ , allora le equazioni soddisfatte dalle derivate parziali di  $\rho(x, y)$  e  $\theta(x, y)$  sono

$$\rho_x(x_0, y_0) = \rho(x_0, y_0) \theta_y(x_0, y_0), \quad \rho_y(x_0, y_0) = -\rho(x_0, y_0) \theta_x(x_0, y_0). \quad (2.6)$$

**Definizione 2.9** Una funzione  $f : E \rightarrow \mathbf{C}$  si dice **olomorfa in  $E$**  se  $f$  è derivabile in  $z$  per ogni  $z$  in  $E$ , e se la funzione  $f'(z)$  è continua in  $E$ .

Per i teoremi precedentemente dimostrati,  $f$  è olomorfa in  $E$  se e solo se  $u$  e  $v$  sono due funzioni in  $C^1(E)$  che verificano le equazioni di Cauchy-Riemann in  $E$ .

**Esempio 2.10** Siano  $u(x, y) = e^x \cos(y)$  e  $v(x, y) = e^x \sin(y)$ . Le funzioni  $u$  e  $v$  sono  $C^1(\mathbf{R}^2)$  e, come si verifica facilmente, soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann. Definiamo l'esponenziale complesso  $e^z$  come la funzione olomorfa  $f$  che ha  $u$  e  $v$  come parte reale e parte immaginaria:

$$e^z = e^x[\cos(y) + i\sin(y)] = e^x e^{iy}.$$

La funzione  $e^z$  estende al campo complesso la funzione  $e^x$  definita su  $\mathbf{R}$ . Si osservi che, essendo

$$e^{iy} = e^{i(y+2\pi)},$$

la funzione  $e^z$  è periodica di periodo (complesso)  $2\pi i$ ; inoltre,

$$(e^z)' = e^z,$$

come si verifica facilmente. A partire da  $e^z$  definiamo altre due funzioni olomorfe su tutto  $\mathbf{C}$ :

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Si vede facilmente che  $\cos(z)$  e  $\sin(z)$  estendono al campo complesso le funzioni reali di variabile reale  $\cos(x)$  e  $\sin(x)$ ; inoltre,  $\cos(z)$  e  $\sin(z)$  sono periodiche di periodo  $2\pi$ , e sono tali che  $(\cos(z))' = -\sin(z)$  e  $(\sin(z))' = \cos(z)$ .

Tali proprietà giustificano il nome attribuito alle due funzioni, così come lo giustifica il fatto (di verifica immediata) che

$$[\operatorname{sen}(z)]^2 + [\operatorname{cos}(z)]^2 = 1, \quad \forall z \in \mathbf{C}.$$

Si noti che la proprietà precedente **non** implica  $|\operatorname{sen}(z)| \leq 1$  e  $|\operatorname{cos}(z)| \leq 1$ .

**Teorema 2.11** *Siano  $f, g : E \rightarrow \mathbf{C}$  due funzioni olomorfe in  $E$ ; allora*

- 1)  $\lambda f + \mu g$  è una funzione olomorfa in  $E$  per ogni  $\lambda, \mu$  in  $\mathbf{C}$ ;
- 2)  $f g$  è una funzione olomorfa in  $E$ ;
- 3) se  $g(z) \neq 0$  in  $E$ , allora  $\frac{f(z)}{g(z)}$  è una funzione olomorfa in  $E$ ;
- 4) se  $\varphi : f(E) \rightarrow \mathbf{C}$  è una funzione olomorfa, allora  $h(z) = \varphi(f(z))$  è olomorfa in  $E$ , e si ha  $h'(z) = \varphi'(f(z)) f'(z)$ ;
- 5) se  $f'(z_0) \neq 0$ , allora  $f$  è invertibile in un intorno di  $w_0 = f(z_0)$ ; detta  $g$  la funzione inversa,  $g$  è olomorfa e si ha  $g'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$ ;
- 6) data  $u = \Re(f)$ , la funzione  $v = \Im(f)$  è determinata univocamente a meno di una costante;
- 7) le curve di livello  $u(x, y) = c_1$  e  $v(x, y) = c_2$  sono (al variare di  $c_1$  e  $c_2$  in  $\mathbf{R}$ ) due famiglie di curve ortogonali.

**Dimostrazione.** Le prime quattro proprietà hanno dimostrazione analoga alle corrispondenti proprietà delle funzioni  $C^1$  di variabile reale. Per la 5), si osservi che l'invertibilità locale è equivalente a dimostrare che, localmente, le funzioni  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  sono invertibili. Una condizione sufficiente è che sia diverso da zero il determinante

$$\begin{vmatrix} u_x(x_0, y_0) & u_y(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) & v_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = u_x(x_0, y_0) v_y(x_0, y_0) - u_y(x_0, y_0) v_x(x_0, y_0).$$

Per le equazioni di Cauchy-Riemann, si ha che

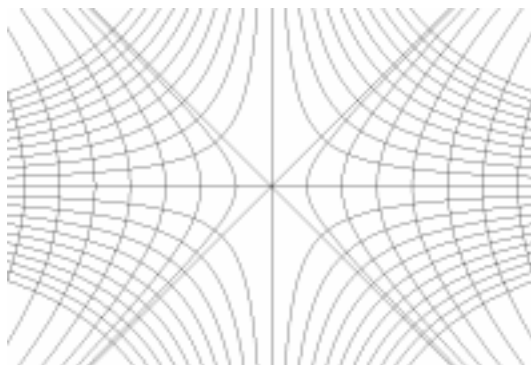
$$u_x(x_0, y_0) v_y(x_0, y_0) - u_y(x_0, y_0) v_x(x_0, y_0) = u_x^2(x_0, y_0) + v_x^2(x_0, y_0) = |f'(z_0)|^2,$$

e quindi  $f$  è localmente invertibile. La formula per la derivata di  $g$  si ottiene usando 4) e derivando  $g(f(z)) = z$ . Per le equazioni di Cauchy-Riemann, una volta assegnata  $u$  parte reale di una funzione olomorfa  $f$ , automaticamente sono assegnate le derivate  $v_x$  e  $v_y$  della parte immaginaria di  $f$ , ovvero il gradiente di  $v$ . Essendo  $E$  connesso, ciò equivale ad assegnare  $v$  a meno di una costante; abbiamo così dimostrato 6). Infine, dal momento che  $\nabla u = (u_x, u_y)$  e  $\nabla v = (v_x, v_y)$  sono due vettori paralleli alle normali alle curve di livello, se  $(x_0, y_0)$  appartiene alle curve  $u(x, y) = c_1$  e  $v(x, y) = c_2$ , si ha, per le equazioni di Cauchy-Riemann,

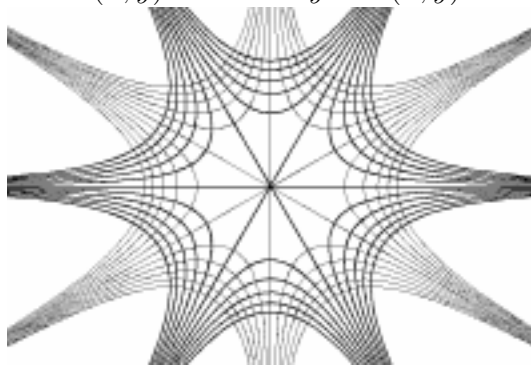
$$(\nabla u(x_0, y_0) | \nabla v(x_0, y_0)) = u_x(x_0, y_0) u_y(x_0, y_0) - u_x(x_0, y_0) u_y(x_0, y_0) = 0.$$

Le curve di livello hanno pertanto normali ortogonali e quindi, essendo curve contenute in  $\mathbf{R}^2$ , tangenti ortogonali. ■

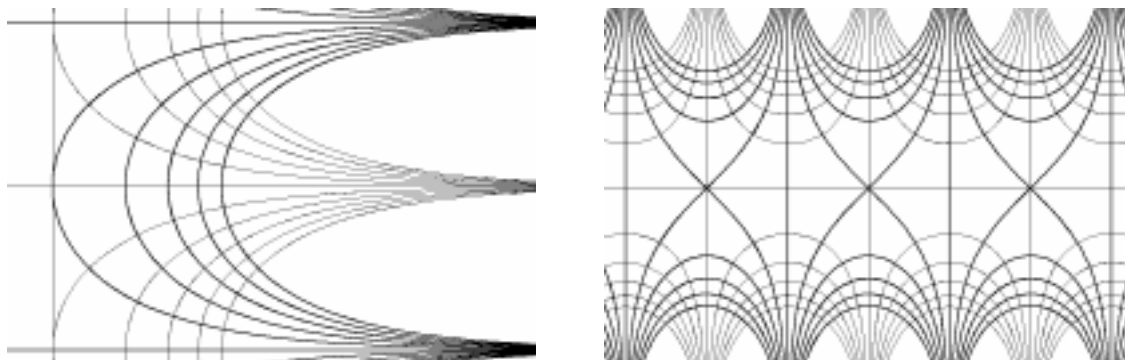
**Esempio 2.12** Se  $f(z) = z^2$ , allora  $u(x, y) = x^2 - y^2$  e  $v(x, y) = 2xy$ .



Se  $f(z) = z^3$ , allora  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$  e  $v(x, y) = 3x^2y - y^3$ .



Qui sotto, le curve di livello di  $e^z$  e  $\cos(z)$ .



**Osservazione 2.13** Un'altra importante proprietà delle funzioni olomorfe è la seguente. Sia  $w = f(z)$  una funzione olomorfa da  $E$  in  $\mathbf{C}$ , e sia  $z_0$  in  $E$  tale che  $f'(z_0) \neq 0$ . Sia  $\gamma_1$  una curva regolare passante per  $z_0$  (ovvero  $\gamma_1(t) = (x_1(t), y_1(t))$ , con  $x_1$  e  $y_1$  di classe  $C^1([-1, 1])$  e tali che  $(x_1(0), y_1(0)) = (x_0, y_0)$ ). Allora  $\Gamma_1(t) = f(\gamma_1(t))$  è una curva regolare passante per  $w_0 = f(z_0)$ : la regolarità di  $\Gamma_1$  segue osservando che  $\Gamma_1(t) = (u(x_1(t), y_1(t)), v(x_1(t), y_1(t)))$ , dove  $u$  e  $v$  sono la parte reale e la parte immaginaria di  $f$ . Sia  $f'(z_0) = R_0 e^{i\theta_0}$ , con  $R_0 \neq 0$  e  $0 \leq \theta_0 < 2\pi$ . Se ora ci muoviamo sulla curva  $\gamma_1$  tendendo a  $z_0$ , il punto  $f(\gamma_1(t))$  si muove su  $\Gamma_1$  e tende a  $w_0$ ; essendo per definizione

$$R_0 e^{i\theta_0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z},$$

ottenuto indipendentemente da come  $\Delta z$  tende a zero, si ottiene lo stesso limite prendendo  $\Delta z = \gamma_1(t) - z_0$  e facendo tendere  $t$  a zero; in questa maniera,  $f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$  è proprio  $\Gamma_1(t) - w_0$ . Diamo ora un'interpretazione geometrica di  $\gamma_1(t) - z_0$  e di  $\Gamma_1(t) - w_0$ ; scrivendoli in coordinate polari, si ha

$$\gamma_1(t) - z_0 = r(t) e^{i\varphi(t)}, \quad \Gamma_1(t) - w_0 = R(t) e^{i\Phi(t)},$$

e quindi

$$R_0 e^{i\theta_0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(t) e^{i\Phi(t)}}{r(t) e^{i\varphi(t)}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(t)}{r(t)} e^{i(\Phi(t) - \varphi(t))}.$$

In particolare,

$$R_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(t)}{r(t)}, \quad \theta_0 = \lim_{t \rightarrow 0} [\Phi(t) - \varphi(t)].$$

Geometricamente,  $\Phi(t)$  è l'angolo formato con l'asse  $x$  (del piano  $w$ ) dalla secante alla curva  $\Gamma_1$  nel punto  $\Gamma_1(t)$  rispetto a  $w_0$ , mentre  $\varphi(t)$  è l'angolo formato con l'asse  $x$  (del piano  $z$ ) dalla secante alla curva  $\gamma_1$  nel punto  $\gamma_1(t)$  rispetto a  $z_0$ ; quando  $t$  tende a zero, questi angoli tendono rispettivamente all'angolo  $\Phi_0$  formato con l'asse  $x$  (del piano  $w$ ) dalla tangente in  $w_0$  a  $\Gamma_1$  ed all'angolo  $\varphi_0$  formato con l'asse  $x$  (del piano  $z$ ) dalla tangente in  $z_0$  a  $\gamma_1$ . Pertanto,

$$\theta_0 = \Phi_0 - \varphi_0 .$$

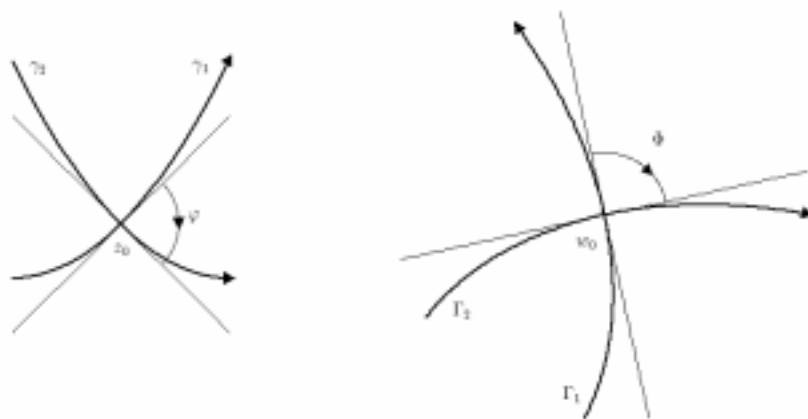
Sia ora  $\gamma_2$  un'altra curva regolare passante per  $z_0$  e sia  $\Gamma_2$  l'immagine di  $\gamma_2$  tramite  $f$ . Ripetendo lo stesso ragionamento, si trova

$$\theta_0 = \Psi_0 - \psi_0 ,$$

dove  $\Psi_0$  e  $\psi_0$  sono rispettivamente l'angolo formato con l'asse  $x$  (del piano  $w$ ) dalla tangente in  $w_0$  a  $\Gamma_2$  e l'angolo formato con l'asse  $x$  (del piano  $z$ ) dalla tangente in  $z_0$  a  $\gamma_2$ . Essendo  $\theta_0$  indipendente dalle curva, si ha  $\Phi_0 - \varphi_0 = \Psi_0 - \psi_0$ , ovvero

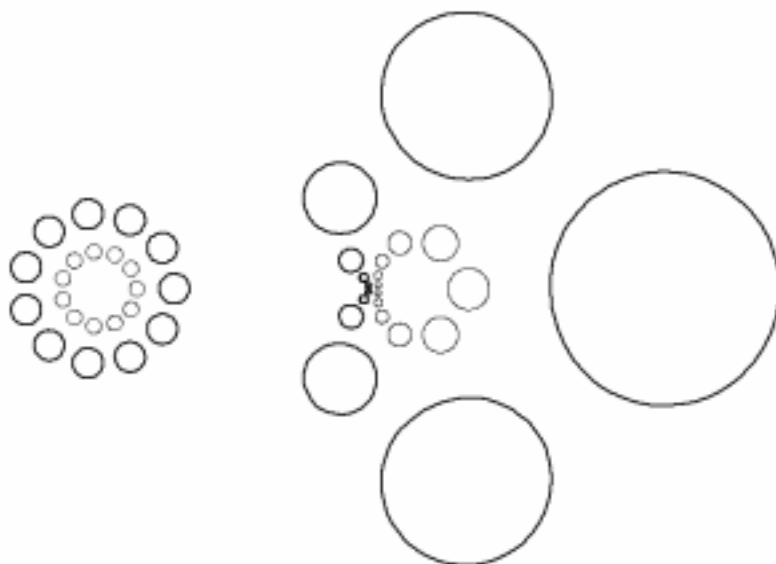
$$\Phi = \Phi_0 - \Psi_0 = \varphi_0 - \psi_0 = \varphi .$$

Dal momento che  $\Phi$  e  $\varphi$  sono rispettivamente l'angolo tra  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  e tra  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , ne segue che *una funzione olomorfa conserva gli angoli*.



La proprietà di conservare gli angoli di una funzione olomorfa

Infine, dal momento che  $R(t)$  è la lunghezza della secante alla curva  $\Gamma_1$  nel punto  $\Gamma_1(t)$  rispetto a  $w_0$ , e che  $r(t)$  è la lunghezza della secante alla curva  $\gamma_1$  nel punto  $\gamma_1(t)$ , il rapporto  $\frac{R(t)}{r(t)}$  misura quanto  $f$  “distorce” le lunghezze nella direzione data da  $\gamma_1$ . Facendo tendere  $t$  a zero, il rapporto  $\frac{R(t)}{r(t)}$  tende a  $R_0$ , che rappresenta quindi la distorsione infinitesima data da  $f$  nella direzione della tangente a  $\gamma_1$  in  $z_0$ . Dal momento che il valore  $R_0$  non dipende da  $\gamma_1$  (ovvero, non dipende dalla tangente a  $\gamma_1$  in  $z_0$ ), ne segue che *una funzione olomorfa distorce il piano complesso uniformemente in tutte le direzioni* (in maniera infinitesima). In altre parole, trasforma (localmente) cerchi in cerchi; il rapporto tra il raggio del cerchio di partenza e quello di arrivo è dato da  $R_0 = |f'(z_0)|$ .



Localmente i cerchi hanno come immagine dei cerchi

Un funzione da  $\mathbf{C}$  in  $\mathbf{C}$  che conservi gli angoli e che distorca uniformemente in tutte le direzioni si dice **funzione conforme**.

### 3 Integrali curvilinei

**Definizione 3.1** Una **curva regolare** a valori complessi è un’applicazione  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$  definita da  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ , con  $x, y : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  due funzioni  $C^1([a, b])$  con la proprietà che  $(x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$  per ogni  $t$  in  $[a, b]$ .

Una **curva regolare a tratti** è un'applicazione  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$  continua tale che esiste una partizione  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$  di  $[a, b]$  tale che  $\gamma$  è regolare se ristretta a  $(a_{i-1}, a_i)$  (con  $i$  da 1 a  $n$ ). Una curva regolare a tratti si dice **semplice** se  $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$  per ogni  $t_1$  e  $t_2$  in  $(a, b)$ . Una curva regolare a tratti si dice **chiusa** se  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

Sia ora  $E$  un dominio di  $\mathbf{C}$ ,  $f : E \rightarrow \mathbf{C}$  una funzione continua, e  $\gamma : [a, b] \rightarrow E$  una curva regolare. Definiamo l'**integrale curvilineo** di  $f$  lungo  $\gamma$  come l'integrale (secondo Riemann)

$$\int_{\gamma} f(z) = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

L'integrale appena scritto va inteso in senso complesso: se  $f(\gamma(t)) \gamma'(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$ , allora

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) = \int_a^b \alpha(t) dt + i \int_a^b \beta(t) dt.$$

La definizione di integrale curvilineo viene estesa in maniera naturale dalle curve regolari alle curve regolari a tratti come somma degli integrali di  $f$  lungo le  $n$  curve regolari che compongono  $\gamma$ .

Supponiamo ora che  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  e che  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ . Allora, sviluppando il prodotto,

$$\begin{aligned} f(\gamma(t)) \gamma'(t) &= [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))][x'(t) + iy'(t)] \\ &= u(x(t), y(t)) x'(t) - v(x(t), y(t)) y'(t) \\ &\quad + i[v(x(t), y(t)) x'(t) + u(x(t), y(t)) y'(t)]. \end{aligned}$$

Definiamo ora due forme differenziali continue su  $E$ :

$$\omega_1(x, y) = u(x, y) dx - v(x, y) dy, \quad \omega_2(x, y) = v(x, y) dx + u(x, y) dy.$$

È allora evidente dal calcolo appena effettuato, e dalla definizione di integrale di una forma differenziale lungo una curva (si veda l'Appendice, Definizione A.7), che si ha

$$\int_{\gamma} f(z) = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} \omega_1 + i \int_{\gamma} \omega_2 = \int_{\gamma} [\omega_1 + i\omega_2],$$

cosicché il calcolo dell'integrale curvilineo di una funzione continua da  $\mathbf{C}$  in  $\mathbf{C}$  viene ricondotto al calcolo dell'integrale lungo una curva di due forme differenziali. In questa maniera, l'integrale curvilineo eredita tutte le proprietà dell'integrale di una forma differenziale, che sono riassunte nel seguente teorema (si veda l'Appendice, Teorema A.9).

**Teorema 3.2** *Siano  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  due curve regolari a valori in  $E$ , e siano  $f_1, f_2 : E \rightarrow \mathbf{C}$  continue.*

- 1) *se  $\gamma_1 = -\gamma_2$  (ovvero è la curva con lo stesso sostegno, la stessa parametrizzazione, ma verso di percorrenza opposto), allora*

$$\int_{\gamma_1} f_1(z) = - \int_{\gamma_2} f_1(z);$$

- 2) *si ha*

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f_1(z) = \int_{\gamma_1} f_1(z) + \int_{\gamma_2} f_1(z);$$

- 3) *per ogni coppia di numeri complessi  $\lambda$  e  $\mu$ ,*

$$\int_{\gamma_1} [\lambda f_1(z) + \mu f_2(z)] = \lambda \int_{\gamma_1} f_1(z) + \mu \int_{\gamma_1} f_2(z);$$

- 4) *si ha*

$$\left| \int_{\gamma_1} f(z) \right| \leq \int_{\gamma_1} |f(z)| ds_{\gamma_1},$$

*dove con  $ds_{\gamma_1}$  si è indicata l'ascissa curvilinea su  $\gamma_1$ .*

- 5) *e  $\varphi : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  è una funzione olomorfa tale che  $\gamma_1 = \varphi(\gamma_2)$  con corrispondenza biunivoca, allora*

$$\int_{\gamma_1} f(z) = \int_{\gamma_2} f(\varphi(\zeta)) \varphi'(\zeta).$$

**Esempio 3.3** Sia  $f(z) = \frac{1}{z^n}$ , con  $n$  in  $\mathbf{Z}$ , e sia  $\gamma_R$  il cerchio di centro l'origine e raggio  $R$ . Allora  $f$  è continua in un intorno di  $\gamma_R$  (dal momento che  $f$  non è continua al più solo nell'origine). Parametrizzando  $\gamma_R$  come  $\gamma_R(\theta) = R e^{i\theta}$ , con  $\theta$  in  $[0, 2\pi]$ , si ha

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{z^n} = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-in\theta}}{R^{n-1}} i e^{i\theta} d\theta = \begin{cases} 2\pi i & \text{se } n = 1, \\ 0 & \text{se } n \neq 1. \end{cases}$$

Se, oltre ad essere continua, la funzione  $f$  è una funzione olomorfa, le due forme differenziali associate sono di classe  $C^1$ , e godono di una proprietà addizionale: essendo  $\omega_1 = u dx - v dy$  e  $\omega_2 = v dx + u dy$ , il fatto che  $u$  e  $v$  soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann implica immediatamente che sia  $\omega_1$  che  $\omega_2$  sono forme differenziali *chiuse* (si veda l'Appendice, Definizione A.14). Ricordando che un dominio  $E$  di  $\mathbf{C}$  si dice **semplicemente connesso** se ogni curva chiusa contenuta in  $E$  è frontiera di un insieme  $D$  tutto contenuto in  $E$ , e che le forme differenziali chiuse su un dominio semplicemente connesso sono esatte (Appendice, Teorema A.19), abbiamo subito il seguente teorema.

**Teorema 3.4** *Sia  $E$  un dominio semplicemente connesso di  $\mathbf{C}$ , e sia  $f : E \rightarrow \mathbf{C}$  olomorfa. Allora*

$$\int_{\gamma} f(z) = 0,$$

*per ogni curva chiusa regolare a tratti contenuta in  $E$ .*

Se la funzione  $f$ , oltre ad essere olomorfa in  $E$ , è continua fino alla frontiera di  $E$ , e se la frontiera di  $E$  è una curva chiusa regolare a tratti, lo stesso risultato continua a valere integrando sul bordo di  $E$ .

**Teorema 3.5** *Sia  $E$  un dominio semplicemente connesso di  $\mathbf{C}$ , la cui frontiera  $\partial E$  è una curva chiusa regolare a tratti, e sia  $f : \overline{E} \rightarrow \mathbf{C}$  olomorfa in  $E$  e continua su  $\overline{E}$ . Allora*

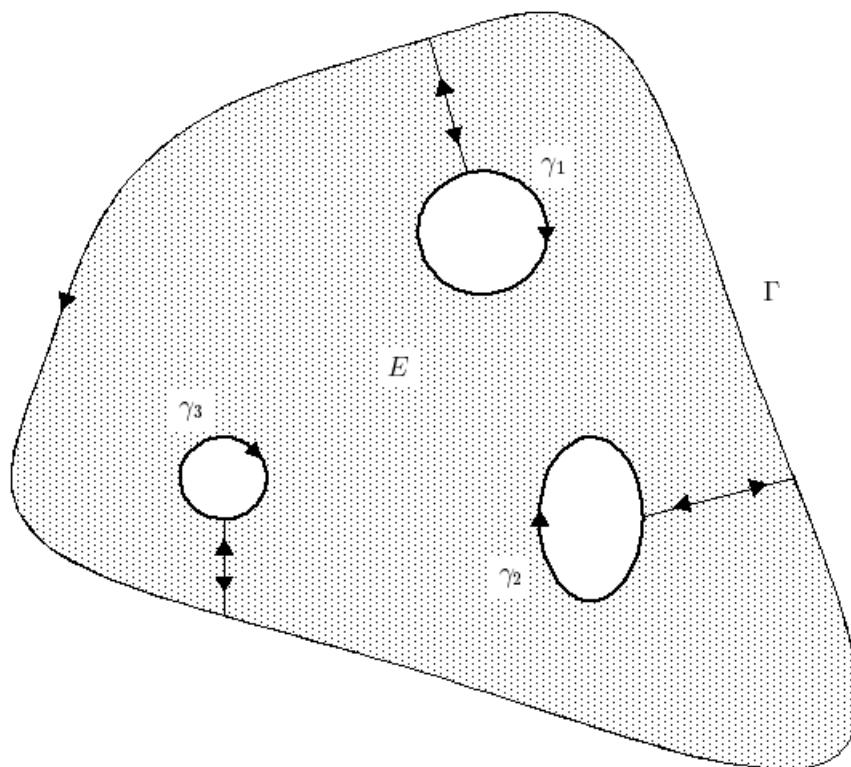
$$\int_{\partial E} f(z) = 0.$$

Per i due risultati precedenti non è necessario dare un orientamento alla curva  $\gamma$  (o alla frontiera di  $E$ ), perché comunque il risultato non cambia essendo 0. Se il dominio  $E$  non è semplicemente connesso, ma la sua frontiera è una curva regolare a tratti (unione di più curve chiuse), il risultato del teorema precedente continua a valere, a patto di percorrere la frontiera in un verso ben definito. Definendo il verso positivo di percorrenza di  $\partial E$  come quello tale da “lasciarsi l'insieme sulla sinistra”, si ha allora il seguente teorema.

**Teorema 3.6** Sia  $E$  un dominio di  $\mathbf{C}$ , la cui frontiera  $\partial E$  è una curva regolare a tratti, e sia  $f : \overline{E} \rightarrow \mathbf{C}$  olomorfa in  $E$  e continua su  $\overline{E}$ . Allora

$$\int_{+\partial E} f(z) = 0.$$

**Dimostrazione.** Sia  $\Gamma$  la curva chiusa che costituisce la frontiera “esterna” di  $E$ , e siano  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  le  $n$  curve chiuse frontiere degli  $n$  “buchi” di  $E$  (si veda la figura). È allora possibile costruire a partire da  $E$  un insieme semplicemente connesso  $D$  collegando gli  $n$  buchi a  $\Gamma$  (si veda ancora la figura).



Per il Teorema 3.5, l’integrale di  $f$  lungo  $\partial D$  è zero. D’altra parte, ogni “lato” aggiunto alla frontiera di  $E$  per costruire la frontiera di  $D$  viene percorso due volte, in direzioni opposte, e quindi (per la 1) del Teorema 3.2),

non dà contributo all'integrale. Ne risulta che

$$\int_{+\partial E} f(z) = 0,$$

perché le curve  $\Gamma$  e  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  sono percorse nel verso “corretto”. ■

Ricordiamo il seguente teorema sulle forme differenziali continue definite su domini di  $\mathbf{R}^2$  (Appendice, Teorema A.12).

**Teorema 3.7** *Sia  $\omega$  una forma differenziale continua definita su  $E$ , dominio di  $\mathbf{R}^2$ . Sono equivalenti:*

- i)  $\omega$  è una forma differenziale esatta;
- ii) se  $\varphi$  è una qualsiasi curva chiusa e regolare a tratti contenuta in  $E$ , allora

$$\int_{\varphi} \omega = 0;$$

- iii) Se  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  sono due curve regolari a tratti contenute in  $E$  tali che  $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$  e  $\varphi_1(b) = \varphi_2(b)$ , allora

$$\int_{\varphi_1} \omega = \int_{\varphi_2} \omega.$$

Se valgono la ii) o la iii) del teorema precedente, si ottiene una primitiva di  $\omega$  fissando  $(x_0, y_0)$  in  $E$  e definendo

$$f(x, y) = \int_{\varphi(x, y)} \omega,$$

dove  $\varphi(x, y)$  è una qualsiasi curva regolare a tratti contenuta in  $E$  e congiungente  $(x_0, y_0)$  a  $(x, y)$  (si veda la dimostrazione del Teorema A.12 nell'Appendice).

Dal momento che calcolare l'integrale curvilineo di una funzione da  $\mathbf{C}$  in  $\mathbf{C}$  è equivalente a calcolare l'integrale di due forme differenziali, abbiamo il seguente teorema.

**Teorema 3.8** Sia  $E$  un dominio in  $\mathbf{C}$ , e sia  $f : E \rightarrow \mathbf{C}$  una funzione continua tale che

$$\int_{\gamma} f(z) = 0,$$

per ogni curva  $\gamma$  chiusa e regolare a tratti contenuta in  $E$ . Allora esiste  $F : E \rightarrow \mathbf{C}$  olomorfa tale che  $F'(z) = f(z)$  per ogni  $z$  in  $E$ . Viceversa, se esiste  $F$  olomorfa in  $E$  tale che  $F'(z) = f(z)$  per ogni  $z$  in  $E$ , allora

$$\int_{\gamma} f(z) = 0,$$

per ogni curva  $\gamma$  chiusa e regolare a tratti contenuta in  $E$ .

La funzione  $F$  viene detta **primitiva** di  $f$ .

**Dimostrazione.** Siano  $\omega_1$  e  $\omega_2$  le forme differenziali continue associate ad  $f$ . L'ipotesi su  $f$  implica che

$$\int_{\gamma} \omega_1 = \int_{\gamma} \omega_2 = 0,$$

per ogni curva  $\gamma$  chiusa e regolare a tratti contenuta in  $E$ . Per il Teorema 3.7, sia  $\omega_1$  che  $\omega_2$  sono esatte, e pertanto esistono  $U : E \rightarrow \mathbf{R}$  e  $V : E \rightarrow \mathbf{R}$  di classe  $C^1$  e tali che  $dU = \omega_1$  e  $dV = \omega_2$ . Inoltre,

$$U(x, y) = \int_{\varphi(x, y)} \omega_1, \quad V(x, y) = \int_{\varphi(x, y)} \omega_2,$$

dove  $\varphi(x, y)$  è una qualsiasi curva regolare a tratti congiungente un fissato punto  $(x_0, y_0)$  di  $E$  con  $(x, y)$ . Definiamo

$$F(z) = U(x, y) + iV(x, y) = \int_{\varphi(x, y)} [\omega_1 + i\omega_2] = \int_{\varphi(x, y)} f(z),$$

e dimostriamo che  $F$  è olomorfa; essendo  $U$  e  $V$  di classe  $C^1$  su  $E$  (per costruzione), affinché  $F$  sia olomorfa  $U$  e  $V$  devono verificare le equazioni di Cauchy-Riemann. Ricordando che, se  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $\omega_1 = u dx - v dy$  e  $\omega_2 = v dx + u dy$ , si ha  $U_x = u$ ,  $U_y = -v$ ,  $V_x = v$  e  $V_y = u$ , da cui  $U_x = V_y$  e  $U_y = -V_x$ . Pertanto,  $F$  è olomorfa. Inoltre,

$$F'(z) = U_x(x, y) + iV_x(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = f(z).$$

Per dimostrare la seconda parte del teorema, supponiamo che esista  $F$  olomorfa in  $E$  tale che  $F'(z) = f(z)$  per ogni  $z$  in  $E$ . Se  $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ , è facile dimostrare, a partire dalle equazioni di Cauchy-Riemann, che le due forme differenziali  $\omega_1$  e  $\omega_2$  associate ad  $f$  sono esatte. Pertanto, per il Teorema 3.7,

$$\int_{\gamma} f(z) = \int_{\gamma} [\omega_1 + i\omega_2] = 0,$$

e quindi la tesi. ■

**Osservazione 3.9** Dal teorema precedente segue che una funzione continua definita su  $E$  ammette primitive se e solo se il suo integrale su una qualsiasi curva chiusa e regolare a tratti contenuta in  $E$  è nullo. È evidente la differenza con il caso delle funzioni continue su  $\mathbf{R}$ , che ammettono primitive senza imporre ulteriori condizioni. Tale differenza è dovuta al fatto che le primitive di  $f$  non sono solo “derivabili” (come le primitive di una funzione di variabile reale), ma anche olomorfe: devono — ad esempio — valere le equazioni di Cauchy-Riemann.

Mettendo insieme il Teorema 3.4 con il Teorema 3.8 abbiamo che ogni funzione olomorfa ammette primitive.

**Teorema 3.10** *Sia  $E$  un dominio semplicemente connesso di  $\mathbf{C}$ , e sia  $f : E \rightarrow \mathbf{C}$  una funzione olomorfa. Allora esiste  $F : E \rightarrow \mathbf{C}$  olomorfa tale che  $F'(z) = f(z)$  per ogni  $z$  in  $E$ .*

**Esempio 3.11** Sia  $f(z) = \frac{1}{z}$ . La funzione  $f$  è olomorfa in  $D = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ , cosicché è ben definito l'integrale di  $f(z)$  lungo una qualsiasi curva  $\gamma$  non passante per l'origine. Se  $E$  è un dominio semplicemente connesso di  $\mathbf{C}$  non contenente l'origine, allora l'integrale di  $f$  lungo una qualsiasi curva  $\gamma$  non dipende dalla curva, ma solo dagli estremi. Scegliamo (si noti che è una scelta arbitraria!)  $E = \mathbf{C} \setminus S$ , dove  $S$  è la semiretta  $(-\infty, 0]$  contenuta nell'asse reale; in altre parole, “tagliamo” il piano complesso lungo l'asse reale negativo. Così facendo,  $E$  è un dominio semplicemente connesso di  $\mathbf{C}$  sul quale  $f(z)$  è olomorfa. Fissiamo  $z_0 = 1$  e definiamo

$$F(z) = \int_{\varphi_z} \frac{1}{z},$$

dove  $\varphi_z$  è il segmento che congiunge  $z_0$  e  $z$  (tale curva è tutta contenuta in  $E$ ). Se  $z$  è un numero reale positivo (dunque un punto di  $E$ ), allora

$$\int_{\varphi_x} \frac{1}{z} = \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln(x),$$

e quindi  $F(z)$  coincide con  $\ln(x)$  su  $(0, +\infty)$ . Dal momento che  $F'(z) = \frac{1}{z}$  (per costruzione), per analogia con il caso reale definiamo

$$\ln(z) = F(z) = \int_{\varphi_z} \frac{1}{z},$$

per ogni  $z$  in  $E$ .

La scelta (arbitraria) di  $E$  non può essere migliorata. Infatti, essendo  $\mathbf{C} \setminus \{0\}$  un connesso, se l'integrale di  $f$  lungo una qualsiasi curva chiusa e regolare a tratti contenuta in  $E$  fosse zero, allora  $f$  avrebbe una primitiva definita su tutto  $\mathbf{C}$  privato dell'origine. Dal momento che (si veda l'Esempio 3.3) si ha

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} = 2\pi i,$$

se  $\gamma$  è una qualsiasi circonferenza centrata nell'origine,  $f$  non ammette primitive in  $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ .

Se scriviamo  $f(z) = \frac{1}{z}$  come parte reale e come parte immaginaria, si ha

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

e pertanto le due forme associate a  $f$  sono

$$\omega_1(x, y) = \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}, \quad \omega_2(x, y) = \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}.$$

Si vede facilmente che la prima è esatta su  $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , e che una sua primitiva è data da  $\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = \ln(\rho)$ , mentre  $\omega_2$  non è esatta su  $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  dal momento che il suo integrale lungo la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 vale  $2\pi$ . D'altra parte,  $\omega_2$  è esatta su  $E$ , ovvero su  $\mathbf{R}^2$  privato dell'asse  $x$  negativo. È inoltre facile vedere che la funzione  $\theta$  è una primitiva di  $\omega_2$  su tale insieme. Pertanto, se  $z = \rho e^{i\theta}$ , con  $-\pi < \theta < \pi$  allora

$$F(z) = \ln(z) = \ln(\rho) + i\theta,$$

è una possibile definizione di  $\ln(z)$ ; se, invece di considerare  $\mathbf{C}$  privato del semiasse negativo, avessimo considerato  $\mathbf{C}$  privato di una semiretta del tipo  $\arg(z) = \theta_0$ , avremmo ottenuto un'altra primitiva di  $\frac{1}{z}$ , nota a meno di un'altra costante.

## 4 La formula di Cauchy

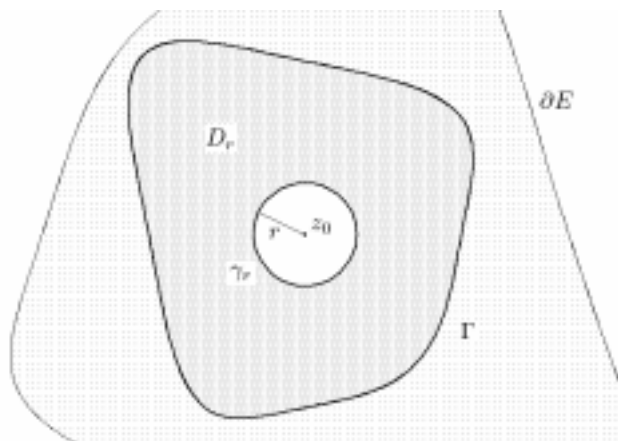
Abbiamo già visto in precedenza come le funzioni olomorfe siano abbastanza “particolari”: una funzione olomorfa è più di “una coppia di funzioni differenziabili” (perché devono valere le equazioni di Cauchy-Riemann), ed è più di “una funzione integrabile” (perché il suo integrale lungo una qualsiasi curva chiusa è nullo). Nel prossimo teorema, dovuto a Cauchy, dimostreremo che una funzione olomorfa è “molto” particolare.

**Teorema 4.1** *Sia  $E$  un dominio semplicemente connesso di  $\mathbf{C}$ , e sia  $f : E \rightarrow \mathbf{C}$  olomorfa in  $E$ . Sia  $\Gamma$  una curva chiusa e regolare a tratti contenuta in  $E$ , e sia  $D \subset E$  un aperto tale che  $\Gamma = +\partial D$ . Sia  $z_0$  in  $D$ . Allora si ha*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}. \quad (4.1)$$

La (4.1) prende il nome di **formula di Cauchy**.

**Dimostrazione.** Siano  $\Gamma$ ,  $D$  e  $z_0$  come nell'enunciato, e sia  $r > 0$  tale che il cerchio di centro  $z_0$  e raggio  $r$  sia tutto contenuto in  $D$  (si veda la figura). Definiamo  $D_r = D \setminus \overline{B_r(z_0)}$ , cosicché  $D_r$  è un dominio di  $\mathbf{C}$ .



La funzione

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{z - z_0},$$

è olomorfa in  $D_r$  (dal momento che  $z_0$  non appartiene a  $D_r$ ), ed è continua su  $\overline{D_r}$  (perché  $f$  è continua su  $D$ , essendolo su  $E$ ). Per il Teorema 3.6 si ha allora

$$\int_{+\partial D_r} \varphi(z) = \int_{+\partial D_r} \frac{f(z)}{z - z_0} = 0.$$

Si ha  $+\partial D_r = (+\Gamma) \cup (-\gamma_r)$ , dove  $\gamma_r = +\partial B_r(z_0)$ . Pertanto,

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} = \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0}.$$

Si noti che l'integrale su  $\gamma_r$  è indipendente da  $r$  dal momento che è uguale ad una quantità (l'integrale su  $\Gamma$  di  $\varphi(z)$ ) che non dipende da  $r$ . Parametrizzando  $\gamma_r$  come  $z_0 + r e^{i\theta}$ , con  $\theta$  in  $[0, 2\pi]$ , otteniamo

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r e^{i\theta})}{r e^{i\theta}} r i e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta.$$

Se facciamo tendere  $r$  a zero, allora  $f(z_0 + r e^{i\theta})$  converge uniformemente a  $f(z_0)$  (perché  $f$ , essendo continua su  $\overline{D}$ , è uniformemente continua), e pertanto

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} = \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} = i \int_0^{2\pi} f(z_0) d\theta = 2\pi i f(z_0),$$

da cui segue la tesi. ■

Se  $E$  è tale che  $\partial E$  è regolare a tratti, e se  $f$  è continua su  $\overline{E}$ , allora il teorema precedente vale anche prendendo  $\Gamma = +\partial E$ .

**Teorema 4.2** *Sia  $E$  un dominio semplicemente connesso di  $\mathbf{C}$  tale che  $\partial E$  sia regolare a tratti, e sia  $f : E \rightarrow \mathbf{C}$  olomorfa in  $E$  e continua in  $\overline{E}$ . Allora per ogni  $z_0$  in  $E$  si ha*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial E} \frac{f(z)}{z - z_0}. \quad (4.2)$$

**Osservazione 4.3** Dall'enunciato del Teorema di Cauchy ci si rende immediatamente conto della particolarità di una funzione olomorfa. Il valore di  $f$  in un punto  $z_0$  si trova calcolando l'integrale dei valori assunti da  $f$  su una curva  $\Gamma$  che "gira" intorno a  $z_0$ , ma che può essere lontanissima da  $z_0$ . In altre parole, c'è un legame molto forte tra i valori assunti da una funzione olomorfa in un dominio ed i valori assunti dalla stessa funzione sulla frontiera del dominio, nel senso che la conoscenza del valore di  $f$  sulla frontiera di  $E$  dice — automaticamente — quanto deve valere  $f$  all'interno di  $E$ .

I prossimi risultati mostreranno come dalla formula di Cauchy discendano ulteriori proprietà — molto forti — delle funzioni olomorfe.

**Teorema 4.4 (Principio di massimo modulo)** *Sia  $E$  un dominio limitato del piano complesso e sia  $f : E \rightarrow \mathbf{C}$  una funzione olomorfa in  $E$  e continua in  $\bar{E}$ . Allora o  $|f(z)|$  è costante in  $E$ , oppure*

$$\max_{\bar{E}} |f(z)| = \max_{\partial E} |f(z)|.$$

**Dimostrazione.** Sia  $M = \max_{\bar{E}} |f(z)|$ ; essendo  $|f(z)|$  continua su  $\bar{E}$ , che è compatto, tale valore massimo esiste. Definiamo

$$E_1 = \{z \in E : |f(z)| = M\}, \quad E_2 = \{z \in E : |f(z)| < M\}.$$

L'insieme  $E_2$  è evidentemente un aperto, essendo ottenuto come controimmagine di  $(-\infty, M)$  tramite la funzione continua  $|f(z)|$ . Dimostriamo ora che, se  $E_1$  non è vuoto, allora  $E_1$  è un aperto. Sia  $z_0$  in  $E_1$ . Siccome  $E_1$  è contenuto in  $E$ , che è aperto, esiste  $r_0 > 0$  tale che  $B_r(z_0) \subset E$  per ogni  $r \leq r_0$ . Sia allora  $r \leq r_0$  e sia  $\gamma_r = \partial B_r(z_0)$ . Per la formula di Cauchy si ha

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0}.$$

Passando ai moduli, e ricordando che  $|f(z_0)| = M$  e che  $|f(z)| \leq M$  per ogni  $z$  in  $\gamma_r$ , si ha

$$M = |f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} \frac{|f(z)|}{r} ds_{\gamma_r} \leq \frac{M}{2\pi r} \int_{\gamma_r} ds_{\gamma_r} = M.$$

Pertanto,

$$\frac{1}{2\pi r} \int_{\gamma_r} |f(z)| ds_{\gamma_r} = M,$$

e quindi

$$\int_{\gamma_r} [M - |f(z)|] ds_{\gamma_r} = 0.$$

Siccome  $M - |f(z)|$  è una funzione continua e non negativa, deve necessariamente essere  $|f(z)| = M$  per ogni  $z$  in  $\gamma_r$ . Facendo variare  $r$  tra 0 e  $r_0$ , si trova che  $|f(z)| = M$  per ogni  $z$  in  $\gamma_r$ , per ogni  $r \leq r_0$ ; pertanto,  $|f(z)| = M$  per ogni  $z$  in  $B_{r_0}(z_0)$ , da cui segue che  $B_{r_0}(z_0) \subset E_1$ . In definitiva, se  $E_1$  è non vuoto,  $E_1$  è aperto.

Dal momento che  $E = E_1 \cup E_2$ , e l'unione è disgiunta, essendo  $E$  connesso uno tra  $E_1$  ed  $E_2$  deve essere vuoto. Se  $E_1$  è vuoto, allora  $E_2 = E$  e quindi  $|f(z)| < M$  per ogni  $z$  in  $E$ :  $M$  è allora assunto sulla frontiera. Se, invece,  $E_2$  è vuoto, allora  $E_1 = E$  e quindi  $|f(z)| = M$  è costante su tutto  $E$ . ■

**Osservazione 4.5** Se  $|f(z)|$  è costante in  $E$ , allora è costante anche l'argomento di  $f$ , come si deduce dalle (2.6). In altre parole, se  $f$  è una funzione olomorfa costante in modulo, allora  $f$  è costante. Inoltre, in entrambi i casi previsti dal precedente teorema, si ha

$$\max_{\overline{E}} |f(z)| = \max_{\partial E} |f(z)|.$$

Prima di enunciare la seconda conseguenza della formula di Cauchy, ricordiamo come si comportano rispetto a continuità e derivabilità gli integrali dipendenti da un parametro.

**Teorema 4.6** Sia  $\varphi : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  una funzione tale che:

- 1)  $\varphi(\cdot, \zeta)$  è olomorfa in  $\mathbf{C}$  per ogni  $\zeta$  in  $\mathbf{C}$ ;
- 2)  $\varphi(z, \zeta)$  è continua in  $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ ;
- 3)  $\varphi_z(z, \zeta)$  è continua in  $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ .

Sia  $\gamma$  una curva regolare a tratti e sia

$$F(z) = \int_{\gamma} \varphi(z, \zeta) .$$

Allora  $F$  è olomorfa in  $\mathbf{C}$  e si ha

$$F'(z) = \int_{\gamma} \varphi_z(z, \zeta) .$$

**Dimostrazione.** Sia  $\varphi(z, \zeta) = u(x, y, \xi, \eta) + i v(x, y, \xi, \eta)$ , e siano  $\omega_1(\xi, \eta)$  e  $\omega_2(\xi, \eta)$  le due forme differenziali continue associate a  $\varphi(z, \cdot)$ :

$$\omega_1(\xi, \eta) = u(x, y, \xi, \eta) d\xi - v(x, y, \xi, \eta) d\eta ,$$

$$\omega_2(\xi, \eta) = v(x, y, \xi, \eta) d\xi + u(x, y, \xi, \eta) d\eta .$$

Allora  $F(z) = U(x, y) + i V(x, y)$  dove

$$U(x, y) = \int_{\gamma} \omega_1 = \int_{\gamma} [u(x, y, \xi, \eta) d\xi - v(x, y, \xi, \eta) d\eta] ,$$

e

$$V(x, y) = \int_{\gamma} \omega_2 = \int_{\gamma} [v(x, y, \xi, \eta) d\xi + u(x, y, \xi, \eta) d\eta] .$$

Siccome  $u(\cdot, \cdot, \xi, \eta)$  e  $v(\cdot, \cdot, \xi, \eta)$  sono funzioni  $C^1(\mathbf{R}^2)$ , è possibile derivare  $U$  e  $V$ , ottenendo

$$U_x(x, y) = \int_{\gamma} [u_x(x, y, \xi, \eta) d\xi - v_x(x, y, \xi, \eta) d\eta] ,$$

$$U_y(x, y) = \int_{\gamma} [u_y(x, y, \xi, \eta) d\xi - v_y(x, y, \xi, \eta) d\eta] ,$$

e

$$V_x(x, y) = \int_{\gamma} [v_x(x, y, \xi, \eta) d\xi + u_x(x, y, \xi, \eta) d\eta] ,$$

$$V_y(x, y) = \int_{\gamma} [v_y(x, y, \xi, \eta) d\xi + u_y(x, y, \xi, \eta) d\eta] .$$

Ricordando che  $u_x(x, y, \xi, \eta) = v_y(x, y, \xi, \eta)$  e  $u_y(x, y, \xi, \eta) = -v_x(x, y, \xi, \eta)$ , si ottiene facilmente che  $U_x(x, y) = V_y(x, y)$  e che  $U_y(x, y) = -V_x(x, y)$ . Pertanto,  $U$  e  $V$  sono  $C^1(\mathbf{R}^2)$  e soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann, il che implica che  $F$  è olomorfa. Inoltre, essendo

$$\varphi_z(z, \zeta) = u_x(x, y, \xi, \eta) + i v_x(x, y, \xi, \eta) ,$$

le forme differenziali associate a  $\varphi_z$  sono  $\tilde{\omega}_1 = u_x d\xi - v_x d\eta$  e  $\tilde{\omega}_2 = v_x d\xi + u_x d\eta$ , e quindi si ha

$$U_x(x, y) = \int_{\gamma} \tilde{\omega}_1, \quad V_x(x, y) = \int_{\gamma} \tilde{\omega}_2,$$

da cui segue

$$F'(z) = U_x(x, y) + i V_x(x, y) = \int_{\gamma} [\tilde{\omega}_1 + i \tilde{\omega}_2] = \int_{\gamma} \varphi_z(z, \zeta),$$

come volevasi dimostrare. ■

**Osservazione 4.7** Si noti che per dimostrare il teorema precedente non si è usato mai il fatto che  $\varphi$  fosse continua e olomorfa su  $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ ; è infatti sufficiente che  $\varphi(z, \zeta)$  sia continua in  $E \times \gamma$ , con  $E$  un dominio del piano complesso, che  $\varphi(z, \zeta)$  sia olomorfa in  $E$  per  $\zeta$  in  $\gamma$ , e che  $\varphi_z(z, \zeta)$  sia continua in  $E$  per  $\zeta$  in  $\gamma$ .

Una volta dimostrato che si può derivare sotto il segno di integrale, ed ottenere una funzione olomorfa, possiamo dimostrare che le funzioni olomorfe ammettono derivate di ogni ordine.

**Teorema 4.8** Sia  $E$  un dominio del piano complesso la cui frontiera  $\partial E$  sia una curva regolare a tratti, e sia  $f : E \rightarrow \mathbf{C}$  olomorfa in  $E$  e continua in  $\overline{E}$ . Allora per ogni  $k$  in  $\mathbf{N}$  esiste la derivata  $k$ -sima di  $f$  in  $E$ , e si ha per ogni  $z_0$  in  $E$

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{+\partial E} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}. \quad (4.3)$$

Inoltre,  $f^{(k)}$  è una funzione olomorfa per ogni  $k$ .

**Dimostrazione.** Sia  $z_0$  in  $E$ ; allora, essendo  $E$  aperto, esiste  $\delta > 0$  tale che  $B_{\delta}(z_0) \subset E$ . Consideriamo, per  $z$  in  $\partial E$  e  $w$  in  $B_{\delta}(z_0)$ , la funzione

$$\varphi(w, z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{f(z)}{z - w}.$$

Essendo  $\varphi$  continua rispetto a  $z$  e olomorfa rispetto a  $w$ , ed inoltre tale che

$$\varphi_w(w, z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{f(z)}{(z - w)^2},$$

è continua in  $w$  e  $z$ , possiamo applicare il Teorema 4.6 (o meglio, l'Osservazione 4.7) e ottenere che, detta

$$F(w) = \int_{+\partial E} \varphi(w, z),$$

si ha che  $F(w)$  è olomorfa e che

$$F'(w) = \int_{+\partial E} \varphi_w(w, z).$$

Per la formula di Cauchy,  $F(w)$  non è altro che  $f(w)$ , e pertanto  $f$  è olomorfa (non una grande scoperta) e si ha

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial E} \frac{f(z)}{(z-w)^2}.$$

In particolare, per ogni  $z_0$  in  $E$  si ha

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial E} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}.$$

Se ora definiamo

$$\varphi(w, z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{f(z)}{(z-w)^2},$$

ci rendiamo subito conto che lo stesso ragionamento svolto in precedenza si può ripetere; in altre parole,  $f'(w)$  è *olomorfa* e si ha, per ogni  $z_0$  in  $E$ ,

$$f''(z_0) = \frac{2}{2\pi i} \int_{+\partial E} \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}.$$

Iterando il ragionamento  $k$  volte si trova la (4.3). ■

**Osservazione 4.9** Se ce ne fosse ancora bisogno, il teorema precedente motiva una volta di più la profonda differenza che passa tra le funzioni  $C^1$  in  $\mathbf{R}$  e le funzioni olomorfe: è sufficiente che la funzione abbia la derivata prima continua, per avere automaticamente che la funzione è derivabile infinite volte. Inoltre, ognuna delle derivate successive alla prima si può rappresentare come integrale dei valori della funzione  $f$  sulla frontiera del dominio su cui  $f$  è olomorfa.

Dal teorema precedente discendono altri risultati importanti sulle funzioni olomorfe.

**Teorema 4.10 (Morera)** Sia  $E$  un dominio semplicemente connesso del piano complesso, e sia  $f : E \rightarrow \mathbf{C}$  continua in  $E$  e tale che

$$\int_{\gamma} f(z) = 0,$$

per ogni curva  $\gamma$  chiusa e regolare a tratti contenuta in  $E$ . Allora  $f$  è olomorfa.

**Dimostrazione.** Se  $f$  è come nelle ipotesi del teorema, allora esiste una primitiva  $F$  di  $f$ , con  $F$  olomorfa (Teorema 3.8). Pertanto,  $f(z) = F'(z)$  è olomorfa come derivata di una funzione olomorfa. ■

**Osservazione 4.11** In base al teorema precedente, una funzione continua ammette primitive in  $\mathbf{C}$  se e solo se è olomorfa; il che vuol dire che per avere primitive bisogna essere “almeno”  $C^\infty$ . Ancora una volta, una differenza marcata con il caso reale.

**Teorema 4.12 (Liouville)** Sia  $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  olomorfa, e supponiamo esista  $M \geq 0$  tale che  $|f(z)| \leq M$  per ogni  $z$  in  $\mathbf{C}$ . Allora  $f$  è costante.

**Dimostrazione.** Per (4.3) si ha

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2},$$

dove  $\gamma_R$  è la circonferenza di centro  $z_0$  e raggio  $R$ . Pertanto,

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_R} \frac{|f(z)|}{R^2} ds_{\gamma_R} \leq \frac{M}{2\pi R^2} \int_{\gamma_R} ds_{\gamma_R} = \frac{M}{R}.$$

Dal momento che la formula precedente è valida per ogni  $R > 0$ , facendo tendere  $R$  ad infinito si trova  $f'(z_0) = 0$ . Essendo  $z_0$  generico, si ottiene  $f'(z) \equiv 0$  in  $\mathbf{C}$ , e quindi  $f$  costante. ■

**Osservazione 4.13** Se, invece di essere limitato,  $|f(z)|$  cresce al più in maniera polinomiale, ovvero se esiste  $k$  in  $\mathbf{N}$  e  $M > 0$  tale che  $|f(z)| \leq M(1 + |z|)^k$ , allora  $f$  è un polinomio di grado al più  $k$ . Per dimostrare questo fatto, è sufficiente applicare (4.3) per  $k + 1$ , ottenendo  $f^{(k+1)}(z) \equiv 0$ .

**Osservazione 4.14** Essendo  $\cos(z)$  e  $\sin(z)$  olomorfe su  $\mathbf{C}$  e non costanti, esistono punti  $z$  del piano complesso per i quali  $|\cos(z)| > 1$  (o  $|\sin(z)| > 1$ ).

**Teorema 4.15 (Teorema fondamentale dell'algebra)** Sia  $P$  un polinomio di grado  $n \geq 1$ . Allora esiste  $z_0$  in  $\mathbf{C}$  tale che  $P(z_0) = 0$ .

**Dimostrazione.** Sia

$$P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k = a_n z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k,$$

con  $a_n \neq 0$ . Allora

$$|P(z)| = \left| a_n z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| \geq |a_n| |z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |z|^k = g(|z|).$$

La funzione  $g$  è un polinomio di grado  $n$  in  $|z|$ , ed ha il coefficiente del termine di grado massimo positivo. Pertanto,

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} g(|z|) = \lim_{|z| \rightarrow +\infty} |P(z)| = +\infty.$$

Esiste allora  $R_1 > 0$  tale che  $|P(z)| \geq 1$  per ogni  $z$  tale che  $|z| > R_1$ .

Supponiamo ora per assurdo che  $P(z) \neq 0$  per ogni  $z$  in  $\mathbf{C}$ . È allora olomorfa in  $\mathbf{C}$  la funzione  $\varphi(z) = \frac{1}{P(z)}$ . Se  $|z| > R_1$ , essendo  $|P(z)| \geq 1$ , si ha  $|\varphi(z)| \leq 1$ . Inoltre, essendo  $\varphi$  continua e  $\overline{B_{R_1}(0)}$  compatto, esiste  $M \geq 0$  tale che  $|\varphi(z)| \leq M$  per ogni  $z$  tale che  $|z| \leq R_1$ . In definitiva, esiste  $M' \geq 0$  ( $M' = \max(1, M)$ ) tale che  $|\varphi(z)| \leq M'$  su  $\mathbf{C}$ . Per il teorema di Liouville,  $\varphi$  è costante. Ma se  $\varphi$  è costante, anche  $P(z)$  è costante, il che non può essere essendo  $P$  un polinomio di grado maggiore di 1. ■

## 5 Successioni e serie di funzioni

**Definizione 5.1** Sia  $E$  un dominio del piano complesso, e sia  $f_n : E \rightarrow \mathbf{C}$  una successione di funzioni. Si dice che  $\{f_n\}$  converge **puntualmente** in  $E$  a  $f$  se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(z) = f(z), \quad \forall z \in E.$$

Si dice che  $\{f_n\}$  converge **uniformemente** a  $f$  in  $E$  se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_E |f_n(z) - f(z)| = 0.$$

Scrivendo  $f_n(z) = u_n(x, y) + i v_n(x, y)$  e  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  si verifica facilmente che  $f_n$  converge puntualmente ad  $f$  se e solo se  $u_n$  converge puntualmente a  $u$  e  $v_n$  converge puntualmente a  $v$ , mentre  $f_n$  converge uniformemente a  $f$  se e solo se  $u_n$  converge uniformemente a  $u$  e  $v_n$  converge uniformemente a  $v$ . Dal momento che una successione di funzioni limitate di variabile reale converge uniformemente se e solo se è di Cauchy, si ha che  $f_n$  converge uniformemente a  $f$  se e solo se esiste  $M_n \geq 0$  tale che  $|f_n(z)| \leq M_n$  per ogni  $z$  in  $E$  e per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $n_\varepsilon$  in  $\mathbf{N}$  tale che

$$\sup_E |f_n(z) - f_m(z)| \leq \varepsilon, \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon.$$

Inoltre, dal momento che la continuità si conserva per passaggio al limite uniforme, se  $f_n$  è continua per ogni  $n$ , allora  $u_n$  e  $v_n$  sono continue per ogni  $n$ , e quindi lo sono  $u$  e  $v$  (loro limiti uniformi) e, in definitiva,  $f$ . In altre parole, se  $f_n$  è una successione di funzioni continue convergente uniformemente ad  $f$ , allora  $f$  è continua.

Come già per gli integrali di funzioni di variabile reale su insiemi limitati, la convergenza uniforme si comporta bene rispetto al passaggio al limite sotto il segno di integrale.

**Teorema 5.2** *Sia  $E$  un dominio di  $\mathbf{C}$ , e sia  $f_n : E \rightarrow \mathbf{C}$  una successione di funzioni continue che converge uniformemente ad  $f$ . Sia  $\gamma$  una curva regolare a tratti di lunghezza finita contenuta in  $E$ . Allora*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_\gamma f_n(z) = \int_\gamma f(z).$$

**Dimostrazione.** Si ha

$$\begin{aligned} \left| \int_\gamma f_n(z) - \int_\gamma f(z) \right| &= \left| \int_\gamma [f_n(z) - f(z)] \right| \leq \int_\gamma |f_n(z) - f(z)| ds_\gamma \\ &\leq L(\gamma) \sup_\gamma |f_n(z) - f(z)| \leq L(\gamma) \sup_E |f_n(z) - f(z)|, \end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

In virtù del teorema precedente e del teorema di Morera, possiamo ricavare una ulteriore proprietà delle funzioni olomorfe.

**Teorema 5.3 (Weierstrass)** *Sia  $E$  un dominio del piano complesso, e sia  $f_n : E \rightarrow \mathbf{C}$  una successione di funzioni olomorfe in  $E$  che converge uniformemente ad una funzione  $f$  in ogni sottoinsieme chiuso  $\overline{D}$  contenuto in  $E$ . Allora*

- 1)  $f$  è olomorfa in  $E$ ;
- 2)  $f_n^{(k)}$  converge puntualmente ad  $f^{(k)}$  in  $E$ ;
- 3)  $f_n^{(k)}$  converge uniformemente ad  $f^{(k)}$  in ogni sottoinsieme chiuso  $\overline{D}$  contenuto in  $E$ .

**Dimostrazione.** Sia  $z_0$  qualsiasi in  $E$ , e sia  $\delta > 0$  tale che  $B_\delta(z_0)$  sia contenuta in  $E$ . Sia  $\gamma$  una qualsiasi curva chiusa e regolare a tratti contenuta in  $B_\delta(z_0)$ . Allora

$$\int_\gamma f_n(z) = 0,$$

dal momento che  $f_n$  è olomorfa in  $E$ . D'altra parte, per il teorema precedente, dal momento che  $f_n$  converge uniformemente a  $f$  in  $\overline{B_\delta(z_0)}$ , si ha che  $f$  è continua in  $\overline{B_\delta(z_0)}$  e che

$$\int_\gamma f(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_\gamma f_n(z) = 0.$$

Per il teorema di Morera,  $f$  è olomorfa in  $B_\delta(z_0)$  e quindi, per l'arbitrarietà di  $z_0$ , in  $E$ , concludendo così la dimostrazione di 1).

Sia ora  $z_0$  qualsiasi in  $E$  e sia  $\delta > 0$  tale che  $B_\delta(z_0)$  sia contenuta in  $E$ ; sia  $\gamma$  una curva chiusa e regolare a tratti contenuta in  $E$ , e sia  $D$  un sottoinsieme di  $E$  tale che  $\gamma = \partial D$ ; supponiamo che  $\gamma$  sia tale che  $B_\delta(z_0) \subset D$ . Per la formula di Cauchy (4.3) per le derivate successive si ha, fissato  $k$  in  $\mathbf{N}$ ,

$$f_n^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(z)}{(z - z_0)^{k+1}}, \quad f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}};$$

la seconda formula è valida perché  $f$  è olomorfa per 1). Si ha allora

$$|f_n^{(k)}(z_0) - f^{(k)}(z_0)| = \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \left[ \frac{f_n(z) - f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \right] \right| \leq \frac{L(\gamma) k!}{2\pi \delta^{k+1}} \sup_{\gamma} |f_n(z) - f(z)|.$$

L'ultima maggiorazione è stata effettuata osservando che se  $z$  è su  $\gamma$ , allora  $z$  dista da  $z_0$  più di  $\delta$ . Essendo  $\sup_{\gamma} |f_n(z) - f(z)|$  maggiorato da  $\sup_E |f_n(z) - f(z)|$ , si ha che  $f_n^{(k)}(z_0)$  converge a  $f^{(k)}(z_0)$  e quindi la 2) per l'arbitrarietà di  $z_0$ .

Infine, sia  $\overline{D}$  un sottoinsieme chiuso di  $E$  e sia  $\gamma$  una curva chiusa e regolare a tratti contenuta in  $E$  e tale che  $|z - z_0| \geq \delta$  per ogni  $z$  in  $\gamma$  e per ogni  $z_0$  in  $\overline{D}$ . Una tale curva esiste perché, essendo  $\overline{D}$  chiuso e  $E$  aperto, la frontiera di  $\overline{D}$  ha distanza positiva dalla frontiera di  $E$ . Ragionando come prima si ha, per ogni  $z_0$  in  $\overline{D}$ ,

$$|f_n^{(k)}(z_0) - f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{L(\gamma) k!}{2\pi \delta^{k+1}} \sup_{\gamma} |f_n(z) - f(z)|,$$

da cui segue

$$\sup_{\overline{D}} |f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \leq \frac{L(\gamma) k!}{2\pi \delta^{k+1}} \sup_E |f_n(z) - f(z)|,$$

e dunque la 3). ■

**Osservazione 5.4** Se  $f_n$  è una successione di funzioni olomorfe che converge uniformemente (un concetto legato *solo* alla continuità, che nulla ha a che fare con le derivate) allora il limite è una funzione olomorfa. In altre parole, l'insieme delle funzioni olomorfe è chiuso rispetto alla convergenza uniforme. Questo è falso se le funzioni sono reali di variabile reale: ad esempio,  $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$  è una successione di funzioni  $C^\infty(\mathbf{R})$  che converge uniformemente (sui compatti) a  $f(x) = |x|$  (che è solo una funzione continua).

Controllando la dimostrazione del teorema precedente, si nota come non si sia mai usato il fatto che le  $f_n$  convergono uniformemente a  $f$  nei sottoinsiemi chiusi di  $E$ , ma solo il fatto che la successione convergeva uniformemente su una curva  $\gamma$ . Questo fatto giustifica il seguente teorema.

**Teorema 5.5** Sia  $E$  un dominio limitato di  $\mathbf{C}$  la cui frontiera  $\partial E$  è una curva regolare a tratti. Sia  $f_n : E \rightarrow \mathbf{C}$  una successione di funzioni olomorfe in  $E$  e continue in  $\overline{E}$ . Supponiamo che  $f_n$  converga uniformemente su  $\partial E$ ; allora  $f_n$  converge uniformemente in  $\overline{E}$ .

**Dimostrazione.** Siccome  $f_n$  converge uniformemente su  $\partial E$ , la successione  $\{f_n\}$  è di Cauchy su  $\partial E$ ; ovvero, per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $n_\varepsilon$  in  $\mathbf{N}$  tale che

$$\sup_{\partial E} |f_n(z) - f_m(z)| \leq \varepsilon, \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon.$$

Per il principio di massimo modulo (Teorema 4.4) si ha, essendo  $f_n - f_m$  olomorfa

$$\sup_{\overline{E}} |f_n(z) - f_m(z)| = \sup_{\partial E} |f_n(z) - f_m(z)|,$$

cosicché  $\{f_n\}$  è una successione di Cauchy in  $\overline{E}$ , e dunque converge uniformemente. ■

**Definizione 5.6** Sia  $f_n : E \rightarrow \mathbf{C}$  una successione di funzioni, e sia  $S_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k(z)$  la successione delle somme parziali associata alla successione  $\{f_n\}$ . La serie di funzioni

$$S(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(z),$$

si dice **puntualmente** convergente in  $E$  se è convergente puntualmente a  $S(z)$  in  $E$  la successione  $\{S_n(z)\}$ ; la serie si dice **uniformemente** convergente in  $E$  se è convergente uniformemente a  $S(z)$  in  $E$  la successione  $\{S_n(z)\}$ ; infine, la serie si dice **totalmente** convergente in  $E$  se è convergente la serie (di numeri reali)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sup_E |f_k(z)|.$$

Come già per le serie di funzioni reali di variabile reale, la convergenza totale in  $E$  implica la convergenza uniforme, che a sua volta implica la convergenza puntuale. Dal momento che la convergenza uniforme di una serie di funzioni è equivalente alla convergenza uniforme della successione delle somme parziali, tutti i teoremi dimostrati per successioni di funzioni uniformemente

convergenti si estende alle serie di funzioni uniformemente convergenti. In particolare, se  $\{f_n\}$  è una successione di funzioni olomorfe tale che  $S_n(z)$  converge uniformemente in  $E$  ad  $S(z)$ , allora  $S$  è olomorfa in  $E$ .

**Definizione 5.7** Sia  $\{c_n\}$  una successione di numeri complessi, sia  $z_0$  in  $\mathbf{C}$ , e sia  $f_n(z) = c_n (z - z_0)^n$ . La serie di funzioni associata alla successione  $\{f_n\}$  si dice **serie di potenze** di centro  $z_0$ .

Le principali proprietà delle serie di potenze sono riassunte nel seguente teorema.

**Teorema 5.8** Sia  $\{c_k\}$  una successione di numeri complessi, e consideriamo la serie di potenze

$$S(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k.$$

Allora esiste  $\rho \in [0, +\infty]$  tale che la serie di potenze converge puntualmente per  $|z - z_0| < \rho$ , e non converge per  $|z - z_0| > \rho$ . Inoltre, la serie di potenze converge uniformemente su  $|z - z_0| \leq R$  per ogni  $R < \rho$ . Il numero reale  $\rho$ , detto **raggio di convergenza della serie di potenze** è determinato univocamente dalla seguente formula: se

$$L = \limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|c_k|},$$

allora

$$\rho = \begin{cases} 0 & \text{se } L = +\infty, \\ \frac{1}{L} & \text{se } 0 < L < +\infty, \\ +\infty & \text{se } L = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

**Dimostrazione.** Dal momento che una serie di potenze di centro  $z_0$  si può ricondurre ad una serie di potenze di centro l'origine con il cambio di variabile  $\zeta = z - z_0$ , non è restrittivo considerare solo il caso  $z_0 = 0$ . Consideriamo allora la serie di potenze

$$S(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k,$$

e sia  $\rho$  dato da (5.1); supponiamo inizialmente che  $0 < \rho < +\infty$  e sia  $z$  un numero complesso tale che  $|z| < \rho$ . Allora

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|c_k z^k|} = |z| \limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = |z| L < \rho L = 1.$$

Per il criterio della radice, la serie di termine generico  $|c_k z^k|$  è convergente; pertanto, la serie di termine generico  $c_k z^k$  è assolutamente convergente, quindi convergente. Se  $|z| > \rho$ , il limite superiore della radice  $k$ -sima di  $|c_k z^k|$  è maggiore di 1, il che vuol dire che esiste  $\delta > 0$  tale che per infiniti indici  $k$  si ha  $|c_k z^k| \geq (1 + \delta)^k$ . Pertanto, la successione  $|c_k z^k|$  non è limitata; in particolare, non è infinitesima, cosicché la serie di termine generico  $c_k z^k$  non può convergere.

Sia ora  $|z| \leq R < \rho$ . Allora  $|c_k z^k| \leq |c_k R^k| = |c_k| R^k$ . Dal momento che

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|c_k| R^k} = L R < L \rho = 1,$$

la serie di termine generico  $|c_k| R^k$  è convergente, e quindi la serie di termine generico  $c_k z^k$  converge totalmente nell'insieme  $|z| \leq R$ , dunque uniformemente.

I casi  $\rho = 0$  e  $\rho = +\infty$  sono lasciati al lettore. ■

**Osservazione 5.9** Sia data una serie di potenze, e sia  $\rho$  il suo raggio di convergenza. Dal momento che le funzioni  $c_k (z - z_0)^k$  sono olomorfe, ed essendo la convergenza della serie di potenze uniforme in  $|z - z_0| \leq R < \rho$ , ne segue (per il Teorema 5.3) che la somma della serie di potenze è olomorfa per  $|z - z_0| < \rho$ , e che le derivate della serie di potenze convergono (puntualmente in  $E$ , e uniformemente nei chiusi contenuti in  $E$ ) alle derivate della somma della serie. In generale, la convergenza delle derivate non è uniforme su tutto l'insieme di convergenza uniforme della serie, come mostra il seguente esempio.

Sia  $f_n(z) = \frac{z^n}{n^2}$ . La serie di potenze associata ha raggio di convergenza 1, e la serie converge uniformemente per  $|z| \leq 1$ , in quanto converge totalmente su tale insieme. La serie delle derivate ha invece termine generico  $f'_n(z) = \frac{z^{n-1}}{n}$ , che non converge per  $|z| = 1$ .

Detta  $S(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k$  per  $z$  nell'insieme di convergenza della serie di potenze, è possibile calcolare tutte le derivate di  $S$  derivando la serie termine a termine. In particolare, si ha

$$S^{(k)}(z_0) = k! c_k,$$

ovvero

$$c_k = \frac{S^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

In altre parole, i coefficienti della serie di potenze di somma (olomorfa)  $S(z)$  sono legati alle derivate di  $S$  dalla formula precedente.

**Esempio 5.10** Sia  $z_0$  in  $\mathbf{C}$  e siano  $z$  e  $w$  in  $\mathbf{C}$ . Consideriamo la serie di funzioni

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^k,$$

e ci chiediamo se converga e — nel caso — come, rispetto alle variabili  $z$  e  $w$ . Definendo  $\zeta = \frac{z - z_0}{w - z_0}$ , la serie si trasforma nella serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \zeta^k,$$

che è una serie di potenze di raggio di convergenza 1, convergente a  $S(\zeta) = \frac{1}{1-\zeta}$  (essendo una serie geometrica). Pertanto, la serie di partenza converge puntualmente per  $\left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| < 1$ , e converge uniformemente se  $\left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| \leq R < 1$ . Sia allora  $w$  fissato. Per ogni  $z$  tale che  $|z - z_0| < |w - z_0|$  la serie converge (come serie di funzioni nella variabile  $z$ ), e si ha

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} = \frac{w - z_0}{w - z},$$

con convergenza uniforme se  $|z - z_0| \leq R < |w - z_0|$ . Se, invece,  $z$  è fissato, la serie (come serie di funzioni nella variabile  $w$ ) converge per ogni  $w$  tale che  $|w - z_0| > |z - z_0|$  alla stessa funzione  $G(w) = \frac{w - z_0}{w - z}$ , con convergenza uniforme per  $|w - z_0| \geq R > |z - z_0|$ . Si noti che, se  $|z - z_0| < |w - z_0|$ , allora  $z \neq w$ , e quindi  $\frac{w - z_0}{w - z}$  è olomorfa sia in  $z$  che in  $w$ .

Il precedente esempio, le proprietà delle serie di potenze e la formula di Cauchy fanno sì che le funzioni olomorfe siano sviluppabili in serie di potenze.

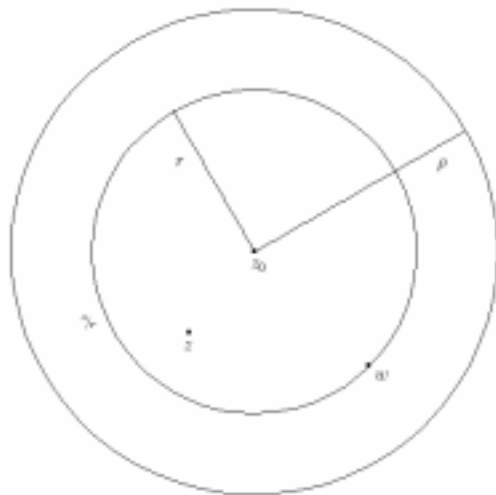
**Teorema 5.11 (Taylor)** Sia  $z_0$  in  $\mathbf{C}$ , e sia  $f : B_\rho(z_0) \rightarrow \mathbf{C}$  olomorfa in  $B_\rho(z_0)$ . Allora esiste un'unica successione  $\{c_n\}$  di numeri complessi tale che

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad \forall z : |z - z_0| < \rho.$$

**Dimostrazione.** Sia  $z$  in  $B_\rho(z_0)$  e sia  $0 < r < \rho$  tale che  $|z - z_0| < r$ . Per la formula di Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w - z},$$

dove  $\gamma_r$  è la circonferenza di centro  $z_0$  e raggio  $r$  (si veda la figura).



Siccome  $|w - z_0| = r$  e  $|z - z_0| < r$ , per l'Esempio 5.10 si ha

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0} \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(w - z_0)^{k+1}},$$

e la convergenza è uniforme in  $w$ . Pertanto,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(w) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(w - z_0)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} \right) (z - z_0)^k.$$

Definito

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}},$$

si ha allora

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k,$$

e, dalla formula di Cauchy per le derivate di una funzione olomorfa,

$$c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!},$$

cosicché la successione  $\{c_n\}$  è univocamente determinata. Essendo  $z$  arbitrario, la serie converge a  $f$  su tutto  $B_\rho(z_0)$ . Questo fatto implica che il raggio di convergenza della serie di potenze è maggiore od uguale a  $\rho$ , e quindi la serie converge uniformemente per  $|z - z_0| \leq R < \rho$ . ■

**Osservazione 5.12** Come conseguenza del teorema precedente, se  $f$  è olomorfa in  $E$ , e se  $z_0$  è in  $E$ , allora  $f$  si può sviluppare come serie di potenze di centro  $z_0$ , ed il raggio di convergenza della serie di potenze è almeno uguale alla distanza di  $z_0$  dalla frontiera  $E$ , vale a dire del raggio del più grande cerchio di centro  $z_0$  tutto contenuto in  $E$ .

**Esempio 5.13** Sia  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$  e sia  $z_0 = 0$ . Allora  $f$  è olomorfa in  $\mathbf{C}$  privato dei punti  $\pm i$ , e quindi il raggio di convergenza della serie di potenze associata a  $f$  e di centro  $z_0 = 0$  è almeno 1. In realtà, dal momento che

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k z^{2k},$$

il raggio di convergenza della serie è esattamente 1. Tale esempio spiega anche per quale motivo la serie di potenze della funzione reale  $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$  sia convergente solo per  $x$  in  $(-1, 1)$  e non su tutto  $\mathbf{R}$ , insieme di definizione di  $g$ : essendo  $g$  la restrizione ad  $\mathbf{R}$  di  $f$ , la serie di potenze di  $g$  “sente” i due punti  $\pm i$  sui quali  $f$  non è definita e non può “andare oltre” l’intersezione del cerchio di centro l’origine e raggio 1 con l’asse reale. In pratica, l’ambiente giusto per studiare le serie di potenze è  $\mathbf{C}$ , e non  $\mathbf{R}$ .

Prendiamo ora  $f$  come prima, e  $z_0 = 1$ . Il raggio di convergenza della serie di potenze associata è adesso almeno  $\sqrt{2}$  (che è la distanza di  $z_0$  da  $\pm i$ ). Infatti, scrivendo

$$f(z) = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right),$$

ed usando l’Esercizio 5.10 si trova, dopo un po’ di calcoli,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{(1-i)^{k+1}} - \frac{1}{(1+i)^{k+1}} \right) (z-1)^k.$$

Scrivendo  $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$  e  $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ , si ottiene

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\operatorname{sen} \left( \frac{(k+1)\pi}{4} \right)}{2^{\frac{k+1}{2}}} (z-1)^k,$$

che ha raggio di convergenza esattamente  $\sqrt{2}$ .

Sia ora  $f(z) = \ln(z)$  e sia  $z_0 = 1$ . Siccome  $f(z)$  è olomorfa in  $\mathbf{C}$  privato dell'asse reale negativo, la serie di potenze associata ha raggio di convergenza almeno 1. Ricordando che  $f'(z) = \frac{1}{z}$ , si ottengono facilmente i coefficienti dello sviluppo di  $f$ , che è

$$f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{(z-1)^k}{k}.$$

Ancora una volta, il raggio di convergenza è esattamente 1.

## 6 Prolungamento analitico Superfici di Riemann

Il fatto che ogni funzione olomorfa sia sviluppabile in serie di potenze permette di provare altre proprietà di una funzione olomorfa. In particolare, di capire quale sia la “minima” quantità di informazione che permetta di identificare univocamente una funzione olomorfa: già sappiamo (Teorema 4.1) che assegnare una funzione olomorfa sulla frontiera di un dominio “fissa” automaticamente la funzione all'interno, ma in realtà basta dare meno informazioni.

**Definizione 6.1** Sia  $f : E \rightarrow \mathbf{C}$  una funzione olomorfa; un punto  $z_0$  in  $E$  si dice **zero** della funzione  $f$  se si ha  $f(z_0) = 0$ . Dall'espansione in serie di potenze di  $f$  in un intorno di  $z_0$  si ottiene subito che  $c_0 = 0$ . Se non solo il coefficiente  $c_0$  è nullo, ma lo sono anche i coefficienti  $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ , mentre  $c_n \neq 0$ , allora  $z_0$  si dice **zero di ordine**  $n$ . Se  $z_0$  è uno zero di ordine  $n$  per  $f$ , allora

$$f(z) = (z - z_0)^n \sum_{k=0}^{+\infty} c_{n+k} (z - z_0)^k = (z - z_0)^n \varphi(z),$$

con  $\varphi$  funzione olomorfa in un intorno di  $z_0$ , e  $\varphi(z_0) = c_n \neq 0$ .

**Teorema 6.2** Sia  $E$  un dominio di  $\mathbf{C}$  e sia  $f : E \rightarrow \mathbf{C}$  una funzione olomorfa. Supponiamo che  $f$  abbia una successione  $\{z_n\}$  di zeri in  $E$ . Se  $z_n$  converge ad un limite  $z_0$  in  $E$ , allora  $f$  è identicamente nulla in  $E$ .

**Dimostrazione.** Supponiamo che gli  $z_n$  siano tutti diversi da  $z_0$ ; tale ipotesi non è restrittiva, in quanto al più uno degli  $z_n$  può essere uguale a  $z_0$ .

Essendo  $z_0$  in  $E$ , consideriamo l'espansione di  $f$  in serie di potenze centrata in  $z_0$ :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k. \quad (6.1)$$

Tale serie ha un raggio di convergenza che è almeno uguale alla distanza di  $z_0$  dalla frontiera di  $E$ . Dal momento che  $z_n$  converge a  $z_0$  e che  $f$  è continua, si ha  $f(z_0) = 0$  (e quindi  $c_0 = 0$ ) e

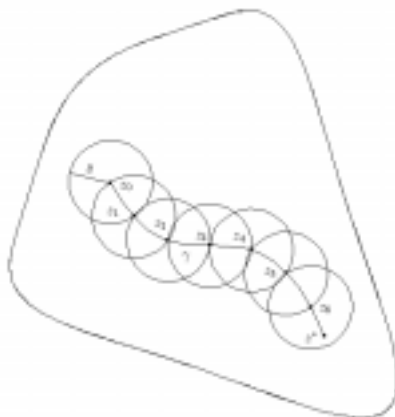
$$f(z) = (z - z_0) \sum_{k=0}^{+\infty} c_{k+1} (z - z_0)^k = (z - z_0) f_1(z),$$

con  $f_1$  olomorfa. Per  $f_1$  possiamo ripetere il ragionamento:  $f_1(z_n) = 0$ , ed essendo  $f_1$  continua, si ha  $f_1(z_0) = 0$ . Dunque  $c_1 = 0$  e

$$f(z) = (z - z_0)^2 \sum_{k=0}^{+\infty} c_{k+2} (z - z_0)^k = (z - z_0)^2 f_2(z).$$

A questo punto è evidente che il ragionamento può essere ripetuto infinite volte, ottenendo  $c_k = 0$  per ogni  $k$ . Per la (6.1),  $f \equiv 0$  in un intorno di  $z_0$ .

Per mostrare che  $f$  è identicamente nulla in  $E$ , sia  $z^*$  in  $E$  e sia  $\gamma$  una curva continua che collega  $z_0$  a  $z^*$ ; tale curva esiste perché  $E$ , essendo connesso, è connesso per poligonalità. Supponiamo che la curva  $\gamma$  disti più di una quantità positiva  $\delta$  dalla frontiera di  $E$ , cosicché il cerchio di centro  $z$  e raggio  $\delta$  centrato in un punto  $z$  di  $\gamma$  è tutto contenuto in  $E$  (si veda la figura).



Partendo da  $z_0$ , si ottiene che la  $f$  è nulla sul cerchio di centro  $z_0$  e raggio  $\delta$ . Sia  $z_1$  l'intersezione di  $\gamma$  con la frontiera della sfera di centro  $z_0$  e raggio  $\delta$ . Allora  $z_1$  è limite in  $E$  di una successione di zeri di  $f$  (basta scegliere una successione qualsiasi  $\xi_n$  appartenente al raggio che collega  $z_0$  a  $z_1$  e convergente a  $z_1$ ). Pertanto,  $f \equiv 0$  in un intorno di centro  $z_1$  e raggio (almeno)  $\delta$ . Se  $z^*$  appartiene a tale cerchio,  $f(z^*) = 0$  e la dimostrazione è conclusa per l'arbitrarietà di  $z^*$ ; se, invece,  $z^*$  è fuori da questo primo cerchio, sia  $z_2$  un'altra intersezione di  $\gamma$  con il cerchio di centro  $z_1$  e raggio  $\delta$ . Allora  $f \equiv 0$  in un cerchio di centro  $z_2$  e raggio (almeno)  $\delta$ . Proseguendo in questa maniera, dopo un numero finito di passi si trova un punto  $z_k$  appartenente a  $\gamma$  tale che  $f \equiv 0$  in un cerchio di centro  $z_k$  e raggio  $\delta$ , con  $z^*$  appartenente a questo cerchio. Pertanto,  $f(z^*) = 0$ . Per l'arbitrarietà di  $z^*$ ,  $f$  è identicamente nulla su  $E$ . ■

**Teorema 6.3** *Sia  $E$  un dominio di  $\mathbf{C}$  e sia  $f : E \rightarrow \mathbf{C}$  olomorfa in  $E$  non identicamente nulla. Allora  $f$  ha un numero finito di zeri in ogni sottoinsieme  $\overline{D}$  compatto di  $E$ .*

**Dimostrazione.** La dimostrazione segue dal fatto che ogni successione contenuta in un compatto ammette una sottosuccessione convergente e dal teorema precedente. ■

**Teorema 6.4** *Sia  $E$  un dominio di  $\mathbf{C}$  e sia  $f : E \rightarrow \mathbf{C}$  olomorfa in  $E$ . Se  $z_0$  in  $E$  è uno zero di ordine infinito per  $f$  (ovvero,  $f$  si annulla in  $z_0$  con tutte le sue derivate), allora  $f$  è identicamente nulla.*

Dalla caratterizzazione dei compatti di  $\mathbf{C}$  discende il seguente teorema.

**Teorema 6.5** *Una funzione olomorfa  $f$  può avere infiniti zeri o in un aperto, o in un insieme illimitato.*

**Teorema 6.6** *Sia  $E$  un dominio di  $\mathbf{C}$  e siano  $f_1, f_2 : E \rightarrow \mathbf{C}$  olomorfe in  $E$ . Se esiste una successione  $\{z_n\}$  contenuta in  $E$ , e convergente a  $z_0$  in  $E$ , tale che  $f_1(z_n) = f_2(z_n)$  per ogni  $n$  in  $\mathbf{N}$ , allora  $f_1 \equiv f_2$  in  $E$ .*

**Dimostrazione.** È sufficiente applicare il Teorema 6.2 alla funzione olomorfa  $f = f_1 - f_2$ . ■

Per il teorema precedente, fissata  $\{z_n\}$  contenuta in  $E$  e convergente a  $z_0$  in  $E$ , esiste una ed una sola funzione olomorfa  $f$  su  $E$  che assume in  $z_n$  dei valori fissati: questo è il cosiddetto teorema di unicità di definizione di una funzione olomorfa. Tale teorema può essere enunciato in altri due modi (che sono condizioni sufficienti per l'applicazione del risultato appena dimostrato).

**Teorema 6.7** Sia  $E$  un dominio di  $\mathbf{C}$ , e siano  $f_1$  e  $f_2$  funzioni olomorfe su  $E$ . Se  $f_1$  coincide con  $f_2$  su una curva  $\gamma$  contenuta in  $E$ , allora  $f_1 \equiv f_2$ .

**Teorema 6.8** Siano  $E_1$  e  $E_2$  due domini di  $\mathbf{C}$ , e siano  $f_1$  e  $f_2$  funzioni olomorfe su  $E_1$  e  $E_2$  rispettivamente. Se  $E = E_1 \cap E_2$  è diverso dall'insieme vuoto, e se  $f_1 \equiv f_2$  su  $E$ , allora la funzione

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{se } z \in E_1, \\ f_2(z) & \text{se } z \in E_2, \end{cases}$$

è olomorfa in  $E_1 \cup E_2$ .

**Esempio 6.9** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione continua. Allora esiste al più una funzione olomorfa  $F$  definita su un dominio  $E$  contenente il segmento  $[a, b]$  dell'asse reale e tale che  $F(x) = f(x)$  per ogni  $x$  in  $[a, b]$ . Se tale funzione esiste,  $F$  viene detta **prolungamento analitico** di  $f$  da  $[a, b]$  a  $E$ .

Sia ora

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!},$$

e ricordiamo che la serie converge su tutto  $\mathbf{R}$ . Consideriamo la serie di potenze, definita su  $\mathbf{C}$ ,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Si vede facilmente che tale serie converge ovunque in  $\mathbf{C}$ , e ovviamente la somma  $f$  della sua serie coincide con  $e^x$  sull'asse reale. Essendo  $f$  olomorfa in  $\mathbf{C}$ ,  $f$  è il prolungamento analitico di  $e^x$  da  $\mathbf{R}$  a  $\mathbf{C}$ . Consideriamo ora la funzione olomorfa  $e^z$  definita da  $e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$ . Evidentemente,  $e^z$  coincide con  $e^x$  sull'asse reale. Pertanto, anche  $e^z$  è il prolungamento analitico

di  $e^x$  da  $\mathbf{R}$  a  $\mathbf{C}$ . Per l'unicità del prolungamento analitico si ha  $f(z) = e^z$ , ovvero

$$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Un ragionamento analogo può essere fatto considerando

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \operatorname{cos}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!},$$

che portano alla scrittura

$$\operatorname{sen}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \operatorname{cos}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!},$$

per ogni  $z$  in  $\mathbf{C}$ .

L'esempio precedente è un caso particolare di un teorema più generale, che enunciamo di seguito.

**Teorema 6.10** *Sia  $F : \mathbf{C}^N \rightarrow \mathbf{C}$  una funzione di  $N$  variabili complesse continua su  $\mathbf{C}^N$ , derivabile rispetto ad ognuna delle variabili, con derivata parziale continua. Siano  $f_1, \dots, f_N$  funzioni olomorfe su  $\mathbf{C}$  tali che*

$$F(f_1(x), \dots, f_N(x)) = 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Allora

$$F(f_1(z), \dots, f_N(z)) = 0, \quad \forall z \in \mathbf{C}.$$

**Dimostrazione.** È sufficiente dimostrare che  $g(z) = F(f_1(z), \dots, f_N(z))$  è una funzione olomorfa su  $\mathbf{C}$  per avere la tesi. Infatti, essendo  $g(x) \equiv 0$  su  $\mathbf{R}$ , ed essendo  $g(z)$  il prolungamento olomorfo di  $g$  ai complessi, si ha subito che  $g(z) \equiv 0$  per l'unicità del prolungamento olomorfo (dato che la funzione nulla su  $\mathbf{C}$  prolunga evidentemente  $g$  da  $\mathbf{R}$  a  $\mathbf{C}$ ). L'olomorfia di  $g$  segue dalla formula di derivazione delle funzioni composte: si ha

$$g'(z) = \sum_{k=1}^N F_{w_k}(f_1(z), \dots, f_N(z)) f'_k(z),$$

e quindi  $g'(z)$  è continua per le ipotesi su  $F$  e sulle  $f_k$ . ■

**Esempio 6.11** Grazie al teorema precedente, sono ad esempio verificate in  $\mathbf{C}$  alcune relazioni valide in  $\mathbf{R}$ :

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos(z_1) \cos(z_2) \mp \sin(z_1) \sin(z_2),$$

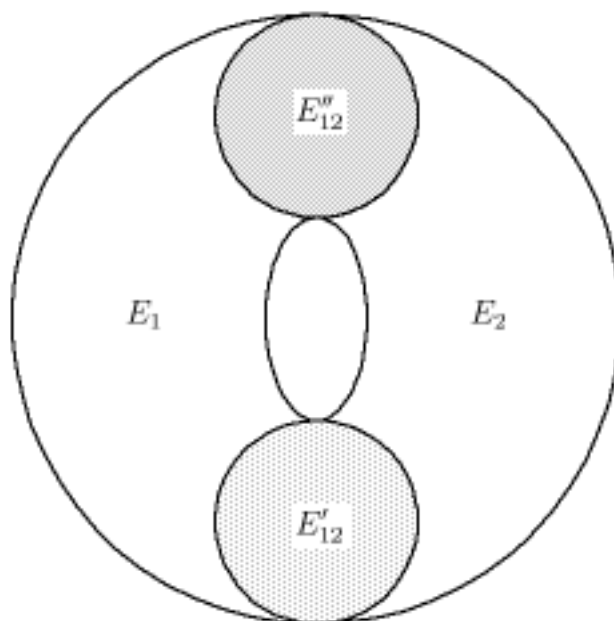
$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin(z_1) \cos(z_2) \pm \cos(z_1) \sin(z_2),$$

e soprattutto

$$e^{\ln(z)} = z.$$

Il Teorema 6.8 dice che se  $f_1$  e  $f_2$  sono olomorfe su due insiemi  $E_1$  e  $E_2$  che hanno una parte comune sulla quale  $f_1$  e  $f_2$  coincidono, allora è possibile costruire su  $E_1 \cup E_2$  una funzione olomorfa  $f$  che estende entrambe le funzioni. Lo stesso discorso, per il Teorema 6.7, si può fare nel caso in cui  $E_1$  e  $E_2$  abbiano una parte della frontiera (pensata come curva regolare a tratti) in comune, e  $f_1$  e  $f_2$  siano continue sulla chiusura di  $E_1$  e  $E_2$  rispettivamente.

È però possibile un'altra situazione, schematizzata nella figura che segue:  $E_1$  ed  $E_2$  hanno un'intersezione comune, ma  $f_1$  e  $f_2$  coincidono solo su una parte  $E'_{12}$  di tale intersezione.



Come fare in questo caso? È chiaro che la definizione di  $f$  su  $E_1 \cup E_2$  come

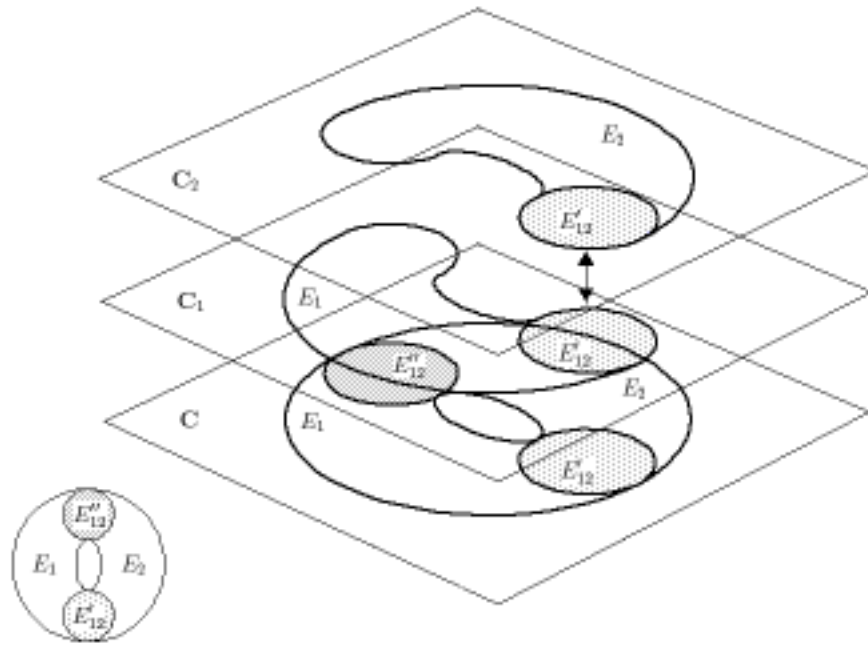
$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{se } z \in E_1, \\ f_2(z) & \text{se } z \in E_2, \end{cases}$$

non va bene: infatti, se  $z$  appartiene ad  $E''_{12}$  (l'insieme sul quale  $f_1$  e  $f_2$  sono diverse), la definizione è mal posta. Una prima possibilità è quella di “restringere” l'estensione  $f$  nel modo seguente:

$$g(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{se } z \in E_1, \\ f_2(z) & \text{se } z \in E_2 \setminus \overline{E''_{12}}, \end{cases} \quad h(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{se } z \in E_1 \setminus \overline{E''_{12}}, \\ f_2(z) & \text{se } z \in E_2. \end{cases}$$

In questa maniera, però, avremmo due estensioni olomorfe differenti: una ( $g$ ) estende  $f_1$  ad  $E_1 \cup E_2$ , l'altra ( $h$ ) estende  $f_2$  ad  $E_1 \cup E_2$ . In entrambi i casi, abbiamo “perso” delle informazioni: siamo stati costretti a scartare dei valori di  $f_2$  (o di  $f_1$ ) là dove non erano compatibili con la funzione che volevamo estendere.

È però possibile una terza scelta: modificare in maniera radicale l'insieme di definizione della funzione  $f$ . Pensiamo infatti  $E_1$  come sottoinsieme di  $\mathbf{C}_1$  (il “primo piano” complesso) e  $E_2$  come sottoinsieme di  $\mathbf{C}_2$  (il “secondo piano” complesso), e pensiamo i due piani sovrapposti (in maniera tale da non poter distinguere l'uno dall'altro se li guardassimo dalla verticale). Se osserviamo i due piani sovrapposti dalla verticale (e supponiamo il secondo piano “trasparente”), vediamo  $E_1 \cup E_2$  e le due zone di intersezione  $E'_{12}$  e  $E''_{12}$ . Se, invece, ci spostiamo parallelamente ai due piani complessi, ci rendiamo conto che  $E_1$  ed  $E_2$  non si intersecano perché vivono su due piani distinti. Adesso modifichiamo la “geometria” dei due piani, **identificando  $E'_{12}$  in  $\mathbf{C}_1$  con il corrispondente  $E'_{12}$  in  $\mathbf{C}_2$** . In altre parole, stiamo considerando la parte di  $E_1 \cap E_2$  sulla quale  $f_1$  ed  $f_2$  coincidono come lo stesso oggetto, ma in due piani differenti. Questa identificazione fa sì che sia possibile passare in maniera continua dal piano  $\mathbf{C}_1$  al piano  $\mathbf{C}_2$ , semplicemente entrando in  $E'_{12}$ ; in altre parole, è come se ci si muovesse contemporaneamente sui due piani; è solo al momento dell'uscita da  $E'_{12}$  che ci rendiamo conto su quale piano ci stavamo muovendo: se attraversiamo la frontiera di  $E'_{12}$  là dove è contenuta in  $E_1$ , allora usciamo nel piano  $\mathbf{C}_1$ ; se attraversiamo la frontiera di  $E'_{12}$  là dove è contenuta in  $E_2$ , allora usciamo nel piano  $\mathbf{C}_2$ .



Sia ora  $S$  l'insieme ottenuto da  $E_1$  (in  $\mathbf{C}_1$ ) ed  $E_2$  (in  $\mathbf{C}_2$ ) mediante l'identificazione di  $E'_{12}$ . È evidente che  $S$  non “vive” nel piano complesso, ma è solo un sottoinsieme di  $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$  (con una identificazione). Dal punto di vista metrico, **localmente**, tutte le proprietà di  $\mathbf{C}$  sono conservate, il che vuol dire che tutte le proprietà di continuità e derivabilità delle funzioni definite su  $E_1$  ed  $E_2$  si conservano. Definiamo allora

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{se } z \in S \cap \mathbf{C}_1, \\ f_2(z) & \text{se } z \in S \cap \mathbf{C}_2. \end{cases}$$

La definizione è ben posta, dal momento che  $S \cap \mathbf{C}_1 = E_1 \cap \mathbf{C}_1$ , e  $S \cap \mathbf{C}_2 = E_2 \cap \mathbf{C}_2$ , e abbiamo ottenuto una funzione olomorfa su  $S$ , che prolunga sia  $f_1$  che  $f_2$ . Infatti, dal momento che possiamo passare in maniera continua da  $\mathbf{C}_1$  a  $\mathbf{C}_2$  e viceversa attraverso  $E'_{12}$ ,  $f$  è il prolungamento olomorfo di  $f_1$  da  $E_1$  ad  $S$  e di  $f_2$  da  $E_2$  ad  $S$ .

Vediamo ora alcuni esempi di costruzione di superficie di Riemann.

**Esempio 6.12** Consideriamo le due funzioni  $f_1 : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  e  $f_2 : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  definite da

$$f_1(z) = f_1(\rho e^{i\theta}) = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}}, \quad f_2(z) = f_2(\rho e^{i\theta}) = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2} + i\pi} = -\sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}},$$

Come abbiamo visto, sia  $f_1$  che  $f_2$  sono tali che  $[f_1(z)]^2 = [f_2(z)]^2 = z$ . Dovendo sceglierne una, privilegiamo  $f_1$ , perché  $f_1(x) = \sqrt{x}$  e quindi  $f_1$  è il prolungamento della radice quadrata di  $x$  definita sui reali. Si vede abbastanza facilmente che  $f_1$  e  $f_2$  sono olomorfe per  $\rho \neq 0$ , in quanto la parte reale ed immaginaria di entrambe sono  $C^1$  come funzioni di  $\rho$  e di  $\theta$  e verificano le (2.5). Se ora ci muoviamo lungo la circonferenza di centro l'origine e raggio 1, e compiamo un giro intero attorno all'origine partendo dall'asse  $x$ , ci rendiamo subito conto che  $f_1(z)$  non ritorna al punto di partenza: il punto iniziale è  $z = 1$ , quello finale è  $z = -1$ . In altre parole, e dal momento che l'immagine del piano complesso  $\mathbf{C}$  tramite  $f_1$  è il semipiano  $\Im(z) \geq 0$ ,  $f_1(1)$  vale 1 ma il limite di  $f_1(z)$  per  $z$  tendente a 1 con la restrizione  $\Im(z) < 0$  non è 1, bensì  $-1$ . Fortunatamente,  $-1$  è esattamente il valore assunto da  $f_2$  in  $z = 1$ , e pertanto se “incolliamo”  $f_1$  con  $f_2$  otteniamo una funzione continua. In che senso eseguiamo l'incollamento? Ovvero, come costruiamo la superficie di Riemann per  $f_1$  e  $f_2$  (ovvero, per  $\sqrt{z}$ )?

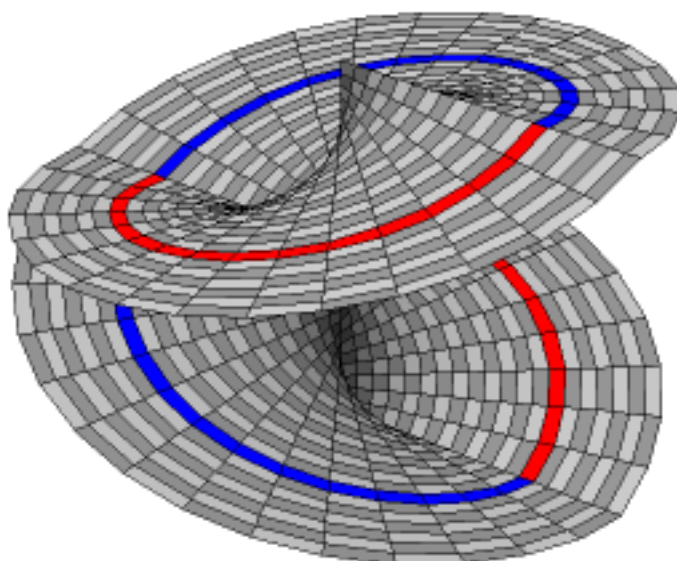
Consideriamo due copie di  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{C}_1$  e  $\mathbf{C}_2$ , e consideriamo i semiassi  $\Re(z_1) \geq 0$  in  $\mathbf{C}_1$  e  $\Re(z_2) \geq 0$  in  $\mathbf{C}_2$ . Tali semiassi si possono vedere sia come l'insieme  $\arg(z_1) = 0$  ( $\arg(z_2) = 0$ ) che come l'insieme  $\arg(z_1) = 2\pi$  ( $\arg(z_2) = 2\pi$ ): possiamo cioè tenere conto di come ci avviciniamo ad un punto dell'asse reale positivo, se da “sopra” o da “sotto”. Siccome  $f_1$  ristretta al semiasse  $\arg(z_1) = 2\pi$  coincide con  $f_2$  ristretta al semiasse  $\arg(z_2) = 0$ , e  $f_2$  ristretta al semiasse  $\arg(z_2) = 2\pi$  coincide con  $f_1$  ristretta al semiasse  $\arg(z_1) = 0$ , è naturale considerare la superficie di Riemann  $S$  ottenuta identificando  $\arg(z_1) = 2\pi$  con  $\arg(z_2) = 0$  e  $\arg(z_1) = 0$  con  $\arg(z_2) = 2\pi$ . In questa maniera, se ci muoviamo in senso antiorario intorno all'origine partendo da  $z_1 = 1$  (con argomento 0), dopo aver compiuto un giro intero ci troviamo in  $z_1 = 1$  (con argomento  $2\pi$ ) e quindi in  $z_2 = 1$  (con argomento 0). Continuando a girare, dopo un ulteriore giro completo, ci troviamo in  $z_2 = 1$  (con argomento  $2\pi$ ), e quindi in  $z_1 = 1$  (con argomento 0): vale a dire, al punto di partenza. Parallelamente al nostro movimento, la funzione definita da

$$\sqrt{z} = \begin{cases} f_1(z) & \text{se } z \in S \cap \mathbf{C}_1, \\ f_2(z) & \text{se } z \in S \cap \mathbf{C}_2. \end{cases}$$

è passata da 1 a  $-1$  e infine nuovamente ad 1 in maniera continua e, per l'olomorfia di  $f_1$  e  $f_2$ , anche in maniera olomorfa. In questo modo abbiamo ottenuto un'unica funzione olomorfa  $\sqrt{z}$ , definita non più su  $\mathbf{C}$  ma su  $S$  (un

sottoinsieme di  $\mathbf{C}^2$ ): soprattutto, una funzione che assume (su  $S$ ) un unico valore.

Nella figura qui sotto, un “tentativo” di rappresentazione di  $S$ : la parte di  $S$  evidenziata è il percorso svolto muovendosi da  $z = 1$  per ritornarvi: come si vede si devono fare due giri intorno all’origine.



La superficie di Riemann di  $\sqrt{z}$ ; le due parti della superficie *non* si intersecano

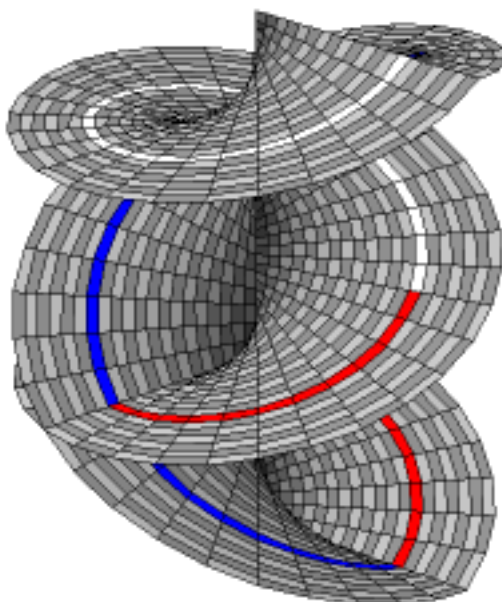
**Esempio 6.13** Sia  $n$  in  $\mathbf{N}$  e consideriamo le  $n$  funzioni  $f_1, \dots, f_n : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  definite da

$$f_k(z) = f_k(\rho e^{i\theta}) = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta}{n} + i\frac{2\pi(k-1)}{n}}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Come è noto, per ogni  $k$  si ha  $[f_k(z)]^n = z$ , e quindi  $f_k(z)$  è una delle  $n$  radici  $n$ -sime di  $z$ . Ancora una volta  $f_k$  è olomorfa, ma non è continua “attraverso” il semiasse reale positivo: quando  $z$  tende ad 1 con la condizione  $\Im(z) > 0$ ,  $f_1(z)$  tende ad 1, mentre tende ad  $f_2(1)$  se  $z$  tende ad 1 con la condizione  $\Im(z) < 0$ . Lo stesso fenomeno si ripete per le altre  $f_k$ , ognuna delle quali è continua con  $f_{k+1}$  attraverso il semiasse reale positivo. L’ultima,  $f_n$ , tende ad 1 quando  $z$  tende ad 1 con la condizione  $\Im(z) < 0$ . Per analogia con

quanto è stato fatto prima, costruiamo la superficie di Riemann  $S$  di  $\sqrt[n]{z}$ . Ovviamente, avremo bisogno di  $n$  copie  $\mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_n$  del piano complesso, il semiasse  $\arg(z_k) = 2\pi$  di  $\mathbf{C}_k$  essendo identificato al semiasse  $\arg(z)_{k+1} = 0$  di  $\mathbf{C}_{k+1}$  (ed il semiasse  $\arg(z_n)$  di  $\mathbf{C}_n$  con il semiasse  $\arg(z_1) = 0$  di  $\mathbf{C}_1$ , per “chiudere” il giro). La funzione  $\sqrt[n]{z}$  definita su  $S$  come  $f_k(z)$  se  $z$  appartiene a  $S \cap \mathbf{C}_k$  è — nuovamente — olomorfa in  $S$ .

La figura qui sotto è un “tentativo” di rappresentazione di  $S$  per  $\sqrt[3]{z}$ : la parte di  $S$  evidenziata è il percorso svolto muovendosi da  $z = 1$  per ritornarvi: come si vede si devono fare tre giri intorno all’origine.



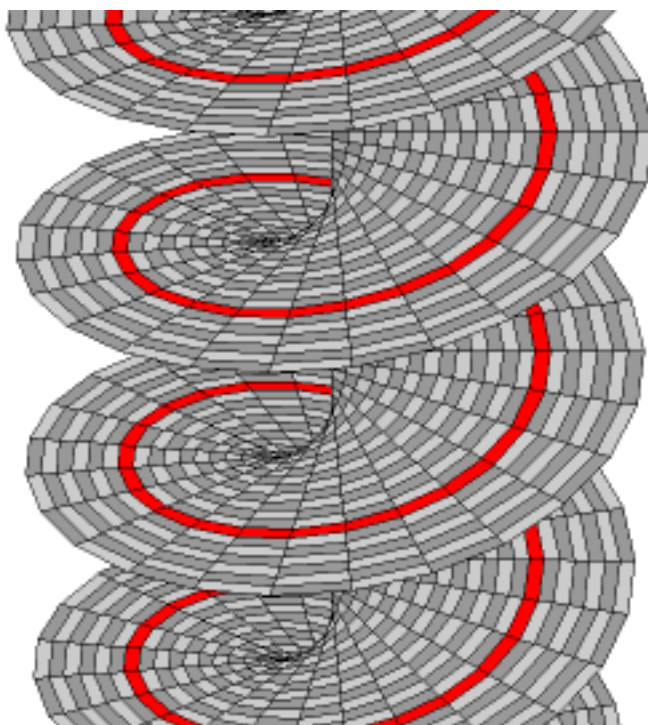
La superficie di Riemann di  $\sqrt[3]{z}$ ; le parti della superficie *non* si intersecano

**Esempio 6.14** Consideriamo ora la funzione  $f(z) = e^z = e^x[\cos(y) + i\sin(y)]$ . Come già detto,  $f$  è periodica di periodo complesso  $2\pi i$ ; se dividiamo il piano complesso in infinite strisce parallele  $S_k = \{x \in \mathbf{R}, -\pi + 2k\pi \leq y \leq \pi + 2k\pi\}$  con  $k$  in  $\mathbf{Z}$ , e consideriamo la restrizione di  $f$  ad una qualsiasi delle  $S_k$ , abbiamo  $f(S_k) = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ . Inoltre,  $f$  porta la retta  $y = -\pi + 2k\pi$  nel semiasse  $\Re(z) < 0$ , e fa altrettanto con la retta  $y = \pi + 2k\pi$ . Infine,  $f$  ristretta ad  $S_k$  è iniettiva, cosicché è possibile definire l’inversa di  $f$  come funzione da  $S_k$

a  $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ . Come già sappiamo, l'inversa di  $f$  ristretta a  $S_0$  è  $\ln(z)$ , mentre l'inversa di  $f$  ristretta a  $S_1$  è  $\ln(z) + 2\pi i$ , e, in generale, l'inversa di  $f$  ristretta a  $S_k$  è  $\ln(z) + 2k\pi i$ . Abbiamo allora infinite funzioni

$$f_k(z) = \ln(z) + 2k\pi i,$$

ognuna delle quali è definita per  $z$  diverso da zero. Se adesso consideriamo  $f_0$ , e partendo da  $z = -1$  (con argomento  $-\pi$ ), ci muoviamo in senso antiorario, ci rendiamo conto che quando torniamo a  $z = -1$  (con argomento  $\pi$ ), il valore che otteniamo non è  $f_0(-1)$ , bensì  $f_1(-1)$  (con argomento  $-\pi$ ). L'unica differenza con il caso precedente è che questa volta possiamo continuare a salire (o a scendere) indefinitamente, senza chiudere mai il giro. La superficie di Riemann  $S$  del logaritmo è pertanto ottenuta considerando un'infinità di copie di  $\mathbf{C}$ ,  $\{\mathbf{C}_k, k \in \mathbf{Z}\}$ , con l'identificazione tra  $\arg(z_k) = \pi$  e  $\arg(z_{k+1}) = -\pi$  per ogni  $k$ . La funzione (olomorfa!) definita su  $S$  (privato di "tutte" le origini) da  $\text{Ln}(z) = \ln(z) + 2k\pi i$  per  $z$  in  $S \cap \mathbf{C}_k$  è l'estensione (ad un solo valore) del logaritmo da  $\mathbf{C} \setminus \{0\}$  alla sua superficie di Riemann.



La superficie di Riemann di  $\text{Ln}(z)$ ; come si vede, la superficie è composta di infiniti "fogli"

Dal momento che si ha  $e^{\text{Ln}(z)} = z$  per ogni  $z$  in  $S$ , è possibile definire, per  $\alpha$  complesso,

$$z^\alpha = e^{\alpha \text{Ln}(z)}.$$

## 7 Serie di Laurent e singolarità

Abbiamo già visto come una funzione olomorfa si possa sviluppare in serie di potenze intorno ad un qualsiasi punto appartenente all'insieme di olomorfia. Sia ora  $z_0$  in  $\mathbf{C}$ , e sia  $\{c_n, n \in \mathbf{Z}\}$  una successione di numeri complessi. Consideriamo la serie

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (7.1)$$

e ci chiediamo se, dove e a cosa converga. Ovviamente, per convergenza della serie intendiamo la convergenza delle due serie

$$S_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad S_2(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$

La serie  $S_1$  è una vera e propria serie di potenze, e pertanto abbiamo già la risposta:  $S_1$  converge puntualmente all'interno di un cerchio  $|z - z_0| < R_1$ , ed uniformemente per  $|z - z_0| \leq R'_1 < R_1$ ; inoltre, la funzione  $S_1(z)$  è olomorfa in  $|z - z_0| < R_1$ , ed il valore del raggio di convergenza  $R_1$  è determinato in maniera univoca dalla successione  $\{c_n, n \geq 0\}$ .

La serie  $S_2$ , invece, non è una serie di potenze, ma la sostituzione  $\zeta = \frac{1}{z - z_0}$  permette di definire la serie di potenze

$$T(\zeta) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} \zeta^n,$$

per la quale sappiamo esistere un raggio di convergenza  $\rho$  tale che la serie converge puntualmente per  $|\zeta| < \rho$  ed uniformemente per  $|\zeta| \leq \rho' < \rho$ . Tornando da  $\zeta$  a  $z - z_0$ , e detto  $R_2 = \frac{1}{\rho}$  (con le scelte corrette nel caso in cui  $\rho = 0$  e  $\rho = \infty$ ), si ha allora che  $S_2(z)$  converge puntualmente per  $|z - z_0| > R_2$  e uniformemente per  $|z - z_0| \geq R'_2 > R_2$ ; inoltre la funzione  $S_2$  è una funzione olomorfa per  $|z - z_0| > R_2$ .

Se  $R_2 > R_1$ , allora l'insieme di convergenza "contemporanea" delle due serie è vuoto, e quindi la (7.1) non definisce alcuna funzione. Se invece  $R_2 < R_1$ , allora  $S(z)$  è ben definita (ed olomorfa) nel settore circolare  $R_2 < |z - z_0| < R_1$ .

Ci chiediamo ora se vale il viceversa: ovvero, data una funzione  $f$  olomorfa in un settore circolare  $R_2 < |z - z_0| < R_1$ , è possibile sviluppare  $f$  come in (7.1)? La risposta, affermativa, è data dal seguente teorema.

**Teorema 7.1 (Laurent)** *Siano  $R_2 < R_1$  e sia  $D$  il settore circolare  $\{z \in \mathbf{C} : R_2 < |z - z_0| < R_1\}$ . Sia  $f : D \rightarrow \mathbf{C}$  olomorfa. Allora esiste un'unica successione  $\{c_n, n \in \mathbf{Z}\}$  tale che*

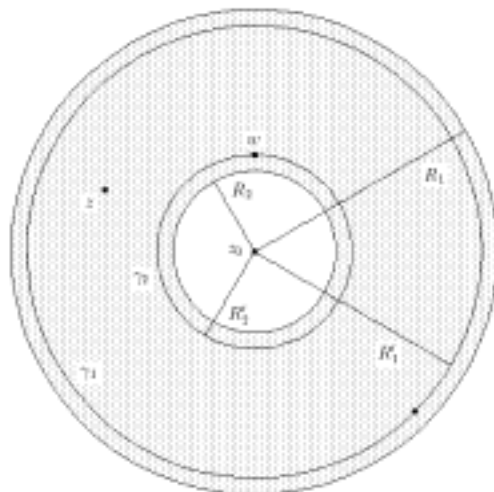
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in D.$$

La serie appena definita si dice **serie di Laurent di  $f$** .

**Dimostrazione.** Sia  $z$  in  $D$  e siano  $R'_1$  e  $R'_2$  tali che

$$R_2 < R'_2 < |z - z_0| < R'_1 < R_1.$$

Una tale scelta di  $R'_1$  e  $R'_2$  è evidentemente sempre possibile perché  $D$  è aperto. Consideriamo il settore circolare  $D' = \{z \in \mathbf{C} : R'_2 < |z - z_0| < R'_1\}$ .



Essendo  $f$  olomorfa in  $D'$ , il valore di  $f(z)$  si può rappresentare (per la formula di Cauchy), come

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D'} \frac{f(w)}{w-z}.$$

Dette  $\gamma_1$  la circonferenza di centro  $z_0$  e raggio  $R'_1$ , e  $\gamma_2$  la circonferenza di centro  $z_0$  e raggio  $R'_2$ , si ha allora

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}.$$

Consideriamo ora la funzione  $\frac{1}{w-z}$ , definita per  $z$  in  $D'$  e  $w$  in  $\gamma_1$ . Dal momento che  $|z - z_0| < R'_1 = |w - z_0|$ , dall'Esempio 5.10 segue che

$$\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}},$$

e la convergenza della serie, come successione di funzioni della variabile  $w$ , è uniforme. Analogamente, se consideriamo  $\frac{1}{w-z}$  definita per  $z$  in  $D'$  e  $w$  in  $\gamma_2$ , dal momento che  $|z - z_0| > R'_2 = |w - z_0|$ , dall'Esempio 5.10 segue che

$$\frac{1}{w-z} = - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}},$$

e la convergenza della serie, come successione di funzioni della variabile  $w$ , è uniforme. Pertanto,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(w) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} f(w) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} \right) (z-z_0)^n \\ &\quad + \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} f(w) (w-z_0)^n \right) \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n, \end{aligned}$$

avendo definito

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} & \text{se } n \geq 0, \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} & \text{se } n < 0. \end{cases}$$

Dall'arbitrarietà di  $z$  segue allora la tesi. ■

**Osservazione 7.2** Essendo  $\varphi(w) = \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}$  olomorfa in  $D$ , se  $\gamma$  è una qualsiasi curva chiusa e regolare a tratti contenuta in  $D$  che “gira” attorno a  $z_0$ , si ha

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} = \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}},$$

dal momento che  $\gamma_1 \cup \gamma$  (così come  $\gamma_2 \cup \gamma$ ) è la frontiera di un insieme tutto contenuto in  $D$  (e quindi è nullo l'integrale di  $\varphi(w)$ ). In questa maniera è possibile definire i coefficienti  $c_n$  dello sviluppo di Laurent in maniera unica come

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}},$$

dove  $\gamma$  è una qualsiasi curva chiusa e regolare a tratti contenuta in  $D$ , frontiera di un sottoinsieme di  $\mathbf{C}$  che contiene  $z_0$ .

Un caso particolare di settore circolare si ottiene quando  $R_2 = 0$ , ovvero si ha una funzione  $f$  olomorfa su  $D = \{z \in \mathbf{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$ . In questo caso  $z_0$  si dice **punto singolare** o **singolarità** per  $f$ . Per il Teorema di Laurent,  $f$  è sviluppabile in serie in  $D$ , e quindi si ha

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in D.$$

A partire dai valori assunti dai coefficienti  $c_n$  per  $n < 0$  è possibile “classificare” le possibili singolarità di  $f$ .

- 1) Se  $c_n = 0$  per ogni  $n < 0$  la singolarità si dice **eliminabile**;
- 2) se  $c_n \neq 0$  solo per un numero finito di indici negativi  $n$  la singolarità si dice un **polo**; detto  $-m$  il minimo degli  $n < 0$  per i quali  $c_n \neq 0$ ,  $z_0$  si dice polo di ordine  $m$ .
- 3) se  $c_n \neq 0$  per infiniti  $n < 0$  la singolarità si dice **essenziale**.

Esaminiamo ora il comportamento di una funzione olomorfa in un intorno di un suo punto singolare.

**Teorema 7.3** Una singolarità  $z_0$  è eliminabile per  $f$  se e solo se esistono  $\delta > 0$  e  $M \geq 0$  tali che

$$|f(z)| \leq M, \quad \forall z \in B_\delta(z_0).$$

**Dimostrazione.** Supponiamo che  $z_0$  sia una singolarità eliminabile. Allora

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

cosicché  $f(z)$  tende a  $c_0$  quando  $z$  tende a  $z_0$ . Dal momento che  $f$  ammette limite in  $z_0$ ,  $f$  è limitata in un intorno di  $z_0$ .

Viceversa, supponiamo ora che  $f$  sia limitata in un intorno  $B_\delta(z_0)$  di  $z_0$ . Sia  $R < \delta$ , e sia  $\gamma_R$  la circonferenza di centro  $z_0$  e raggio  $R$ . Allora

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}},$$

da cui, parametrizzando  $\gamma_R$  come  $w = z_0 + Re^{i\theta}$ , si ha

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(z_0 + Re^{i\theta})|}{R^{n+1}} R d\theta \leq \frac{M}{R^n}.$$

Se  $n < 0$ , facendo tendere  $R$  a zero si ottiene  $c_n = 0$  (dal momento che  $c_n$  non dipende da  $R$ ). La singolarità è pertanto eliminabile. ■

**Osservazione 7.4** Come segue dalla dimostrazione precedente, una funzione  $f$  che abbia in  $z_0$  una singolarità eliminabile ammette limite (uguale a  $c_0$ ) in  $z_0$ . È allora possibile definire (o ridefinire)  $f$  in  $z_0$  ponendola uguale a  $c_0$ ; così facendo si ottiene una funzione continua su tutto il cerchio  $\{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| < R\}$ . La funzione ottenuta in questo modo è anche olomorfa su tutto il cerchio per il Teorema di Morera, dal momento che l'integrale lungo una qualsiasi curva chiusa contenuta nel cerchio vale zero: questo fatto è evidente se la curva non gira attorno a  $z_0$ , mentre se gira attorno a  $z_0$  l'integrale vale  $2\pi i c_{-1} = 0$ . In altre parole, una singolarità eliminabile può essere “eliminata”.

**Esempio 7.5** Consideriamo la funzione, definita in  $\mathbf{C} \setminus \{0\}$  da

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{z}.$$

Dallo sviluppo in serie di Taylor di  $\operatorname{sen}(z)$  intorno a  $z_0 = 0$  si ha

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} - \dots$$

Essendo  $c_n = 0$  per ogni  $n < 0$ ,  $z_0 = 0$  è una singolarità eliminabile, e la funzione  $\tilde{f}$  definita come  $f$  per  $z \neq 0$ , ed 1 per  $z = 0$ , è olomorfa su tutto  $\mathbf{C}$ .

**Teorema 7.6** Una singolarità  $z_0$  è un polo per  $f$  se e solo se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty.$$

**Dimostrazione.** Sia  $z_0$  un polo per  $f$ , e sia  $m$  l'ordine del polo. Allora

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n,$$

con  $c_{-m} \neq 0$ . Mettendo in evidenza  $\frac{1}{(z-z_0)^m}$  si ottiene

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m} \sum_{n=-m}^{+\infty} c_n (z-z_0)^{n+m} = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}.$$

La funzione  $\varphi$  è olomorfa in  $D$ , ed ha in  $z_0$  una singolarità eliminabile, dal momento che tende a  $c_{-m}$  per  $z$  tendente a  $z_0$ . Pertanto, essendo  $c_{-m} \neq 0$ ,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|\varphi(z)|}{|z-z_0|^m} = +\infty.$$

Viceversa, supponiamo che  $|f(z)|$  diverga per  $z$  tendente a  $z_0$ . Pertanto, per ogni  $M > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che  $|f(z)| \geq M$  per  $z$  in  $B_\delta(z_0)$ . Definiamo  $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ . Essendo  $f$  olomorfa in  $D$ , e  $f$  non nulla in  $B_\delta(z_0)$ ,  $\varphi$  è olomorfa in  $B_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$ ; inoltre, su tale insieme si ha  $|\varphi(z)| \leq \frac{1}{M}$ . Pertanto, per il Teorema 7.3,  $z_0$  è una singolarità eliminabile per  $\varphi$  e quindi

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n (z-z_0)^n.$$

Siccome  $|f(z)|$  diverge,  $|\varphi(z)|$  tende a 0 quando  $z$  tende a  $z_0$ , e quindi  $d_0 = 0$ . Allora

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^m \sum_{n=0}^{+\infty} d_{n+m} (z - z_0)^n,$$

dove  $m$  è tale che  $d_m$  è il primo coefficiente non nullo nello sviluppo di Taylor di  $\varphi$ . Pertanto, detta

$$\psi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_{n+m} (z - z_0)^n,$$

ed osservato che  $\psi$  è olomorfa in  $B_\delta(z_0)$  e che  $\psi(z_0) = d_m \neq 0$ , si ha

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \frac{1}{\psi(z)}.$$

La funzione  $\frac{1}{\psi(z)}$  è olomorfa in  $B_\delta(z_0)$  ed ammette quindi uno sviluppo in serie di potenze positive. Pertanto  $f$  ha uno sviluppo in serie di Laurent con tutti i coefficienti di indice negativo nulli da  $-m - 1$  in poi, e quindi  $z_0$  è un polo di ordine  $m$  per  $f$ . ■

**Osservazione 7.7** Si noti che abbiamo anche dimostrato che se  $z_0$  è un polo di ordine  $m$  per  $f$ , allora  $z_0$  è uno zero di ordine  $m$  per  $\frac{1}{f}$ , e viceversa.

**Esempio 7.8** Consideriamo la funzione

$$f(z) = \frac{e^z}{(z + 1)^2},$$

e dimostriamo che ha un polo di ordine 2 in  $z_0 = -1$ . Si ha infatti, sviluppando  $e^z$  in un intorno di  $-1$ ,

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-1} \frac{(z + 1)^n}{n!},$$

e quindi

$$f(z) = \sum_{n=-2}^{+\infty} e^{-1} \frac{(z + 1)^n}{(n + 2)!} = \frac{e^{-1}}{(z + 1)^2} + \frac{e^{-1}}{z + 1} + \dots$$

**Teorema 7.9** Se  $z_0$  è una singolarità essenziale per  $f$ , allora per ogni  $w$  in  $\mathbf{C}$ , per ogni  $\varepsilon > 0$  e per ogni  $\delta > 0$  esiste  $z_\delta$  in  $B_\delta(z_0)$  tale che

$$|f(z_\delta) - w| \leq \varepsilon.$$

**Dimostrazione.** Supponiamo per assurdo che esista un  $w$  in  $\mathbf{C}$ , un  $\varepsilon > 0$  ed un  $\delta > 0$  tale che

$$|f(z) - w| > \varepsilon, \quad \forall z \in B_\delta(z_0) \setminus \{z_0\},$$

e definiamo  $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)-w}$ . Essendo  $f$  olomorfa in  $B_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$ , ed essendo  $f(z) \neq w$  per ogni  $z$  in  $B_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$ ,  $\varphi$  è una funzione olomorfa in  $B_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$ . Inoltre,  $|\varphi(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon}$  per ogni  $z$  in  $B_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$ , e quindi  $z_0$  è una singolarità eliminabile per  $\varphi$ . Pertanto, se supponiamo che  $z_0$  sia uno zero di ordine  $m$  per  $\varphi$  (con  $m \geq 0$ ), allora

$$\varphi(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} d_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^m \sum_{n=0}^{+\infty} d_{n+m} (z - z_0)^n = (z - z_0)^m \psi(z).$$

Ma allora

$$f(z) = w + \frac{1}{(z - z_0)^m} \frac{1}{\psi(z)},$$

con  $\psi$  olomorfa in  $B_\delta(z_0)$  e  $\psi(z_0) \neq 0$ . Pertanto, se  $m = 0$ ,  $f$  ha una singolarità eliminabile in  $z_0$ , mentre se  $m > 0$ ,  $f$  ha un polo di ordine  $m$  in  $z_0$ ; in entrambi i casi,  $z_0$  non è una singolarità essenziale per  $f$ , contro l'ipotesi. ■

**Osservazione 7.10** In particolare, se  $z_0$  è una singolarità essenziale, possiamo trovare successioni  $z_n$  convergenti a  $z_0$  e tali che  $f(z_n)$  converge a  $w$ , qualsiasi sia  $w$  in  $\mathbf{C}$ . Pertanto, né  $f$ , né  $|f|$  ammettono limite (finito o infinito) per  $z$  tendente a  $z_0$ . Si noti che il teorema precedente implica anche che se  $z_0$  è una singolarità essenziale per  $f$ , allora lo è anche per  $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ .

**Esempio 7.11** La funzione

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$$

ha in  $z_0 = 0$  una singolarità essenziale. Infatti

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n},$$

e quindi  $c_n \neq 0$  per ogni  $n \leq 0$ . Sia ora  $w$  in  $\mathbf{C}$ . Se  $w \neq 0$ , allora  $z = \frac{1}{\text{Ln}(w)}$  è tale che  $f(z) = w$ ; dal momento che, se  $w = \rho e^{i\theta}$ , si ha  $\text{Ln}(w) = \ln(\rho) + i\theta + 2k\pi i$  per qualche  $k$  in  $\mathbf{Z}$ , allora

$$\frac{1}{\text{Ln}(w)} = \frac{1}{\ln(\rho) + i[\theta + 2k\pi]} = \frac{\ln(\rho) - i[\theta + 2k\pi]}{\ln^2(\rho) + [\theta + 2k\pi]^2},$$

e quindi  $\left| \frac{1}{\text{Ln}(w)} \right| \approx \frac{C}{k}$ . Fissato  $\delta > 0$ , e scegliendo  $k$  sufficientemente grande, si ha  $\left| \frac{1}{\text{Ln}(w)} \right| \leq \delta$ , e quindi esiste  $z_\delta$  in  $B_\delta(0)$  tale che  $|f(z_\delta) - w| = 0 \leq \varepsilon$ . Se, invece,  $w = 0$ , è sufficiente scegliere  $z_\delta$  reale in  $(-\min(\frac{1}{\ln(\varepsilon)}, \delta), 0)$  per avere che  $|f(z_\delta) - 0| = |f(z_\delta)| \leq \varepsilon$ .

Si noti che, nell'esempio precedente, l'immagine tramite  $f$  di un qualsiasi cerchio di centro l'origine e raggio  $\delta$  è tutto il piano complesso privato dell'origine; tale esempio è significativo perché la situazione "intorno" ad una singolarità essenziale è sempre di questo tipo.

**Teorema 7.12 (Picard)** *Sia  $z_0$  una singolarità essenziale per  $f$ . Allora per ogni  $\delta > 0$  fissato si hanno due possibilità:*

- 1)  $f(B_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}) = \mathbf{C}$ ,  
oppure
- 2) esiste  $w$  in  $\mathbf{C}$  tale che  $f(B_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}) = \mathbf{C} \setminus \{w\}$ .

*In entrambi i casi, ogni valore è assunto infinite volte.*

## 8 Residui

Sia  $z_0$  una singolarità isolata di  $f$ , ovvero supponiamo che esista  $R > 0$  tale che  $f$  sia olomorfa nel cerchio "bucato"  $\{z \in \mathbf{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$ . Allora, per il Teorema di Laurent,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

e i coefficienti  $c_n$  sono dati da

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}},$$

dove  $\gamma$  è una qualsiasi curva chiusa e regolare a tratti che “gira” intorno a  $z_0$ . In particolare

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z).$$

**Definizione 8.1** Sia  $z_0$  una singolarità isolata di una funzione olomorfa  $f$ . Il **residuo** di  $f$  in  $z_0$  è il valore

$$\text{Res}[f(z), z_0] = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z),$$

con  $\gamma$  curva chiusa e regolare a tratti, contenuta nel dominio di olomorfia di  $f$ , e tale che  $z_0$  sia l'unica singolarità di  $f$  contenuta nell'insieme di cui  $\gamma$  è la frontiera.

È evidente dalla definizione che se  $z_0$  è una singolarità eliminabile di  $f$ , allora  $\text{Res}[f(z), z_0] = 0$  (per il Teorema di Cauchy). È altrettanto evidente che l'importanza del residuo di  $f$  in  $z_0$  è contenuta nella definizione: se  $f$  è olomorfa in un intorno di  $z_0$  (privato di  $z_0$ ), allora l'integrale di  $f$  lungo una qualsiasi curva  $\gamma$  chiusa e regolare a tratti che gira intorno a  $z_0$  è dato da

$$\int_{\gamma} f(z) = 2\pi i \text{Res}[f(z), z_0] = 2\pi i c_{-1},$$

vale a dire che possiamo calcolare l'integrale di  $f$  lungo  $\gamma$  semplicemente conoscendo il suo sviluppo di Laurent e “leggendo” il coefficiente di  $(z - z_0)^{-1}$ .

In realtà, come dimostrano gli esempi che seguono, non è necessario conoscere “tutto” lo sviluppo di Laurent per calcolare il residuo.

**Esempio 8.2** Sia  $z_0$  un polo di ordine 1 per  $f$ . Ovvero,

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

da cui, moltiplicando per  $z - z_0$ ,

$$\text{Res}[f(z), z_0] = c_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) (z - z_0).$$

Alternativamente, supponiamo che  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ , con  $\varphi$  e  $\psi$  olomorfe in un intorno di  $z_0$ ,  $\varphi(z_0) \neq 0$ , e  $\psi(z_0) = 0$ ; supponiamo inoltre che  $z_0$  sia uno zero di ordine 1 per  $\psi$  (e quindi  $z_0$  è un polo di ordine 1 per  $f$ ). Allora

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z)}{\psi'(z_0)(z - z_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n}.$$

Pertanto,

$$\text{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Sia ora  $f(z) = \frac{z}{z^n - 1}$ , sia  $k$  un intero tra 0 e  $n - 1$ , e sia  $z_0 = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ . Allora  $z_0$  è un polo di ordine 1 per  $f$ , e pertanto, dal momento che  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ , con  $\varphi(z) = z$  e  $\psi(z) = z^n - 1$ ,

$$\text{Res}[f(z), z_0] = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)} = \frac{z_0}{n z_0^{n-1}} = \frac{1}{n} z_0^2 = \frac{e^{i\frac{4k\pi}{n}}}{n}$$

In definitiva, se  $\gamma$  è una qualsiasi curva chiusa che gira attorno a  $z_0$  (ma che non contiene al suo interno nessuna delle altre singolarità di  $f$ ), allora

$$\int_{\gamma} f(z) = \frac{2\pi i e^{i\frac{4k\pi}{n}}}{n}.$$

**Esempio 8.3** Sia ora  $z_0$  un polo di ordine  $m$  per  $f$ , con  $m > 1$ . Allora

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Moltiplicando per  $(z - z_0)^m$ , si ha

$$f(z)(z - z_0)^m = c_{-m} + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^{n+m},$$

cosicché (dal momento che per “arrivare” a  $c_{-1}$  si deve derivare  $m - 1$  volte)

$$\text{Res}[f(z), z_0] = c_{-1} = \frac{1}{(m - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [f(z)(z - z_0)^m].$$

Sia  $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$ . Allora  $z_0 = i$  è un polo di ordine 2 per  $f$ . Pertanto,

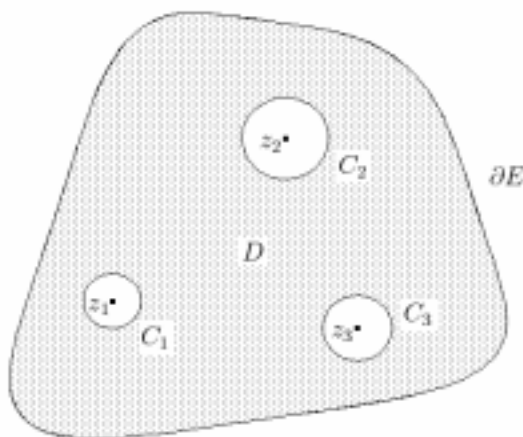
$$\text{Res}[f(z), i] = \lim_{z \rightarrow i} [f(z)(z - i)^2]' = \lim_{z \rightarrow i} \left[ \frac{1}{(z + i)^2} \right]' = \lim_{z \rightarrow i} \frac{-2}{(z + i)^3} = -\frac{i}{8}.$$

Che succede se la curva  $\gamma$ , invece di girare intorno ad una sola delle singolarità di  $f$ , ne racchiude più di una?

**Teorema 8.4 (Residui)** Sia  $f$  olomorfa in  $\bar{E}$  privato di  $n$  punti  $z_1, \dots, z_n$  appartenenti ad  $E$ . Allora

$$\int_{+\partial E} f(z) = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z), z_k] .$$

**Dimostrazione.** Al solito, consideriamo il dominio  $D$  ottenuto da  $\bar{E}$  eliminando  $n$  cerchi  $C_k$  centrati in  $z_k$  e di raggio sufficientemente piccolo da essere contenuti in  $E$ , e da contenere solo  $z_k$  tra le singolarità di  $f$  (si veda la figura).



Su  $D$  la funzione è olomorfa, e quindi

$$\int_{+\partial D} f(z) = 0 .$$

Dal momento che  $\partial D$  è l'unione di  $\partial E$  e delle frontiere degli  $n$  cerchi, e che questi ultimi sono percorsi in verso negativo (come facenti parte di  $+\partial D$ ), si ha

$$\int_{+\partial E} f(z) = \sum_{k=1}^n \int_{+\partial C_k} f(z) .$$

D'altra parte, per definizione,

$$\int_{+\partial C_k} f(z) = 2\pi i \text{Res}[f(z), z_k] ,$$

e si ha la tesi. ■

**Esempio 8.5** Sia  $f(z) = \frac{z^2+4}{z(z^2+1)}$  e sia  $\gamma$  la circonferenza di centro l'origine e raggio 4. Dal momento che  $\gamma$  contiene le tre singolarità  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = i$  e  $z_3 = -i$  di  $f$ , si ha

$$\int_{\gamma} f(z) = 2\pi i (\text{Res}[f(z), 0] + \text{Res}[f(z), i] + \text{Res}[f(z), -i]).$$

Essendo le tre singolarità dei poli di ordine 1, si ha, per l'Esempio 8.2,

$$\text{Res}[f(z), 0] = \lim_{z \rightarrow 0} f(z) z = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 + 4}{z^2 + 1} = 4,$$

$$\text{Res}[f(z), i] = \lim_{z \rightarrow i} f(z) (z - i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + 4}{z(z + i)} = -\frac{3}{2},$$

$$\text{Res}[f(z), -i] = \lim_{z \rightarrow -i} f(z) (z + i) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^2 + 4}{z(z - i)} = -\frac{3}{2},$$

e quindi

$$\int_{\gamma} f(z) = 2\pi i.$$

**Definizione 8.6** Il punto  $z = \infty$  si dice **punto singolare isolato** per  $f$  se tutte le singolarità di  $f$  si trovano a distanza finita dall'origine. In altre parole, se esiste  $R > 0$  tale che se  $f$  è singolare in  $z_0$ , allora  $|z_0| \leq R$ . Definiamo **residuo all'infinito** di una funzione  $f$  olomorfa la quantità

$$\text{Res}[f(z), \infty] = \frac{1}{2\pi i} \int_{-C} f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{+C} f(z),$$

dove  $C$  è una qualsiasi curva chiusa e regolare a tratti contenente al suo interno tutte le singolarità di  $f$ .

**Teorema 8.7** Sia  $f$  olomorfa su  $\mathbf{C}$ , tranne un numero finito di singolarità isolate  $z_1, \dots, z_n$ , con  $z_n = \infty$ . Allora

$$\sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z), z_k] = 0.$$

**Dimostrazione.** Sia  $C$  una qualsiasi curva chiusa e regolare a tratti contenente al suo interno le singolarità  $z_1, \dots, z_{n-1}$  di  $f$ . Per il teorema dei residui,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+C} f(z) = \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{Res}[f(z), z_k].$$

La tesi segue allora dal fatto che, per definizione,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+C} f(z) = -\operatorname{Res}[f(z), \infty].$$

■

Il teorema precedente può essere utile quando si chiede di calcolare l'integrale di  $f$  lungo una curva  $\gamma$  che contiene al suo interno molte singolarità della  $f$ , mentre ne ha poche all'esterno. In questo caso, può essere più semplice calcolare la somma dei residui di  $f$  nelle singolarità esterne ed all'infinito, ed ottenere il valore dell'integrale dalla formula data dal Teorema 8.7, dato che

$$\int_{\gamma} f(z) = -2\pi i \sum_{z_k \text{ esterna}} \operatorname{Res}[f(z), z_k] - 2\pi i \operatorname{Res}[f(z), \infty].$$

**Esempio 8.8** Sia  $f(z) = \frac{1}{(z-3)(z^{n-1})}$  e sia  $\gamma$  la circonferenza di centro l'origine e raggio 2. Tutte le  $n+2$  singolarità isolate di  $f$  si trovano all'interno della curva  $\gamma$ , tranne  $z_{n+1} = 3$  e  $z_{n+2} = \infty$ . Pertanto,

$$\int_{\gamma} f(z) = -2\pi i (\operatorname{Res}[f(z), 3] + \operatorname{Res}[f(z), \infty]).$$

Si ha, essendo 3 un polo di ordine 1,

$$\operatorname{Res}[f(z), 3] = \lim_{z \rightarrow 3} f(z) (z - 3) = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{1}{z^n - 1} = \frac{1}{3^n - 1}.$$

Sia ora  $R > 3$  fissato, e sia  $\gamma_R$  la circonferenza di centro l'origine e raggio  $R$ . Allora

$$\operatorname{Res}[f(z), \infty] = -\frac{1}{2\pi i} \int_{+\gamma_R} f(z).$$

Parametrizzando  $\gamma_R$  come  $Re^{i\theta}$ , si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[f(z), \infty] &= -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{iR e^{i\theta}}{(R e^{i\theta} - 3)(R^n e^{in\theta} - 1)} d\theta \\ &= -\frac{1}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{(e^{i\theta} - \frac{3}{R})(e^{in\theta} - \frac{1}{R^n})} d\theta. \end{aligned}$$

Dal momento che  $\text{Res}[f(z), \infty]$  non dipende da  $R$ , possiamo far tendere  $R$  ad infinito, ottenendo  $\text{Res}[f(z), \infty] = 0$  (si noti che anche l'integrale converge a zero essendo  $n \neq 0$ ). Pertanto,

$$\int_{\gamma} f(z) = \frac{2\pi i}{1 - 3^n}.$$

**Esempio 8.9** Sia

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a \cos(\theta)},$$

con  $a$  reale e tale che  $|a| < 1$ . Per calcolare  $I$ , effettuiamo la seguente sostituzione:  $z = e^{i\theta}$ , da cui  $dz = i e^{i\theta} d\theta = iz d\theta$  e, soprattutto,

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right).$$

Si ha allora

$$I = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z} \frac{1}{1 + \frac{a}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)} = \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{az^2 + 2z + a}.$$

Il polinomio di secondo grado  $az^2 + 2z + a$  ha come radici

$$-z_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - a^2}}{a} = -\frac{1}{a} \pm \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1},$$

e di queste una sola,  $z_+$ , è interna al cerchio di centro l'origine e raggio 1. Si ha allora

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{az^2 + 2z + a} = 2\pi i \text{Res} \left[ \frac{1}{az^2 + 2z + a}, z_+ \right],$$

ed essendo  $az^2 + 2z + a = a(z - z_+)(z - z_-)$ ,

$$\text{Res} \left[ \frac{1}{az^2 + 2z + a}, z_+ \right] = \lim_{z \rightarrow z_+} \frac{z - z_+}{a(z - z_+)(z - z_-)} = \frac{1}{a(z_+ - z_-)} = \frac{1}{2\sqrt{1 - a^2}}.$$

Pertanto,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a \cos(\theta)} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

Il metodo svolto nell'esercizio precedente si può applicare al calcolo di integrali della forma

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos(\theta), \sin(\theta)) d\theta,$$

dove  $R(x, y)$  è una funzione razionale nelle variabili  $x$  e  $y$  (ovvero, il rapporto di due polinomi in  $x$  e  $y$ ). Effettuando la stessa sostituzione  $z = e^{i\theta}$ , ed osservando che

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right),$$

l'integrale si trasforma in

$$I = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z} R \left( \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right) \right) dz,$$

e l'integranda è una funzione razionale di  $z$  (ovvero, il rapporto di due polinomi nella variabile  $z$ ). A questo punto l'integrale richiesto non è altro che  $2\pi$  volte la somma dei residui della funzione  $R$  nei punti singolari interni alla circonferenza di centro l'origine e raggio 1 (o la somma, cambiata di segno, dei residui di  $R$  nei punti singolari esterni alla circonferenza, incluso  $z = \infty$ ).

**Esempio 8.10** Vogliamo calcolare

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos^2(\theta)}{1 + \sin^2(\theta)} d\theta.$$

Sostituendo  $z = e^{i\theta}$ , ed effettuando i calcoli, si ha

$$I = -\frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{z^4 + 6z^2 + 1}{z(z^4 - 6z^2 + 1)} dz.$$

Il polinomio  $z^4 - 6z^2 + 1$  ha quattro radici reali:  $z_2 = \pm(\sqrt{2} - 1)$  e  $z_4 = \pm(\sqrt{2} + 1)$ . Di queste, solo le prime due sono dentro il cerchio di centro l'origine e raggio 1. Pertanto

$$I = -2\pi (\text{Res}[f(z), 0] + \text{Res}[f(z), z_1] + \text{Res}[f(z), z_2]) = \pi(3\sqrt{2} - 2).$$

Per calcolare i residui in  $z_1$  e  $z_2$ , conviene usare la formula con la derivata, piuttosto che il limite. Per esercizio, calcolare lo stesso integrale considerando i residui in  $z_3, z_4$ , e all'infinito (facendo attenzione, perché il residuo all'infinito non è zero).

**Definizione 8.11** Sia  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione integrabile secondo Riemann su ogni intervallo compatto di  $\mathbf{R}$ . Definiamo **valore principale secondo Cauchy** dell'integrale su  $\mathbf{R}$  di  $f$  il limite per  $R$  tendente ad infinito dell'integrale di  $f$  sull'intervallo  $(-R, R)$  (se esiste):

$$\mathbf{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx .$$

Si osservi che il valore principale non coincide (in generale) né con l'integrale improprio secondo Riemann su  $\mathbf{R}$ , né con l'integrale secondo Lebesgue su  $\mathbf{R}$ . Ad esempio,

$$\mathbf{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sgn}(x) dx = 0 ,$$

mentre  $\operatorname{sgn}(x)$  non è integrabile é in senso improprio secondo Riemann, né secondo Lebesgue. In generale, se  $f$  è una funzione dispari su  $\mathbf{R}$ ,

$$\mathbf{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0 ,$$

indipendentemente da  $f$ .

Analogamente, se  $f : (a, b) \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbf{R}$  è una funzione non definita in  $x_0$ , si pone

$$\mathbf{vp} \int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left( \int_a^{x_0-\delta} f(x) dx + \int_{x_0+\delta}^b f(x) dx \right) ,$$

sempre se il limite esiste. Ad esempio,

$$\mathbf{vp} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = 0 .$$

Se  $f$  è definita su  $\mathbf{R}$  meno alcuni punti, il valore principale di  $f$  su  $\mathbf{R}$  si ottiene facendo due (o più) limiti "simmetrici". Ad esempio,

$$\mathbf{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x} = 0 .$$

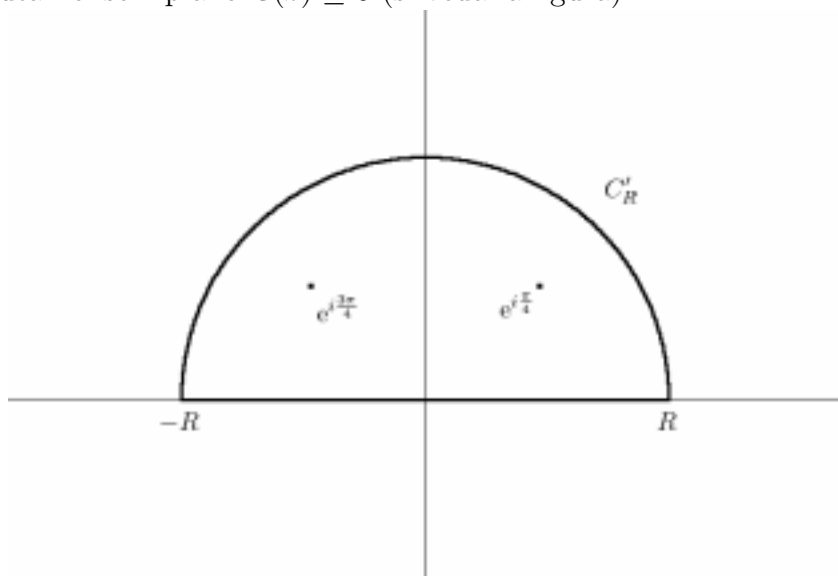
Ovviamente, se  $f$  è integrabile in senso improprio secondo Riemann (sia su  $\mathbf{R}$ , sia intorno ad una singolarità), allora esiste il valore principale dell'integrale di  $f$ , e si ha

$$\mathbf{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \mathbf{R} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx .$$

**Esempio 8.12** Sia

$$I = \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$

La funzione  $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$  ammette come prolungamento analitico la funzione  $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ , definita ed olomorfa su  $\mathbf{C}$  privato delle quattro radici quarte di  $-1$ . Sia  $R > 1$  e sia  $C_R$  la curva chiusa formata dal segmento dell'asse  $x$  con  $-R \leq x \leq R$ , e dalla semicirconferenza  $C'_R$  di centro l'origine e raggio  $R$  contenuta nel semipiano  $\Im(z) \geq 0$  (si veda la figura).



Per il teorema dei residui si ha

$$\int_{C_R} f(z) = 2\pi i \left( \text{Res} \left[ f(z), e^{i\pi/4} \right] + \text{Res} \left[ f(z), e^{i3\pi/4} \right] \right),$$

essendo  $e^{i\pi/4}$  e  $e^{i3\pi/4}$  i due poli di  $f$  contenuti all'interno di  $C_R$ . Essendo poli di ordine 1 si ha

$$\text{Res} \left[ f(z), e^{i\pi/4} \right] = \frac{1}{4e^{i3\pi/4}} = \frac{e^{-i3\pi/4}}{4}, \quad \text{Res} \left[ f(z), e^{i3\pi/4} \right] = \frac{1}{4e^{i9\pi/4}} = \frac{e^{-i\pi/4}}{4},$$

e quindi

$$\int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^4} + \int_{C'_R} \frac{1}{1+z^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}. \quad (8.1)$$

Parametrizzando  $C'_R$  come  $Re^{i\theta}$ , con  $0 \leq \theta \leq \pi$ , si ha

$$\left| \int_{C'_R} \frac{1}{1+z^4} \right| \leq \int_0^\pi \frac{R}{|1+R^4e^{4i\theta}|} d\theta \leq \frac{\pi}{R^3}.$$

Facendo tendere  $R$  ad infinito in (8.1), si trova

$$\mathbf{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Il metodo utilizzato nell'esempio precedente funziona perché  $\frac{1}{1+z^4}$  tende a zero all'infinito più velocemente di  $z$ . Abbiamo infatti il seguente teorema generale.

**Teorema 8.13** *Sia  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione che ammette un prolungamento analitico  $f(z)$  per  $\Im(z) \geq 0$ , e supponiamo che  $f$  sia olomorfa in  $\Im(z) \geq 0$ , tranne un numero finito di singolarità  $z_1, \dots, z_n$  non appartenenti all'asse reale, e che esistano  $M > 0$ ,  $\delta > 0$  e  $R_0 > 0$  tali che*

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^{1+\delta}}, \quad \forall z : |z| > R_0.$$

Allora,

$$\mathbf{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z), z_k].$$

**Dimostrazione.** Scelto  $R > R_0$  e tale che  $|z_k| \leq R$  per ogni  $k$  da 1 a  $n$ , definiamo  $C_R$  come nell'Esempio 8.12. Si ha allora

$$\int_{C_R} f(z) = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C'_R} f(z) = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z), z_k].$$

D'altra parte,

$$\left| \int_{C'_R} f(z) \right| \leq \int_0^\pi \frac{MR}{R^{1+\delta}} d\theta = \frac{M\pi}{R^\delta},$$

e quindi

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C'_R} f(z) = 0,$$

da cui segue la tesi. ■

Per poter integrare altre funzioni sull'asse reale, enunciamo e dimostriamo il seguente teorema.

**Teorema 8.14 (Jordan)** Sia  $a > 0$  e sia  $f$ , definita per  $\Im(z) \geq 0$  tranne al più un numero finito di singolarità, tale che

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \sup_{0 \leq \arg(z) \leq \pi} |f(z)| = 0.$$

Allora

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C'_R} f(z) e^{iaz} = 0,$$

dove  $C'_R$  è la semicirconferenza di raggio  $R$  centrata nell'origine, e contenuta nel semipiano  $\Im(z) \geq 0$ .

**Dimostrazione.** Parametrizzando  $C'_R$  come  $Re^{i\theta}$  con  $0 \leq \theta \leq \pi$ , si ha

$$\left| \int_{C'_R} f(z) e^{iaz} \right| \leq \int_0^\pi |f(z)| e^{-aR \sin(\theta)} R d\theta.$$

Sia ora  $\varepsilon > 0$  e sia  $R \geq R_0$  tale che  $|f(z)| \leq \varepsilon$  su  $C'_R$  (tale  $R_0$  esiste per le ipotesi su  $f$ ). Allora

$$\left| \int_{C'_R} f(z) e^{iaz} \right| \leq \varepsilon R \int_0^\pi e^{-aR \sin(\theta)} d\theta = 2\varepsilon R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR \sin(\theta)} d\theta.$$

Dal momento che  $\sin(\theta) \geq \frac{2}{\pi} \theta$  per ogni  $\theta$  in  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , si ha

$$\left| \int_{C'_R} f(z) e^{iaz} \right| \leq 2\varepsilon R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2aR\theta}{\pi}} d\theta = \frac{\pi}{a} \varepsilon (1 - e^{-aR}),$$

e quindi

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \int_{C'_R} f(z) e^{iaz} \right| \leq \frac{\pi \varepsilon}{a},$$

da cui la tesi per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ . ■

Il teorema precedente permette di ottenere il seguente risultato.

**Teorema 8.15** Sia  $a > 0$  e sia  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione che ammette un prolungamento analitico definito per  $\Im(z) \geq 0$ , tranne al più un numero finito di singolarità fuori dall'asse reale, e tale che

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \sup_{0 \leq \arg(z) \leq \pi} |f(z)| = 0.$$

Allora

$$\mathbf{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} [f(z) e^{iaz}, z_k],$$

dove  $z_1, \dots, z_k$  sono le singolarità di  $f$  nel semipiano  $\Im(z) > 0$ .

**Dimostrazione.** Prendendo  $C_R$  come nell'Esempio 8.12, si ha

$$\int_{C_R} f(z) e^{iaz} = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} [f(z) e^{iaz}, z_k].$$

Dal momento che

$$\int_{C_R} f(z) e^{iaz} = \int_{C'_R} f(z) e^{iaz} + \int_{-R}^R f(x) e^{iax} dx,$$

si ha la tesi per il Teorema 8.14. ■

Ovviamente, l'integrale calcolato dal teorema precedente va considerato come somma di due integrali:

$$\mathbf{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iax} dx = \mathbf{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(ax) dx + i \mathbf{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(ax) dx,$$

cosicché il teorema precedente permette di calcolare integrali di funzioni del tipo  $f(x) \cos(ax)$  e  $f(x) \sin(ax)$ .

**Osservazione 8.16** Se  $a < 0$ , un ragionamento analogo fatto per la dimostrazione del Teorema 8.15, ma con una semicirconferenza contenuta nel semipiano  $\Im(z) < 0$ , permette di dimostrare il seguente teorema.

**Teorema 8.17** Sia  $a < 0$  e sia  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione che ammette un prolungamento analitico definito per  $\Im(z) \leq 0$ , tranne al più un numero finito di singolarità fuori dall'asse reale, e tale che

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \sup_{-\pi \leq \arg(z) \leq 0} |f(z)| = 0.$$

Allora

$$\mathbf{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iax} dx = -2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} [f(z) e^{iaz}, z_k],$$

dove  $z_1, \dots, z_k$  sono le singolarità di  $f$  nel semipiano  $\Im(z) < 0$ .

**Esempio 8.18** Ad esempio, sia

$$I = \mathbf{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx = \Re \left( \mathbf{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx \right).$$

Detta  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ ,  $f$  è olomorfa nel semipiano  $\Im(z) \geq 0$  (privato del punto  $z = i$ ), ed inoltre

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \sup_{0 \leq \arg(z) \leq \pi} |f(z)| \leq \sup_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{1}{|z|^2 - 1} = 0.$$

Per il Teorema 8.15 si ha allora

$$\mathbf{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx = 2\pi i \operatorname{Res} [f(z) e^{iz}, i] = 2\pi i \frac{e^{i^2}}{2i} = \frac{\pi}{e}.$$

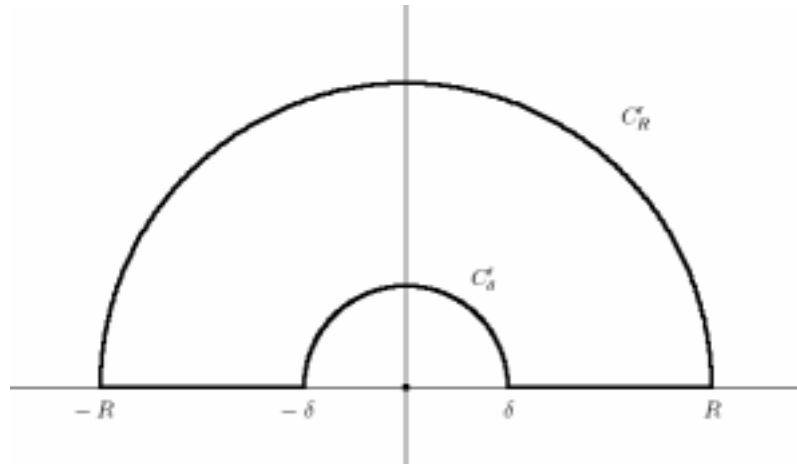
**Esempio 8.19** La tecnica della dimostrazione del teorema precedente permette di trattare (alle volte) anche i casi in cui la funzione  $f(z)$  abbia delle singolarità sull'asse delle  $x$ . Ad esempio, sia

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \mathbf{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \Im \left( \mathbf{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right).$$

Dal momento che  $\frac{e^{ix}}{x}$  è singolare per  $x = 0$ , quest'ultimo integrale va pensato come

$$\mathbf{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left( \int_{-R}^{-\delta} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\delta}^R \frac{e^{ix}}{x} dx \right).$$

Consideriamo allora la curva  $\gamma_{R,\delta}$  così formata: la semicirconferenza  $C'_R$  di centro l'origine e raggio  $R$ , percorsa in senso antiorario nel semipiano  $\Im(z) \geq 0$ , il segmento  $[-R, -\delta]$  sull'asse reale, la semicirconferenza  $C'_\delta$  di centro l'origine e raggio  $\delta$  percorsa in senso orario nel semipiano  $\Im(z) \geq 0$ , ed infine il segmento  $[\delta, R]$  sull'asse reale (si veda la figura).



Dal momento che  $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$  è olomorfa nel dominio racchiuso da  $\gamma_{R,\delta}$ , si ha

$$0 = \int_{\gamma_{R,\delta}} f(z) = \int_{+C'_R} f(z) + \int_{-R}^{-\delta} f(x) dx + \int_{-C'_\delta} f(z) + \int_{\delta}^R f(x) dx.$$

Siccome  $\frac{1}{z}$  tende a zero uniformemente in  $\arg(z)$  quando  $|z|$  tende ad infinito, il Teorema 8.14 implica che

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C'_R} f(z) = 0.$$

Calcoliamo ora

$$\int_{-C'_\delta} f(z) = - \int_0^\pi \frac{e^{i\delta e^{i\theta}}}{\delta e^{i\theta}} i\delta e^{i\theta} d\theta = -i \int_0^\pi e^{i\delta e^{i\theta}} d\theta,$$

cosicché

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{-C'_\delta} f(z) = -i\pi.$$

Pertanto,

$$\mathbf{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = i\pi,$$

e quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

## 9 Residuo logaritmico

### Teorema di Rouché e Teorema di Brouwer

Sia  $f : \bar{E} \rightarrow \mathbf{C}$  una funzione olomorfa tranne al più un numero finito di singolarità  $w_1, \dots, w_k$ , e consideriamo la funzione

$$\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Ovviamente,  $\varphi$  è definita (ed olomorfa) per  $z \neq w_j$ , con  $j = 1, \dots, k$ , e per  $z \neq z_j$ , con  $j = 1, \dots, h$ , dove  $z_j$  in  $E$  è tale che  $f(z_j) = 0$ .

Supponiamo che  $z_j$  sia uno zero di ordine  $n_j$  per  $f$ . Allora  $f(z) = (z - z_j)^{n_j} f_1(z)$ , con  $f_1$  olomorfa e tale che  $f_1(z_j) \neq 0$ . Pertanto,

$$\varphi(z) = \frac{n_j(z - z_j)^{n_j-1} f_1(z) + (z - z_j)^{n_j} f_1'(z)}{(z - z_j)^{n_j} f_1(z)} = \frac{n_j f_1(z) + (z - z_j) f_1'(z)}{(z - z_j) f_1(z)}.$$

Dal momento che  $f_1(z_j) \neq 0$ , ne segue che  $\varphi$  ha in  $z_j$  un polo di ordine 1. Inoltre,

$$\text{Res}[\varphi(z), z_j] = \lim_{z \rightarrow z_j} (z - z_j) \varphi(z) = \lim_{z \rightarrow z_j} \frac{n_j f_1(z) + (z - z_j) f_1'(z)}{f_1(z)} = n_j.$$

Sia ora  $w_j$  un polo di ordine  $p_j$  per  $f$ . Allora  $f(z) = \frac{f_2(z)}{(z - w_j)^{p_j}}$ , con  $f_2$  olomorfa e tale che  $f_2(w_j) \neq 0$ . Pertanto,

$$\varphi(z) = \frac{-p_j(z - w_j)^{-p_j-1} f_2(z) + (z - w_j)^{-p_j} f_2'(z)}{(z - w_j)^{-p_j} f_2(z)} = \frac{-p_j f_2(z) + (z - w_j) f_2'(z)}{(z - w_j) f_2(z)}.$$

Ricordando che  $f_2(w_j) \neq 0$ ,  $\varphi$  ha in  $w_j$  un polo di ordine 1 e residuo

$$\text{Res}[\varphi(z), w_j] = \lim_{z \rightarrow w_j} (z - w_j) \varphi(z) = \lim_{z \rightarrow w_j} \frac{-p_j f_2(z) + (z - w_j) f_2'(z)}{f_2(z)} = -p_j.$$

Abbiamo pertanto il seguente teorema.

**Teorema 9.1** Sia  $f : \bar{E} \rightarrow \mathbf{C}$  olomorfa tranne un numero finito di punti  $w_1, \dots, w_k$ , e supponiamo che  $f(z) \neq 0$  su  $\partial E$ . Allora

$$N(f, E) - P(f, E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial E} \frac{f'(z)}{f(z)},$$

dove  $N(f, E)$  è il numero degli zeri di  $f$  in  $E$  (contati secondo l'ordine), e  $P(f, E)$  è il numero dei poli di  $f$  in  $E$  (contati secondo l'ordine).

**Dimostrazione.** Come dimostrato precedentemente,  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  ha in  $E$  poli sia negli zeri  $z_1, \dots, z_h$  di  $f$  in  $E$  che nei poli  $w_1, \dots, w_k$  di  $f$  in  $E$ . Per il teorema dei residui,

$$\begin{aligned} \int_{+\partial E} \frac{f'(z)}{f(z)} &= 2\pi i \left[ \sum_{j=1}^h \operatorname{Res} \left[ \frac{f'(z)}{f(z)}, z_j \right] + \sum_{j=1}^k \operatorname{Res} \left[ \frac{f'(z)}{f(z)}, w_j \right] \right] \\ &= 2\pi i \left[ \sum_{j=1}^h n_j - \sum_{j=1}^k p_j \right], \end{aligned}$$

da cui la tesi, essendo

$$N(f, E) = \sum_{j=1}^h n_j, \quad P(f, E) = \sum_{j=1}^k p_j.$$

■

Il teorema precedente, pertanto, permette di calcolare la differenza tra il numero degli zeri ed il numero di poli di  $f$  all'interno di  $E$ . Diamo ora un'interpretazione geometrica della formula appena dimostrata. Infatti,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = [\ln(f(z))]',$$

cosicché

$$N(f, E) - P(f, E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial E} [\ln(f(z))]'.$$

Ricordando che  $\ln(f(z)) = \ln(|f(z)|) + i \operatorname{Arg}(f(z))$ , si ha

$$N(f, E) - P(f, E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial E} [\ln(|f(z)|) + i \operatorname{Arg}(f(z))]'.$$

Se supponiamo che  $+\partial E$  sia parametrizzata su  $[a, b]$ , allora

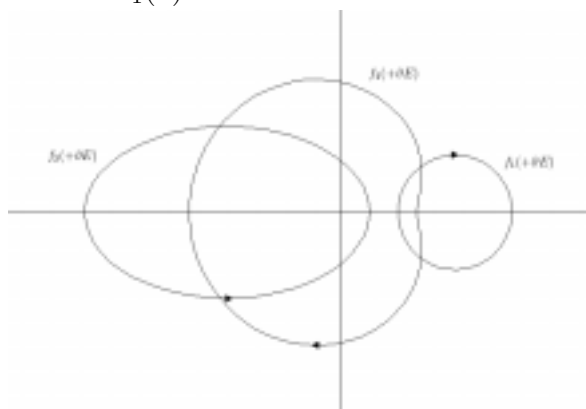
$$N(f, E) - P(f, E) = \frac{\ln(|f(b)|) - \ln(|f(a)|) + i [\operatorname{Arg}(f(b)) - \operatorname{Arg}(f(a))]}{2\pi i}.$$

Essendo  $\ln(|f(b)|) - \ln(|f(a)|) = 0$  (perché  $f(b) = f(a)$ ), si ha allora

$$N(f, E) - P(f, E) = \frac{\operatorname{Arg}(f(b)) - \operatorname{Arg}(f(a))}{2\pi} = \frac{\operatorname{Var}_{+\partial E} \operatorname{Arg}(f(z))}{2\pi}. \quad (9.1)$$

In altre parole, il numero degli zeri di  $f$  in  $E$  meno il numero dei poli di  $f$  in  $E$  è dato dalla variazione dell'argomento di  $f(z)$  quando  $z$  si muove su  $+\partial E$ , ovvero dal numero di giri (contati con il segno dato dal verso di percorrenza, positivo per il verso antiorario, negativo per il verso orario) che compie attorno all'origine la curva  $f(+\partial E)$ .

**Esempio 9.2** Consideriamo le funzioni  $f_1(z) = 1 - \frac{1}{2z}$ ,  $f_2(z) = \frac{z - \frac{1}{3}}{z^2}$  e  $f_3 = \frac{(z - \frac{1}{2})^2}{z}$ , definite su  $E = B_1(0)$ .



Allora  $f_1$  ha uno zero ed un polo in  $E$ ,  $f_2$  ha due poli ed uno zero, mentre  $f_3$  ha due zeri ed un polo. Pertanto, come risulta dalla figura,  $f_1(+\partial E)$  non gira intorno all'origine,  $f_2(+\partial E)$  compie un giro in verso orario attorno all'origine, mentre  $f_3(+\partial E)$  compie un giro in verso antiorario attorno all'origine.

Il risultato del Teorema 9.1 permette di stimare il numero degli zeri di una funzione olomorfa all'interno di un insieme.

**Teorema 9.3 (Rouché)** Siano  $f$  e  $\varphi$  due funzioni olomorfe su  $\overline{E}$ , e supponiamo che si abbia

$$|f(z)| > |\varphi(z)|, \quad \forall z \in \partial E.$$

Allora  $N(f + \varphi, E) = N(f, E)$ .

**Dimostrazione.** Sia  $F(z) = f(z) + \varphi(z)$ ; allora sia  $F$  che  $f$  soddisfano le ipotesi del Teorema 9.1. Infatti, se  $z$  è in  $\partial E$  si ha  $|F(z)| = |f(z) + \varphi(z)| \geq$

$|f(z)| - |\varphi(z)| > 0$ , e  $|f(z)| > |\varphi(z)| \geq 0$ ; pertanto, né  $F$  né  $f$  hanno zeri su  $\partial E$ . Si ha allora che

$$N(F, E) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Var}_{+\partial E} \operatorname{Arg}(F(z)), \quad N(f, E) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Var}_{+\partial E} \operatorname{Arg}(f(z)).$$

Ricordando che  $\operatorname{Arg}(z) - \operatorname{Arg}(w) = \operatorname{Arg}\left(\frac{z}{w}\right)$ , si vede facilmente che

$$N(F, E) - N(f, E) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Var}_{+\partial E} \operatorname{Arg}\left(\frac{F(z)}{f(z)}\right).$$

Sia ora  $w(z) = \frac{F(z)}{f(z)} = 1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}$ . Allora, se  $z$  è in  $\partial E$ ,

$$|w(z) - 1| = \left| \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right| < 1,$$

e pertanto la curva  $w(+\partial E)$  è tutta strettamente contenuta all'interno del cerchio di centro 1 e raggio 1; in altre parole,  $w(+\partial E)$  non gira attorno all'origine, e pertanto

$$N(F, E) - N(f, E) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Var}_{+\partial E} \operatorname{Arg}(w(z)) = 0,$$

come volevasi dimostrare. ■

**Esempio 9.4** Un'applicazione del Teorema di Rouché è la seguente. Sia  $P(z) = z^3 + 2z^2 + 5z + 1$ . Allora, se  $|z| = 1$ , si ha  $|z^3 + 2z^2 + 1| \leq 4 < 5 = |5z|$ . Pertanto,  $f(z) = 5z$  e  $\varphi(z) = z^3 + 2z^2 + 1$  soddisfano le ipotesi del Teorema di Rouché e quindi  $P(z)$  ha tanti zeri in  $B_1(0)$  quanti ne ha  $f(z)$ , ovvero uno ed uno solo. Inoltre, se  $|z| = 4$ , si ha  $|2z^2 + 5z + 1| \leq 53 < 64 = |z^3|$ , cosicché  $P(z)$  ha tanti zeri in  $B_4(0)$  quanti ne ha  $f(z) = z^3$ , ovvero esattamente tre.

Sia ora  $R > 1$  e  $k$  intero e maggiore di  $\frac{R}{\ln(R)}$ ; allora, se  $|z| = R$  si ha  $|e^z| = e^{\Re(z)} \leq e^R < R^k = |z|^k$ . Pertanto,  $g(z) = z^k + e^z$  ha, in  $B_R(0)$ , esattamente  $k$  zeri (tanti quanti la funzione  $f(z) = z^k$ ).

Dal momento che se  $P_n(z)$  è un polinomio di grado  $n$ , a partire da un certo raggio  $R$  in poi si ha che il termine di grado massimo maggiora in modulo la somma di tutti gli altri sulla curva  $|z| = R$ , dal Teorema di Rouché discende una nuova dimostrazione del Teorema fondamentale dell'algebra.

**Teorema 9.5** *Un polinomio di grado  $n$  ha esattamente  $n$  radici complesse.*

**Dimostrazione.** Sia

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k = a_n z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k,$$

con  $a_n \neq 0$ . Se  $|z| = R$ , allora

$$|a_n z^n| = |a_n| R^n, \quad \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| R^k.$$

Dato che  $a_n \neq 0$ , esiste  $R_0 > 0$  tale che

$$|a_n| R^n > \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| R^k, \quad \forall R \geq R_0.$$

Pertanto,  $P_n(z)$  ha tanti zeri in  $B_R(0)$  quanti ne ha  $f(z) = z^n$ , ovvero esattamente  $n$ . Siccome il numero di zeri è indipendente da  $R$ , il teorema è dimostrato. ■

Una seconda osservazione che discende dalla formula (9.1) è la seguente: se  $f$  è olomorfa in  $\overline{E}$ , diversa da zero su  $\partial E$ , e tale che  $\text{Var}_{+\partial E} \text{Arg}(f(z)) > 0$ , allora  $f$  ha almeno uno zero interno ad  $E$ . Da questa osservazione discende il prossimo teorema.

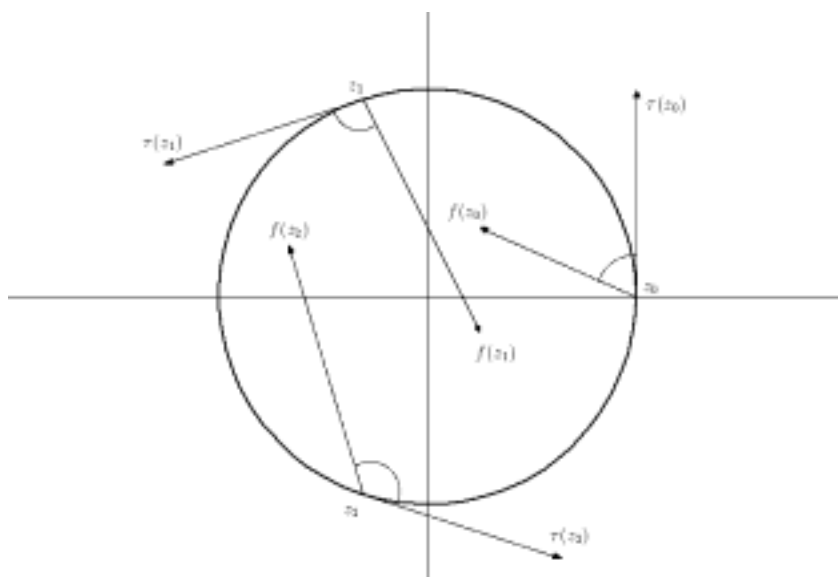
**Teorema 9.6 (Brouwer)** *Sia  $f : \overline{B_1(0)} \rightarrow \overline{B_1(0)}$  una funzione olomorfa. Allora esiste  $z_0$  in  $\overline{B_1(0)}$  tale che  $f(z_0) = z_0$ . Il punto  $z_0$  si dice **punto fisso** di  $f$  su  $\overline{B_1(0)}$ .*

**Dimostrazione.** Se esiste  $z_0$  in  $\partial B_1(0)$  tale che  $f(z_0) = z_0$ , non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo allora che  $f(z) \neq z$  per ogni  $z$  in  $\partial B_1(0)$ , e dimostriamo che

$$\frac{1}{2\pi} \text{Var}_{+\partial B_1(0)} \text{Arg}(f(z) - z) = 1.$$

Per il Teorema 9.1 si ha allora che  $N(f(z) - z, B_1(0)) = 1$ , e quindi esiste esattamente un punto fisso di  $f$  in  $B_1(0)$ .

Iniziamo con l'osservare che, dal momento che  $f(z) \neq z$  per ogni  $z$  su  $\partial B_1(0)$ , il vettore  $f(z) - z$  è sempre diverso da zero e, una volta "applicato" in  $z$ , punta sempre all'interno di  $B_1(0)$  (si veda la figura).



Sia ora  $z$  su  $\partial B_1(0)$ , che consideriamo percorsa in verso antiorario, e sia  $\tau(z)$  il vettore tangente a  $\partial B_1(0)$  nel punto  $z$ . Dal momento che il vettore  $f(z) - z$  punta all'interno di  $B_1(0)$ , l'angolo formato tra  $\tau(z)$  e  $f(z) - z$  sarà — sempre — compreso tra  $0$  e  $\pi$  (non potendo mai essere né  $0$ , né  $\pi$ , perché il vettore  $f(z) - z$  non è mai tangente a  $\partial B_1(0)$ ). D'altra parte, dal momento che tale angolo varia con continuità (perché sia  $f(z) - z$  che  $\tau(z)$  sono funzioni continue), se consideriamo  $\text{Arg}(\tau(1)) = \frac{\pi}{2}$  e  $0 \leq \text{Arg}(f(1) - 1) < 2\pi$ , l'angolo fra  $f(z) - z$  e  $\tau(z)$  è proprio

$$\text{Arg}(f(z) - z) - \text{Arg}(\tau(z)).$$

Pertanto,

$$0 < \text{Arg}(f(z) - z) - \text{Arg}(\tau(z)) < \pi, \quad \forall z \in \partial B_1(0).$$

Quindi, se  $w_0 = 1$  (corrispondente a  $\theta = 0$  nella parametrizzazione  $e^{i\theta}$  di  $\partial B_1(0)$ ), si ha

$$0 < \text{Arg}(f(w_0) - w_0) - \frac{\pi}{2} < \pi,$$

mentre se  $w_1 = 1$  (corrispondente a  $\theta = 2\pi$  nella parametrizzazione  $e^{i\theta}$  di  $\partial B_1(0)$ ), si ha

$$0 < \text{Arg}(f(w_1) - w_1) - \frac{5\pi}{2} < \pi.$$

In definitiva,

$$\pi < \text{Arg}(f(w_1) - w_1) - \text{Arg}(f(w_0) - w_0) = \text{Var}_{+\partial B_1} \text{Arg}(f(z) - z) < 3\pi,$$

da cui segue  $N(f(z) - z, B_1(0)) = 1$ , come volevasi dimostrare. ■

**Osservazione 9.7** L'enunciato del teorema precedente si può così modificare: se  $f : \overline{B_1(0)} \rightarrow \overline{B_1(0)}$  olomorfa non ha punti fissi sulla frontiera di  $B_1(0)$ , allora ne ha uno ed uno solo all'interno. Si noti che è possibile che la funzione abbia tutti punti fissi sulla frontiera, e che ne abbia più di uno; ad esempio, la funzione  $f(z) = z^n$  ha un punto fisso interno (l'origine), e  $n - 1$  punti fissi sulla frontiera (le radici  $(n - 1)$ -esime di 1). Dal momento che  $f$  è anche olomorfa da  $\overline{B_r(0)}$  in sé non appena  $r < 1$  (se  $r > 1$  la  $f$  non porta  $\overline{B_r(0)}$  in sé), ma non ha punti fissi sulla frontiera di  $B_r(0)$ , “sopravvive” all'interno l'unico punto fisso  $z = 0$ .

Se  $|z| = 1$ , allora  $|e^z| \leq e^{\Re(z)} \leq e$ . Pertanto,  $f(z) = \frac{e^z}{3}$  porta  $\overline{B_1(0)}$  in sé ed ha dunque almeno un punto fisso, che è il numero reale  $x_0$  tale che  $e^{x_0} = x_0$ .

**Osservazione 9.8** Nella dimostrazione del Teorema di Brouwer, l'olomorfia di  $f$  è stata usata solo per poter applicare la formula (9.1), mentre per calcolare la variazione di  $\text{Arg}(f(z) - z)$  quando  $z$  si muove su  $\partial B_1(0)$  è stata usata solo la continuità di  $f(z) - z$ . È allora possibile estendere il Teorema di Brouwer alle funzioni continue nel seguente modo. Supponiamo che  $f(z) \neq z$  per ogni  $z$  in  $\overline{B_1(0)}$  (ovvero, che  $f$  non abbia punti fissi). Ripetendo lo stesso ragionamento di prima,  $\text{Var}_{+\partial B_1(0)} \text{Arg}(f(z) - z) = 2\pi$ ; inoltre, essendo  $f(z) - z$  continua, anche  $\text{Arg}(f(z) - z)$  lo è, e quindi anche la funzione  $a(r)$  definita da

$$r \mapsto a(r) = \text{Var}_{+\partial B_r(0)} \text{Arg}(f(z) - z),$$

al variare di  $r$  in  $(0, 1]$ . Dal momento che  $\text{Var}_{+\partial B_r(0)} \text{Arg}(f(z) - z)$  può assumere come valori solo multipli interi di  $2\pi$ , ne segue che  $a(r)$  è costante. Pertanto, per ogni  $r$  in  $(0, 1]$ ,  $a(r) = 2\pi$ . Sia ora  $w_0 = f(0)$ , e sia  $r_0 = |w_0|$  (ovvero la distanza tra 0 e  $f(0)$ ). Essendo  $f(z) \neq z$  per ogni  $z$ , allora  $r_0 > 0$ . Essendo  $f$  continua, per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta_\varepsilon > 0$  tale che  $|z| \leq \delta_\varepsilon$  implica  $|f(z) - w_0| \leq \varepsilon$ . Scegliamo  $\varepsilon = \frac{r_0}{4}$  e sia  $r_1 = \min(\delta_\varepsilon, \frac{r_0}{4})$ . Facendo variare  $z$  su

$\partial B_{r_1}(0)$  si ha  $|f(z) - w_0| \leq \varepsilon = \frac{r_0}{4}$ , e quindi  $|f(z) - z - w_0| \leq |f(z) - w_0| + |z| \leq \frac{r_0}{2}$ . In altre parole, la curva  $[f(z) - z](+\partial B_{r_1}(0))$  è tutta contenuta nel cerchio di centro  $w_0$  e raggio  $\frac{r_0}{2}$ , e tale cerchio *non contiene l'origine*. Pertanto,  $[f(z) - z](+\partial B_{r_1}(0))$  non gira intorno all'origine, e quindi

$$2\pi = a(r_1) = \operatorname{Var}_{+\partial B_{r_1}(0)} \operatorname{Arg}(f(z) - z) = 0,$$

da cui l'assurdo.

A questo punto, dato che le funzioni continue da  $\overline{B_1(0)}$  in sé ammettono punto fisso, ammette punto fisso una funzione continua  $g$  che porta un qualsiasi sottoinsieme  $E$  di  $\mathbf{C}$  omeomorfo a  $\overline{B_1(0)}$  in sé. Infatti, sia  $\psi : E \rightarrow \overline{B_1(0)}$  l'omeomorfismo, e sia  $g : E \rightarrow E$  continua. Allora la funzione  $f$  definita da  $f(z) = \psi(g(\psi^{-1}(z)))$  è una funzione continua da  $\overline{B_1(0)}$  in sé e quindi esiste  $z_0$  tale che  $f(z_0) = z_0$ ; pertanto,  $w_0 = \psi^{-1}(z_0)$  è tale che  $g(w_0) = w_0$ .

**Osservazione 9.9** Il Teorema di Brouwer si generalizza in  $\mathbf{R}^N$ , qualsiasi sia  $N \geq 1$ : se  $f : E \rightarrow E$  è una funzione continua, ed  $E$  è omeomorfo alla sfera unitaria  $B_1(0)$  di  $\mathbf{R}^N$ , allora  $f$  ha almeno un punto fisso. Se  $N = 1$  il Teorema di Brouwer è equivalente al teorema di esistenza degli zeri per funzioni continue (come si verifica facilmente). Se la dimensione dello spazio non è finita, il Teorema di Brouwer è falso, come dimostra il seguente esempio.

**Esempio 9.10 (Kakutani)** Sia  $X$  lo spazio metrico  $(\ell^2, d_2)$ , sia

$$\overline{B_1(0)} = \left\{ \{x_n\} \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2 \leq 1 \right\},$$

la sfera unitaria di  $\ell^2$ , e sia  $f : \overline{B_1(0)} \rightarrow \ell^2$  definita da

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = \left( \frac{1 - \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2}{2}, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \right).$$

Si verifica abbastanza facilmente che  $f$  è continua e che  $f(\overline{B_1(0)}) \subseteq \overline{B_1(0)}$ . D'altra parte,  $f$  non ha punti fissi; se, infatti,  $\{y_n\}$  fosse tale che  $f(\{y_n\}) = \{y_n\}$ , allora

$$y_1 = \frac{1 - \sum_{n=1}^{+\infty} y_n^2}{2}, \quad y_2 = y_1, \quad y_3 = y_2, \quad \dots \quad y_{n+1} = y_n, \quad \dots,$$

e quindi  $\{y_n\}$  sarebbe una successione costante. Dal momento che l'unica successione costante in  $\ell^2$  è la successione nulla, si ha un assurdo essendo

$$f(0, 0, \dots, 0, \dots) = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \dots, 0, \dots\right) \neq (0, 0, \dots, 0, \dots).$$

Il Teorema di Brouwer è falso in spazi di dimensione infinita perché  $\overline{B_1(0)}$  non è *compatta* (una proprietà che si dà “tacitamente” per vera in dimensione finita): la mancanza di compattezza della sfera unitaria permette di costruire controesempi come quello di Kakutani. Si noti che essendo ogni spazio di Hilbert separabile isometricamente isomorfo a  $(\ell^2, d_2)$ , il controesempio precedente si trasporta automaticamente agli spazi di Hilbert di dimensione infinita.

## 10 La trasformata di Fourier

**Definizione 10.1** Sia  $u$  in  $L^1(\mathbf{R})$  e sia  $\xi$  in  $\mathbf{R}$ . La **trasformata di Fourier** di  $u$  è la funzione

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \int_{\mathbf{R}} e^{-i\xi x} u(x) dx. \quad (10.1)$$

Ovviamente, non è detto *a priori* che  $\mathcal{F}(u)$  sia ben definita per ogni  $\xi$  in  $\mathbf{R}$ . Osservando però che se  $u$  è in  $L^1(\mathbf{R})$  allora sono in  $L^1(\mathbf{R})$  anche le funzioni  $\cos(\xi x) u(x) = \Re(e^{-i\xi x} u(x))$  e  $\text{sen}(\xi x) u(x) = -\Im(e^{-i\xi x} u(x))$ , sono ben definite le quantità

$$r(\xi) = \int_{\mathbf{R}} \cos(\xi x) u(x) dx, \quad i(\xi) = \int_{\mathbf{R}} \text{sen}(\xi x) u(x) dx,$$

dove gli integrali sono integrali secondo Lebesgue, e quindi è ben definita  $\mathcal{F}(u)$ . Dal momento che, per il Teorema di Lebesgue,

$$r(\xi) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \cos(\xi x) u(x) dx, \quad i(\xi) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \text{sen}(\xi x) u(x) dx,$$

$\mathcal{F}(u)$  può essere definita anche tramite il valore principale:

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \mathbf{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} u(x) dx.$$

Nel seguito useremo indifferentemente i due valori.

**Esempio 10.2** Sia  $u(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$ . Allora, se  $\xi \neq 0$ ,

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \int_{\mathbf{R}} e^{-i\xi x} \chi_{[-1,1]}(x) dx = \int_{-1}^1 e^{-i\xi x} dx = -\frac{e^{-i\xi} - e^{i\xi}}{i\xi} = \frac{2\text{sen}(\xi)}{\xi}.$$

Ovviamente,  $\mathcal{F}(u)(0) = 2$ . Osserviamo che  $\mathcal{F}(u)$  è continua (mentre  $u$  non lo è), ed infinitesima all'infinito.

Sia  $u(x) = \chi_{[a,b]}(x)$ . Allora gli stessi calcoli di prima portano a

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = i \frac{e^{-ib\xi} - e^{-ia\xi}}{\xi},$$

se  $\xi \neq 0$ , mentre  $\mathcal{F}(u)(0) = b - a$ . Anche in questo caso  $\mathcal{F}(u)$  è continua ed infinitesima per  $|\xi|$  tendente ad infinito.

Sia  $u(x) = \frac{1}{1+x^2}$ . Allora

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{-i\xi x}}{1+x^2} dx,$$

e questo integrale può essere calcolato con i residui: se  $\xi < 0$ , dal momento che  $u(z) = \frac{1}{1+z^2}$  tende a zero quando  $|z|$  tende ad infinito uniformemente rispetto ad  $\arg(z)$  in  $[0, \pi]$ , ed essendo  $u(z)$  singolare in  $z = i$  (nel semipiano  $\Im(z) \geq 0$ ), per il Teorema 8.15 si ha

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = 2\pi i \text{Res} \left[ \frac{e^{-i\xi z}}{1+z^2}, i \right] = \pi e^{\xi}.$$

Se  $\xi > 0$ , si può applicare il Teorema 8.17, oppure effettuare il cambio di variabile  $y = -x$  nell'integrale, che implica

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{-i\xi x}}{1+x^2} dx = \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{i\xi y}}{1+y^2} dy = \mathcal{F}(u)(-\xi),$$

mentre  $\mathcal{F}(u)(0) = \pi$ , come si verifica immediatamente. Pertanto,

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \pi e^{-|\xi|}.$$

Anche in questo caso  $\mathcal{F}(u)$  è una funzione continua che tende a zero ad infinito.

Sia  $u(x) = e^{-|x|}$ . Allora

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \int_{\mathbf{R}} e^{-i\xi x - |x|} dx = \int_{-\infty}^0 e^{(1-i\xi)x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-(1+i\xi)x} dx.$$

Pertanto,

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \frac{e^{(1-i\xi)x}}{1-i\xi} \Big|_{-\infty}^0 + -\frac{e^{-(1+i\xi)x}}{1+i\xi} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{1-i\xi} + \frac{1}{1+i\xi} = \frac{2}{1+\xi^2}.$$

In tutti gli esempi precedenti  $\mathcal{F}(u)$  è una funzione limitata, continua, ed infinitesima per  $|\xi|$  tendente ad infinito. Questa è una proprietà generale.

**Teorema 10.3** *Sia  $u$  in  $L^1(\mathbf{R})$ . Allora  $\mathcal{F}(u)(\xi)$  è una funzione limitata, continua, ed infinitesima per  $|\xi|$  tendente ad infinito.*

**Dimostrazione.** Si ha

$$|\Re(\mathcal{F}(u)(\xi))| = \left| \int_{\mathbf{R}} \cos(\xi x) u(x) dx \right| \leq \int_{\mathbf{R}} |u(x)| dx,$$

ed analogamente per  $|\Im(\mathcal{F}(u)(\xi))|$ ; pertanto  $\mathcal{F}(u)$  è limitata, e si ha

$$|\mathcal{F}(u)(\xi)| \leq \int_{\mathbf{R}} |u(x)| dx, \quad \forall \xi \in \mathbf{R}. \quad (10.2)$$

Sia ora  $\xi_n$  convergente a  $\xi$ . Allora  $e^{-i\xi_n x} u(x)$  converge quasi ovunque a  $e^{-i\xi x} u(x)$  (la convergenza è ovunque, tranne dove  $|u(x)| = +\infty$ ). Inoltre,

$$|e^{-i\xi_n x} u(x)| \leq |u(x)|,$$

che è in  $L^1(\mathbf{R})$ . Per il Teorema di Lebesgue,

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \int_{\mathbf{R}} e^{-i\xi x} u(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}} e^{-i\xi_n x} u(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(u)(\xi_n),$$

e quindi  $\mathcal{F}(u)(\xi)$  è continua.

Infine, abbiamo già osservato che se  $u = \chi_{[a,b]}$  allora  $\mathcal{F}(u)$  tende a zero per  $|\xi|$  tendente ad infinito. Essendo  $\mathcal{F}$  un'applicazione lineare, se  $\varphi$  è una funzione semplice, allora  $\mathcal{F}(\varphi)$  tende a zero per  $|\xi|$  tendente ad infinito. Sia  $\varepsilon > 0$ , e sia  $\varphi_\varepsilon$  una funzione semplice tale che

$$\int_{\mathbf{R}} |u(x) - \varphi_\varepsilon(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sia  $R_\varepsilon > 0$  tale che  $|\mathcal{F}(\varphi_\varepsilon)(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  se  $|\xi| \geq R_\varepsilon$ . Allora, per (10.2), se  $|\xi| \geq R_\varepsilon$ ,

$$|\mathcal{F}(u)(\xi)| \leq |\mathcal{F}(u - \varphi_\varepsilon)(\xi)| + |\mathcal{F}(\varphi_\varepsilon)(\xi)| \leq \int_{\mathbf{R}} |u(x) - \varphi_\varepsilon(x)| dx + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon,$$

da cui la tesi. ■

La trasformata di Fourier, dunque, prende una funzione  $L^1(\mathbf{R})$  e “restituisce” una funzione continua, limitata, e tendente a zero ad infinito. Inoltre, per la (10.2), l’applicazione  $\mathcal{F} : L^1(\mathbf{R}) \rightarrow C^0(\mathbf{R})$  è una funzione continua: se  $u_n$  converge ad  $u$  in  $L^1(\mathbf{R})$ , allora  $\mathcal{F}(u_n)$  converge uniformemente a  $\mathcal{F}(u)$  in  $\mathbf{R}$ .

Prima di provare altre proprietà della trasformata di Fourier, ricordiamo il concetto di convoluzione tra due funzioni.

**Definizione 10.4** Siano  $f$  e  $g$  in  $L^1(\mathbf{R})$ . La **convoluzione** tra  $f$  e  $g$  è la funzione definita da

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x - y) g(y) dy = \int_{\mathbf{R}} f(y) g(x - y) dy.$$

Se  $f$  e  $g$  appartengono ad  $L^1(\mathbf{R})$ , allora anche  $f * g$  vi appartiene. Infatti,

$$|(f * g)(x)| \leq \int_{\mathbf{R}} |f(x - y)| |g(y)| dy,$$

da cui, integrando ed usando il Teorema di Fubini,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} |(f * g)(x)| dx &\leq \int_{\mathbf{R}} \left( \int_{\mathbf{R}} |f(x - y)| |g(y)| dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbf{R}} \left( \int_{\mathbf{R}} |f(x - y)| |g(y)| dx \right) dy \\ &= \left( \int_{\mathbf{R}} |f(x)| dx \right) \left( \int_{\mathbf{R}} |g(x)| dx \right). \end{aligned}$$

**Teorema 10.5** Valgono le seguenti proprietà:

1) sia  $u$  in  $L^1(\mathbf{R}) \cap C^1(\mathbf{R})$ , e sia  $u'$  in  $L^1(\mathbf{R})$ . Allora

$$\mathcal{F}(u')(\xi) = i \xi \mathcal{F}(u); \tag{10.3}$$

2) sia  $u$  in  $L^1(\mathbf{R})$  tale che  $xu(x)$  è in  $L^1(\mathbf{R})$ . Allora

$$\mathcal{F}(xu(x))(\xi) = i[\mathcal{F}(u)(\xi)]'; \quad (10.4)$$

3) se  $u$  e  $v$  sono in  $L^1(\mathbf{R})$ , allora

$$\mathcal{F}(u * v)(\xi) = \mathcal{F}(u)(\xi) \mathcal{F}(v)(\xi). \quad (10.5)$$

**Dimostrazione.** Sia  $R > 0$ . Allora, integrando per parti,

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R e^{-i\xi x} u'(x) dx &= e^{-i\xi x} u(x) \Big|_{-R}^R + i\xi \int_{-R}^R e^{-i\xi x} u(x) dx \\ &= \left( e^{-iR\xi} u(R) - e^{iR\xi} u(-R) \right) + i\xi \int_{-R}^R e^{-i\xi x} u(x) dx. \end{aligned}$$

Essendo  $u$  in  $C^1(\mathbf{R})$ , si ha

$$u(R) = u(0) + \int_0^R u'(t) dt,$$

e dal momento che

$$\left| \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R u'(t) dt \right| = \left| \int_0^{+\infty} u'(t) dt \right| \leq \int_0^{+\infty} |u'(t)| dt < +\infty,$$

ne segue che  $u(R)$  converge ad un limite finito quando  $R$  tende ad infinito. Essendo  $u$  in  $L^1(\mathbf{R})$ , tale limite non può essere che zero. Ragionamento analogo si può fare per  $u(-R)$ . Pertanto, essendo sia  $e^{-iR\xi}$  che  $e^{iR\xi}$  limitate (avendo modulo 1), si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u')(\xi) &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R e^{-i\xi x} u'(x) dx \\ &= i\xi \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R e^{-i\xi x} u(x) dx = i\xi \mathcal{F}(u)(\xi). \end{aligned}$$

Si ha poi

$$\frac{\mathcal{F}(u)(\xi + h) - \mathcal{F}(u)(\xi)}{h} = \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{-i(\xi+h)x} - e^{-i\xi x}}{h} u(x) dx.$$

La successione

$$\frac{e^{-i(\xi+h)x} - e^{-i\xi x}}{h}$$

converge puntualmente a  $-ix e^{-i\xi x}$  quando  $h$  tende a zero; inoltre,

$$e^{-i(\xi+h)x} - e^{-i\xi x} = \cos((\xi+h)x) - \cos(\xi x) - i[\sin((\xi+h)x) - \sin(\xi x)],$$

e quindi, per il Teorema di Lagrange,

$$e^{-i(\xi+h)x} - e^{-i\xi x} = -\sin((\xi+\eta_1)x)hx - i\cos((\xi+\eta_2)x)hx,$$

con  $\eta_1$  ed  $\eta_2$  tra 0 e  $h$ . Pertanto,

$$\left| \frac{e^{-i(\xi+h)x} - e^{-i\xi x}}{h} \right| = |-\sin((\xi+\eta_1)x)x - i\cos((\xi+\eta_2)x)x| \leq 2|x|,$$

da cui

$$\left| \frac{e^{-i(\xi+h)x} - e^{-i\xi x}}{h} u(x) \right| \leq 2|x u(x)|,$$

che appartiene ad  $L^1(\mathbf{R})$  per ipotesi. Per il Teorema di Lebesgue,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}(u)(\xi+h) - \mathcal{F}(u)(\xi)}{h} = -i \int_{\mathbf{R}} e^{-i\xi x} x u(x) dx = -i \mathcal{F}(x u(x))(\xi),$$

e quindi (10.4) è dimostrata ricordando che  $-\frac{1}{i} = i$ .

Infine, osservando che  $u * v$  è in  $L^1(\mathbf{R})$ , e quindi  $\mathcal{F}(u * v)$  è ben definita, dal Teorema di Fubini segue che

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u * v)(\xi) &= \int_{\mathbf{R}} e^{-i\xi x} \left( \int_{\mathbf{R}} u(x-y) v(y) dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} e^{-i\xi(x-y)} u(x-y) e^{-i\xi y} v(y) dx dy \\ &= \left( \int_{\mathbf{R}} e^{-i\xi(x-y)} u(x-y) dx \right) \left( \int_{\mathbf{R}} e^{-i\xi y} v(y) dy \right) \\ &= \mathcal{F}(u)(\xi) \mathcal{F}(v)(\xi), \end{aligned}$$

e quindi (10.5). ■

**Esempio 10.6** Il teorema precedente permette, in alcuni casi, di calcolare la trasformata di Fourier. Ad esempio, sia  $t > 0$ , e sia

$$G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}. \quad (10.6)$$

Come funzione della  $x$ ,  $G$  è in  $L^1(\mathbf{R}) \cap C^1(\mathbf{R})$ . Inoltre,

$$G_x(x, t) = -\frac{x}{2t} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} = -\frac{x}{2t} G(x, t),$$

appartiene a  $L^1(\mathbf{R})$  anche essa. Pertanto, per la (10.3), si ha

$$\mathcal{F}(G_x)(\xi) = i \xi \mathcal{F}(G)(\xi).$$

D'altra parte, per la (10.4)

$$\mathcal{F}(G_x)(\xi) = -\frac{1}{2t} \mathcal{F}(x G(x, t)) = -\frac{i}{2t} [\mathcal{F}(G)(\xi)]'.$$

Pertanto,

$$[\mathcal{F}(G)(\xi)]' = -2t \xi \mathcal{F}(G)(\xi),$$

ovvero

$$\mathcal{F}(G)(\xi) = \mathcal{F}(G)(0) e^{-t\xi^2}.$$

Essendo

$$\mathcal{F}(G)(0) = \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} dx = 1,$$

si ha

$$\mathcal{F}(G)(\xi) = e^{-t\xi^2}. \quad (10.7)$$

**Esempio 10.7** Calcoliamo la trasformata di Fourier di  $u(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$ . Innanzitutto,

$$\frac{2x}{(1+x^2)^2} = \left( -\frac{1}{1+x^2} \right)'.$$

Pertanto,

$$2i [\mathcal{F}(u)(\xi)]' = 2\mathcal{F}(x u(x))(\xi) = -i\xi \mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)(\xi) = -i\xi \pi e^{-|\xi|},$$

da cui

$$[\mathcal{F}(u)(\xi)]' = -\frac{\pi}{2} \xi e^{-|\xi|}.$$

Tenuto conto che

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2},$$

come si vede usando i residui, si ha

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \frac{\pi}{2} (1 + |\xi|) e^{-|\xi|}.$$

Supponiamo ora che sia nota  $\mathcal{F}(u)(\xi)$ ; è possibile risalire alla funzione  $u$  di cui è la trasformata; in altre parole, è possibile invertire la trasformazione, o “antitrasformare”  $\mathcal{F}(u)$ ? La risposta è positiva in alcuni casi.

**Esempio 10.8** Sia  $w(\xi) = \pi e^{-|\xi|}$ . Già sappiamo che  $w$  è la trasformata di Fourier di  $u(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ; cerchiamo pertanto di “recuperare” questa informazione. Consideriamo

$$v(x) = \int_{\mathbf{R}} e^{i\xi x} e^{-|\xi|} d\xi,$$

e proviamo a calcolare l'integrale. Si ha ovviamente

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} e^{i\xi x} e^{-|\xi|} d\xi &= \int_0^{+\infty} e^{i\xi x} e^{-\xi} d\xi + \int_{-\infty}^0 e^{i\xi x} e^{\xi} d\xi \\ &= \frac{e^{(ix-1)\xi}}{ix-1} \Big|_0^{+\infty} + \frac{e^{(ix+1)\xi}}{ix+1} \Big|_{-\infty}^0 \\ &= -\frac{1}{ix-1} + \frac{1}{ix+1} = \frac{2}{1+x^2}, \end{aligned}$$

e quindi

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{i\xi x} \mathcal{F}(u)(\xi) d\xi.$$

Prima di dimostrare che sotto condizioni “naturali” sulla funzione  $u$  e sulla sua trasformata si può recuperare  $u$  da  $\mathcal{F}(u)$ , enunciamo e dimostriamo il seguente teorema.

**Teorema 10.9** Sia  $w$  una funzione in  $L^1(\mathbf{R})$  tale che

$$\int_{\mathbf{R}} w(x) dx = 1,$$

e definiamo, per  $n$  in  $\mathbf{N}$ ,  $w_n(x) = n w(nx)$ . Allora, per ogni funzione  $u$  continua e limitata su  $\mathbf{R}$  si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (w_n * u)(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}} w_n(x-y) u(y) dy = u(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

**Dimostrazione.** Si ha, ponendo  $z = n(x-y)$ , da cui  $dz = -n dy$  e  $y = x - \frac{z}{n}$ ,

$$\int_{\mathbf{R}} w_n(x-y) u(y) dy = n \int_{\mathbf{R}} w(n(x-y)) u(y) dy = \int_{\mathbf{R}} w(z) u\left(x - \frac{z}{n}\right) dz.$$

La successione  $u\left(x - \frac{z}{n}\right)$  converge a  $u(x)$  (perché  $u$  è continua). Inoltre,

$$\left| w(z) u\left(x - \frac{z}{n}\right) \right| \leq M |w(z)| \in L^1(\mathbf{R}),$$

dal momento che  $u$  è limitata. Per il Teorema di Lebesgue,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}} w_n(x-y) u(y) dy = \int_{\mathbf{R}} w(z) u(x) dz = u(x),$$

poiché l'integrale di  $w$  vale 1. ■

**Teorema 10.10** Sia  $u$  una funzione in  $L^1(\mathbf{R}) \cap C^0(\mathbf{R})$  e supponiamo che  $u$  sia limitata e  $\mathcal{F}(u)$  sia in  $L^1(\mathbf{R})$ . Allora

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{i\xi x} \mathcal{F}(u)(\xi) d\xi. \quad (10.8)$$

**Dimostrazione.** Sia  $w(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$ . Allora  $w$  è in  $L^1(\mathbf{R})$  ed ha integrale uguale ad 1 su  $\mathbf{R}$ . Inoltre, come verificato nell'Esempio 10.8, detta  $v(\xi) = \mathcal{F}(w)(\xi) = e^{-|\xi|}$  si ha

$$w(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{i\xi x} v(\xi) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{i\xi x} \mathcal{F}(w)(\xi) d\xi,$$

cosicché  $w$  soddisfa (10.8). Sia  $n$  in  $\mathbf{N}$  e  $v_n(\xi) = v(\frac{\xi}{n}) = e^{-\frac{|\xi|}{n}}$ . Allora  $v_n$  converge puntualmente ad 1, ed è minore di 1 su tutto  $\mathbf{R}$ . Per il Teorema di Lebesgue, dato che  $e^{i\xi x} \mathcal{F}(u)(\xi)$  è in  $L^1(\mathbf{R})$  per ipotesi,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{i\xi x} \mathcal{F}(u)(\xi) d\xi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{i\xi x} v_n(\xi) \mathcal{F}(u)(\xi) d\xi.$$

Ricordando la definizione di  $\mathcal{F}(u)(\xi)$  si ha, per il Teorema di Fubini, e per (10.8) applicata a  $w$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{i\xi x} v_n(\xi) \mathcal{F}(u)(\xi) d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \left( \int_{\mathbf{R}} e^{-i\xi y} u(y) dy \right) e^{i\xi x} v_n(\xi) d\xi, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \left( \int_{\mathbf{R}} e^{i\xi(x-y)} v_n(\xi) d\xi \right) u(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \left( n \int_{\mathbf{R}} e^{in\xi(x-y)} v(\xi) d\xi \right) u(y) dy \\ &= \int_{\mathbf{R}} w_n(x-y) u(y) dy. \end{aligned}$$

Per il Teorema 10.9 si ha allora

$$\begin{aligned} u(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} w_n(x-y) u(y) dy \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{i\xi x} v_n(\xi) \mathcal{F}(u)(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{i\xi x} \mathcal{F}(u)(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. ■

Come conseguenza del teorema precedente, se  $u$  e  $v$  sono due funzioni che hanno la stessa trasformata di Fourier  $w(\xi) = \mathcal{F}(u)(\xi) = \mathcal{F}(v)(\xi)$ , allora  $u = v$ .

**Esempio 10.11** Sia  $f$  una funzione in  $L^1(\mathbf{R})$  e consideriamo l'equazione differenziale

$$u''(x) - u(x) = f(x).$$

Supponendo  $u$  in  $L^1(\mathbf{R})$  e tale che  $u''(x)$  appartiene anche essa ad  $L^1(\mathbf{R})$ , possiamo applicare la trasformata di Fourier, ottenendo

$$\mathcal{F}(u'')(\xi) - \mathcal{F}(u)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi),$$

da cui, per la (10.3),

$$-\xi^2 \mathcal{F}(u)(\xi) - \mathcal{F}(u)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi),$$

ovvero, per l'Esempio 10.2,

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = -\frac{\mathcal{F}(f)(\xi)}{1 + \xi^2} = -\frac{1}{2} \mathcal{F}(f)(\xi) \mathcal{F}(e^{-|x|})(\xi).$$

Pertanto, per (10.5), dal momento che  $u$  e la convoluzione di  $f$  con  $-\frac{1}{2}e^{-|x|}$  hanno la stessa trasformata di Fourier,

$$u(x) = -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} f(y) e^{-|x-y|} dy = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^x f(y) e^{y-x} dy - \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} f(y) e^{x-y} dy.$$

Derivando due volte rispetto ad  $x$ , si verifica facilmente che  $u''(x) - u(x) = f(x)$  per ogni  $x$  in  $\mathbf{R}$ .

**Esempio 10.12** Sia  $f$  in  $L^1(\mathbf{R})$ , con  $f$  tendente a zero per  $|x|$  tendente ad infinito, e consideriamo l'equazione differenziale

$$u''(x) + u(x) = f(x).$$

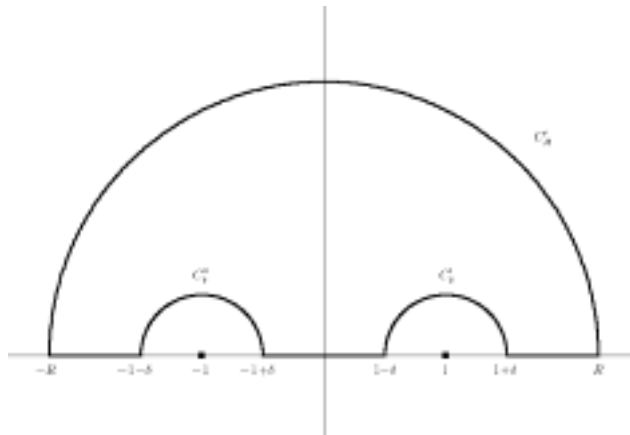
Trasformando l'equazione, si ottiene

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \frac{\mathcal{F}(f)(\xi)}{1 - \xi^2},$$

cosicché potremo rappresentare le soluzioni dell'equazione una volta trovata una funzione  $v$  la cui trasformata sia  $\frac{1}{1-\xi^2}$ . Per trovarla, antitrasformiamo  $\frac{1}{1-\xi^2}$ :

$$v(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{i\xi x}}{1 - \xi^2} d\xi.$$

Sfortunatamente, la funzione  $f(z) = \frac{1}{1-z^2}$  ha due poli sull'asse reale. Per ovviare, svolgiamo i conti come nell'Esempio 8.19, costruendo un percorso che “gira” attorno a  $z = \pm 1$  (si veda la figura).



Si ha allora, se  $x > 0$ ,

$$\text{vp} \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{i\xi x}}{1 - \xi^2} d\xi = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left( \int_{C'_\delta} \frac{e^{izx}}{1 - z^2} + \int_{C''_\delta} \frac{e^{izx}}{1 - z^2} \right),$$

ed eseguendo i calcoli si trova

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{e^{i\xi x}}{1 - \xi^2} d\xi = \pi \text{sen}(x).$$

Se  $x < 0$ , cambiando variabile nell'integrale, si trova

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{e^{i\xi x}}{1 - \xi^2} d\xi = \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{-i\xi x}}{1 - \xi^2} d\xi = \pi \text{sen}(-x).$$

Pertanto,

$$v(x) = \frac{1}{2} \text{sen}(|x|),$$

da cui segue

$$u(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} f(y) \text{sen}(|x - y|) dy.$$

**Esempio 10.13** Consideriamo ora la cosiddetta *equazione del calore*:

$$u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0,$$

con condizione iniziale  $u(x, 0) = u_0(x)$ , che supponiamo una funzione in  $L^1(\mathbf{R})$ , continua e limitata. Fisicamente, la soluzione  $u$  rappresenta la temperatura al tempo  $t$  di una sbarra omogenea ed isolata, di lunghezza infinita,

che al tempo iniziale abbia temperatura data da  $u_0(x)$ . Supponendo che tutto quello che stiamo facendo sia lecito, trasformiamo l'equazione in:

$$\mathcal{F}(u_t)(\xi) + \xi^2 \mathcal{F}(u)(\xi) = 0,$$

e quindi, essendo  $\mathcal{F}(u_t)(\xi) = [\mathcal{F}(u)(\xi)]_t$  per i teoremi di derivazione degli integrali dipendenti da un parametro, si ha

$$[\mathcal{F}(u)(\xi)]_t = -\xi^2 \mathcal{F}(u)(\xi),$$

da cui

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \mathcal{F}(u_0)(\xi) e^{-t\xi^2}.$$

Ricordando (dall'Esempio 10.6) che se  $G$  è la funzione definita in (10.6),

$$e^{-t\xi^2} = \mathcal{F}(G(x, t))(\xi),$$

si ha, per (10.5),

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \mathcal{F}(u_0)(\xi) \mathcal{F}(G(x, t))(\xi) = \mathcal{F}(G(x, t) * u_0(x))(\xi).$$

Pertanto, per il Teorema 10.10

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbf{R}} u_0(x) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dx,$$

è la soluzione dell'equazione del calore.

Si noti che non è lecito prendere  $t = 0$  nella formula appena scritta: il fatto che  $u(x, 0)$  sia uguale ad  $u_0(x)$  va inteso nel seguente modo:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbf{R}} u_0(x) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dx = u_0(x).$$

Infatti, se definiamo

$$w(z) = \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}},$$

allora  $w$  è in  $L^1(\mathbf{R})$  ed il suo integrale vale 1. Pertanto,

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbf{R}} u_0(x) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} = \int_{\mathbf{R}} u_0(y) \left( \frac{1}{\sqrt{4t}} w\left(\frac{x-y}{\sqrt{4t}}\right) \right) dy,$$

converge ad  $u_0(x)$  quando  $t$  tende a zero per il Teorema 10.9.

## Appendice: Forme differenziali

In questa appendice verranno brevemente ricordati (e dimostrati) i risultati più importanti sulle forme differenziali in  $\mathbf{R}^2$ .

**Definizione A.1** Un'applicazione  $L : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  si dice **lineare** se si ha

$$L(au + bv) = aL(u) + bL(v), \quad \forall a, b \in \mathbf{R}, \forall u, v \in \mathbf{R}^2.$$

L'insieme  $(\mathbf{R}^2)^*$  delle applicazioni lineari da  $\mathbf{R}^2$  in  $\mathbf{R}$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbf{R}$ , una volta definite la somma di due applicazioni lineari, ed il prodotto per uno scalare come segue:

$$(L + M)(u) = L(u) + M(u), \quad (aL)(u) = aL(u),$$

per ogni  $L$  e  $M$  in  $(\mathbf{R}^2)^*$ , per ogni  $u$  in  $\mathbf{R}^2$  e per ogni  $a$  in  $\mathbf{R}$ .

**Teorema A.2** Lo spazio  $(\mathbf{R}^2)^*$  ha dimensione 2, ed una sua base è data dalle applicazioni lineari  $dx$  e  $dy$  definite da

$$dx(u) = dx(u_1, u_2) = u_1, \quad dy(u) = dy(u_1, u_2) = u_2.$$

**Dimostrazione.** Sia  $L$  un'applicazione lineare da  $\mathbf{R}^2$  in  $\mathbf{R}$ , e siano  $a = L(e_1) = L((1, 0))$  e  $b = L(e_2) = L((0, 1))$ . Preso un qualsiasi vettore  $u$  in  $\mathbf{R}^2$ , possiamo decomporlo come

$$u = (u_1, u_2) = u_1 e_1 + u_2 e_2,$$

e quindi, per linearità,

$$L(u) = L((u_1, u_2)) = L(u_1 e_1 + u_2 e_2) = u_1 L(e_1) + u_2 L(e_2) = u_1 a + u_2 b.$$

Essendo  $u_1 = dx(u)$  e  $u_2 = dy(u)$ , abbiamo così, per ogni  $u$  in  $\mathbf{R}^2$ ,

$$L(u) = u_1 a + u_2 b = a dx(u) + b dy(u),$$

e quindi, data  $L$  in  $(\mathbf{R}^2)^*$  esistono due costanti  $a$  e  $b$  tali che  $L = a dx + b dy$ ; siccome ogni applicazione della forma  $a dx + b dy$  è lineare da  $\mathbf{R}^2$  in  $\mathbf{R}$ , ed essendo  $dx$  e  $dy$  linearmente indipendenti, si ha la tesi. ■

**Definizione A.3** Lo spazio vettoriale  $(\mathbf{R}^2)^*$  si dice **duale** di  $\mathbf{R}^2$ . La base formata dalle applicazioni  $dx$  e  $dy$  si dice base canonica duale.

**Definizione A.4** Sia  $E$  un aperto di  $\mathbf{R}^2$ . Una **forma differenziale**  $\omega$  su  $E$  è un'applicazione

$$\omega : E \rightarrow (\mathbf{R}^2)^*,$$

che ad ogni  $(x, y)$  in  $E$  associa un elemento  $\omega(x, y)$  in  $(\mathbf{R}^2)^*$ . Dal momento che ogni elemento di  $(\mathbf{R}^2)^*$  si può scrivere nella forma  $a dx + b dy$  con  $a$  e  $b$  in  $\mathbf{R}$ , assegnare una forma differenziale su  $E$  è equivalente ad assegnare due funzioni  $a$  e  $b$  da  $E$  in  $\mathbf{R}$ . Pertanto, una forma differenziale su  $E$  è un'applicazione  $\omega$  da  $E$  in  $(\mathbf{R}^2)^*$  definita da

$$\omega(x, y) = a(x, y) dx + b(x, y) dy.$$

Se le funzioni  $a$  e  $b$  sono continue, la forma differenziale si dice continua, mentre si dice di classe  $C^1$  se le funzioni  $a$  e  $b$  appartengono a  $C^1(E)$ .

**Esempio A.5** Sia  $f : E \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione di classe  $C^1(E)$ . La forma differenziale continua

$$\omega(x, y) = f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy,$$

si dice il **differenziale** di  $f$ . Una forma differenziale  $\omega$  definita su  $E$  che sia il differenziale di una funzione  $f$  si dice **esatta** su  $E$ .

**Definizione A.6** Una **curva regolare** in  $\mathbf{R}^2$  è un'applicazione  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$  definita da  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , con  $x, y : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  due funzioni  $C^1([a, b])$  con la proprietà che  $(x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$  per ogni  $t$  in  $(a, b)$ . Una **curva regolare a tratti** è un'applicazione  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$  continua per la quale esiste una partizione  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$  di  $[a, b]$  tale che  $\gamma$  è regolare se ristretta a  $(a_{i-1}, a_i)$  (con  $i$  da 1 a  $n$ ). Una curva regolare a tratti si dice **semplice** se  $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$  per ogni  $t_1$  e  $t_2$  in  $(a, b)$ . Una curva regolare a tratti si dice **chiusa** se  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

**Definizione A.7** Sia  $\omega(x, y) = a(x, y) dx + b(x, y) dy$  una forma differenziale continua su  $E$  e sia  $\gamma$  una curva regolare da  $[a, b]$  in  $E$ . Definiamo l'**integrale di  $\omega$  lungo  $\gamma$**  come la quantità

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b [a(x(t), y(t)) x'(t) + b(x(t), y(t)) y'(t)] dt. \quad (\text{A.1})$$

**Esempio A.8** Sia  $\omega(x, y) = y dx + x dy$  e sia  $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ , con  $t$  in  $[0, 2\pi]$ . Allora

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} [\sin(t)(-\sin(t)) + \cos(t)(\cos(t))] dt = \int_0^{2\pi} [\cos^2(t) - \sin^2(t)] dt = 0.$$

Sia  $\omega(x, y) = y dx - x dy$  e sia  $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ , con  $t$  in  $[0, 2\pi]$ . Allora

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} [\sin(t)(-\sin(t)) - \cos(t)(\cos(t))] dt = - \int_0^{2\pi} 1 dt = -2\pi.$$

Se la curva  $\gamma$  è regolare a tratti, l'integrale di  $\omega$  lungo  $\gamma$  è definito come la somma degli integrali di  $\omega$  lungo  $\gamma_i$ , dove  $\gamma_i$  è la curva regolare ottenuta prendendo la restrizione di  $\gamma$  all'intervallo  $(a_{i-1}, a_i)$ . Questo fatto, e le proprietà dell'integrale secondo Riemann, permettono di ottenere il seguente teorema.

**Teorema A.9** Sia  $E$  un aperto di  $\mathbf{R}^2$ , siano  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  due curve regolari a valori in  $E$ , e siano  $\omega_1, \omega_2 : E \rightarrow (\mathbf{R}^2)^*$  due forme differenziali continue.

- 1) se  $\gamma_1 = -\gamma_2$  (ovvero è la curva con lo stesso sostegno, la stessa parametrizzazione, ma verso di percorrenza opposto), allora

$$\int_{\gamma_1} \omega_1 = - \int_{\gamma_2} \omega_1;$$

- 2) si ha

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \omega_1 = \int_{\gamma_1} \omega_1 + \int_{\gamma_2} \omega_1;$$

- 3) per ogni coppia di numeri reali  $a$  e  $b$ ,

$$\int_{\gamma_1} [a\omega_1 + b\omega_2] = a \int_{\gamma_1} \omega_1 + b \int_{\gamma_1} \omega_2;$$

- 4) se  $\varphi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  è una funzione  $C^1$  tale che  $\gamma_1 = \varphi(\gamma_2)$  con corrispondenza biunivoca, allora

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega(\varphi) \varphi'.$$

Sia ora  $\omega$  una forma differenziale esatta su  $E$  (ovvero,  $\omega$  è il differenziale di una funzione  $f$  in  $C^1(E)$ ) e  $\gamma : [a, b] \rightarrow E$  una curva regolare a tratti. Allora

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_a^b [f_x(x(t), y(t)) x'(t) + f_y(x(t), y(t)) y'(t)] dt \\ &= \int_a^b \frac{df(x(t), y(t))}{dt} dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \end{aligned}$$

Pertanto, se  $\omega$  è esatta, l'integrale lungo una curva regolare a tratti dipende **solo** dagli estremi della curva; in altre parole, se  $\tilde{\gamma}$  è un'altra curva che ha  $\gamma(a)$  e  $\gamma(b)$  come estremi (nell'ordine), l'integrale di  $\omega$  lungo  $\tilde{\gamma}$  è lo stesso. Se in più  $\gamma$  è chiusa, allora l'integrale di  $\omega$  lungo  $\gamma$  è zero. Questa — a patto di fare delle ipotesi su  $E$  — è come vedremo una proprietà caratterizzante le forme differenziali esatte su  $E$ .

**Definizione A.10** Un sottoinsieme aperto  $E$  di  $\mathbf{R}^2$  si dice **connesso** se  $E$  non è unione di due aperti disgiunti e non vuoti.

Un sottoinsieme aperto  $E$  di  $\mathbf{R}^2$  si dice **connesso per poligonali** se per ogni coppia di punti  $x$  e  $y$  di  $E$  esiste una poligonale (ovvero una curva lineare a tratti) che unisce  $x$  con  $y$ .

**Teorema A.11** *Un sottoinsieme aperto  $E$  di  $\mathbf{R}^2$  è connesso se e solo se è connesso per poligonali.*

**Dimostrazione.** Sia  $x$  in  $E$ ; definiamo

$$A_1 = \{y \in A : \text{esiste una poligonale tra } y \text{ e } x\}, \quad A_2 = A \setminus A_1.$$

Sia  $y$  in  $A_1$ , e sia  $r > 0$  tale che la sfera di centro  $y$  e raggio  $r$  è tutta contenuta in  $A$  (tale  $r$  esiste perché  $A$  è aperto). Dal momento che  $y$  appartiene ad  $A_1$ , allora esiste una poligonale  $\gamma$  che collega  $x$  a  $y$ . Sia ora  $z$  nella sfera di centro  $y$  e raggio  $r$ ; ovviamente,  $y$  è collegato a  $z$  dal segmento che li unisce, e pertanto la poligonale ottenuta unendo a  $\gamma$  tale segmento collega  $x$  a  $z$ . In altre parole, per ogni  $y$  in  $A_1$  esiste  $r > 0$  tale che la sfera di centro  $y$  e raggio  $r$  è tutta contenuta in  $A_1$ . Quindi,  $A_1$  è aperto.

Sia ora  $y$  in  $A_2$ , e sia  $r > 0$  tale che la sfera di centro  $y$  e raggio  $r$  è tutta contenuta in  $A_2$ . Sia  $z$  in tale sfera; se  $z$  fosse collegabile a  $x$  tramite

una poligonale  $\gamma$ , allora  $y$  sarebbe collegabile a  $x$  con una poligonale (quella ottenuta unendo a  $\gamma$  il segmento da  $z$  a  $x$ ), e questo non è possibile. Come prima, abbiamo dimostrato che per ogni  $y$  in  $A_2$  esiste  $r > 0$  tale che la sfera di centro  $y$  e raggio  $r$  è tutta contenuta in  $A_2$ . Quindi,  $A_2$  è aperto.

Per definizione,  $A_1 \cup A_2 = A$ . Se  $A$  è connesso, uno dei due insiemi deve essere vuoto. Dal momento che  $A_1$  contiene  $x$ ,  $A_2 = \emptyset$ . In definitiva,  $A = A_1$ , e quindi  $A$  è connesso per poligonali.

Supponiamo ora che  $A$  non sia connesso. Esistono allora  $A_1$  e  $A_2$  aperti disgiunti e non vuoti la cui unione è  $A$ . Per semplicità, supponiamo che sia  $A_1$  che  $A_2$  siano connessi. Siano  $x$  in  $A_1$  e  $y$  in  $A_2$ . Essendo  $A_1$  connesso, l'insieme dei punti di  $A$  raggiungibili da  $x$  con poligonali coincide con  $A_1$  (per la prima parte del teorema); analogamente, l'insieme dei punti di  $A$  raggiungibili da  $y$  con poligonali coincide con  $A_2$ . Essendo  $A_1$  e  $A_2$  disgiunti,  $x$  e  $y$  non sono collegabili con una poligonale di  $A$ . ■

**Teorema A.12** *Sia  $E$  un aperto connesso di  $\mathbf{R}^2$  e sia  $\omega$  una forma differenziale continua su  $E$ . Le seguenti sono equivalenti:*

1)  $\omega$  è esatta in  $E$ ;

2) se  $\gamma$  è una curva **chiusa** e regolare a tratti contenuta in  $E$ , allora

$$\int_{\gamma} \omega = 0; \quad (\text{A.2})$$

3) se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono due curve regolari a tratti contenute in  $E$ , con identici punti di partenza e di arrivo, allora

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega. \quad (\text{A.3})$$

**Dimostrazione.** Abbiamo già dimostrato che 1) implica 2); per dimostrare che 2) implica 3), è sufficiente osservare che se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono come nell'enunciato del teorema, allora  $\gamma = \gamma_1 \cup (-\gamma_2)$  è una curva chiusa e regolare a tratti. Pertanto, per la (A.2), e per la 1) del Teorema A.9,

$$0 = \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1 \cup (-\gamma_2)} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{-\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega,$$

da cui la (A.3).

Dimostriamo ora che 3) implica 1); fissiamo  $(x_0, y_0)$  in  $E$  e definiamo, per  $(x, y)$  in  $E$ ,

$$f(x, y) = \int_{\gamma(x,y)} \omega,$$

dove  $\gamma(x,y)$  è una qualsiasi curva regolare a tratti che unisce  $(x_0, y_0)$  a  $(x, y)$ ; si osservi che  $E$ , essendo connesso, è connesso per poligonali, e quindi esiste almeno una curva regolare a tratti che unisce  $(x_0, y_0)$  a  $(x, y)$ ). Inoltre, per la (A.3),  $f$  è ben definita, dato che il valore dell'integrale non dipende dalla curva scelta.

Dimostriamo che  $f$  è derivabile, e che, se  $\omega(x, y) = a(x, y) dx + b(x, y) dy$ , le sue derivate parziali coincidono con  $a$  e  $b$ . Sia  $(x, y)$  in  $E$ , e sia  $h_0 > 0$  un numero reale tale che  $(x + h, y)$  sia in  $E$  per ogni  $h$  tale che  $|h| \leq h_0$  (un tale  $h_0$  esiste perché, essendo  $E$  aperto, esiste  $r > 0$  tale che la sfera di centro  $(x, y)$  e raggio  $r$  è tutta contenuta in  $E$ ). Data una qualsiasi  $\gamma(x,y)$  che collega  $(x_0, y_0)$  a  $(x, y)$ , definiamo  $\gamma_h$  come l'unione di  $\gamma(x,y)$  con il segmento  $S_h$  che unisce  $(x, y)$  a  $(x + h, y)$ . Abbiamo allora

$$f(x + h, y) - f(x, y) = \int_{\gamma_h} \omega - \int_{\gamma(x,y)} \omega = \int_{\gamma(x,y) \cup S_h} \omega - \int_{\gamma(x,y)} \omega = \int_{S_h} \omega.$$

Parametrizzando  $S_h$  con  $x(t) = x + t$ ,  $y(t) = y$ , e  $t \in [0, h]$ , abbiamo

$$f(x + h, y) - f(x, y) = \int_0^h a(x + t, y) dt.$$

Essendo  $a$  continua, dal teorema della media integrale segue allora

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h a(x + t, y) dt = a(x, y).$$

Con un ragionamento analogo si dimostra che  $f_y(x, y) = b(x, y)$ . ■

Le condizioni di esattezza date dal precedente teorema sono però alquanto difficili da verificare: è necessario che l'integrale lungo tutte le infinite curve chiuse sia nullo affinché la forma differenziale sia esatta, il che vuol dire che l'esattezza non può essere dedotta con un numero finito di tentativi. Fortunatamente, nel caso in cui la forma differenziale sia non solo continua, ma di classe  $C^1(E)$ , è facile verificare se una forma differenziale **non** è esatta.

**Teorema A.13** Sia  $E$  un aperto di  $\mathbf{R}^2$ , e sia  $\omega(x, y) = a(x, y) dx + b(x, y) dy$  una forma differenziale esatta su  $E$  di classe  $C^1(E)$ . Allora

$$a_y(x, y) = b_x(x, y), \quad \forall (x, y) \in E. \quad (\text{A.4})$$

**Dimostrazione.** Se  $\omega$  è esatta,  $\omega$  è il differenziale di una funzione  $f$  definita su  $E$ ; essendo  $\omega$  di classe  $C^1(E)$ ,  $f$  è una funzione  $C^2(E)$ . Per il lemma di Schwartz,

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y), \quad \forall (x, y) \in E.$$

Ricordando che  $a(x, y) = f_x(x, y)$ , e che  $b(x, y) = f_y(x, y)$ , si ha immediatamente la (A.4). ■

**Definizione A.14** Una forma differenziale  $\omega(x, y) = a(x, y) dx + b(x, y) dy$  di classe  $C^1(E)$  si dice **chiusa** su  $E$  se le funzioni  $a$  e  $b$  soddisfano la (A.4).

È allora evidente dal Teorema A.13 che una forma differenziale di classe  $C^1$  che sia esatta su  $E$  è anche chiusa su  $E$ , cosicché se  $\omega$  non è chiusa (e la condizione di chiusura è facile da verificare), allora non sarà esatta. Ad esempio, la forma differenziale  $\omega(x, y) = y dx - x dy$  dell'Esempio A.8, non è chiusa (e quindi non è esatta, come si vede anche dal fatto che l'integrale lungo una curva chiusa non è zero).

Sfortunatamente, non tutte le forme differenziali chiuse sono esatte, come si vede dal seguente esempio.

**Esempio A.15** Sia  $E = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , e sia

$$\omega(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

Si ha

$$\left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)_y = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right)_x,$$

e quindi  $\omega$  è chiusa. Se consideriamo la curva chiusa  $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$  con  $t$  in  $[0, 2\pi]$ , abbiamo però

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{-\sin(t) (-\sin(t))}{\cos^2(t) + \sin^2(t)} + \frac{\cos(t) (\cos(t))}{\cos^2(t) + \sin^2(t)} \right] dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi,$$

e quindi  $\omega$  non è esatta in  $E$ .

Il motivo per cui la forma differenziale del precedente esempio non è esatta dipende dal fatto che nell'insieme  $E$ , che è connesso, esiste una curva contenuta in  $E$  (la circonferenza di centro l'origine e raggio uno) che non è la frontiera di un insieme tutto contenuto in  $E$ .

**Definizione A.16** Un sottoinsieme  $E$  di  $\mathbf{R}^2$  si dice **semplicemente connesso** se ogni curva chiusa semplice contenuta in  $E$  è frontiera di un sottoinsieme di  $E$ .

Ad esempio, sono semplicemente connessi  $\mathbf{R}^2$ , un cerchio,  $\mathbf{R}^2$  privato di una semiretta (mentre  $\mathbf{R}^2$  privato di una retta si “spezza” nell'unione di due semispazi semplicemente connessi). Non sono semplicemente connessi  $\mathbf{R}^2$  privato di un punto, di un segmento, o di un cerchio.

Un altro esempio di insieme semplicemente connesso è seguente: date due funzioni  $f(x)$  e  $g(x)$ , definite sullo stesso intervallo  $[\alpha, \beta]$ , di classe  $C^1([a, b])$  e tali che  $f(x) \leq g(x)$ , definiamo

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \alpha \leq x \leq \beta, f(x) \leq y \leq g(x)\}.$$

Un tale insieme si dice **normale** rispetto all'asse  $x$ .

**Teorema A.17** Sia  $\omega$  una forma differenziale chiusa definita su  $E$ , e sia  $D$  un insieme normale rispetto all'asse  $x$  contenuto in  $E$ . Allora  $\omega$  è esatta in  $D$ .

**Dimostrazione.** Sia  $(x, y)$  in  $D$ , e sia  $\gamma_{(x,y)}$  la curva ottenuta unendo  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , dove  $\gamma_1(t) = (t, f(t))$  per  $t$  in  $[a, x]$ , e  $\gamma_2(t) = (x, t)$  con  $t$  in  $[f(x), y]$ . Definiamo

$$f(x, y) = \int_{\gamma_{(x,y)}} \omega,$$

e dimostriamo che il differenziale di  $f$  è  $\omega$ .

Usando la definizione di  $f$ , abbiamo

$$f(x, y) = \int_a^x [a(t, f(t)) + b(t, f(t)) f'(t)] dt + \int_{f(x)}^y b(x, t) dt.$$

Derivando, ricordando le formule di derivazione sotto il segno di integrale, ed usando il fatto che  $a_y = b_x$ , si ha

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= a(x, f(x)) + b(x, f(x)) f'(x) \\ &\quad + \int_{f(x)}^y b_x(x, t) dt - b(x, f(x)) f'(x) \\ &= a(x, f(x)) + \int_{f(x)}^y a_y(x, t) dt \\ &= a(x, f(x)) + a(x, t) \Big|_{t=f(x)}^{t=y} = a(x, y). \end{aligned}$$

D'altra parte,  $f_y(x, y) = b(x, y)$ , e la dimostrazione del teorema è conclusa. ■

Lo stesso teorema continua a valere per domini normali rispetto all'asse  $y$ :

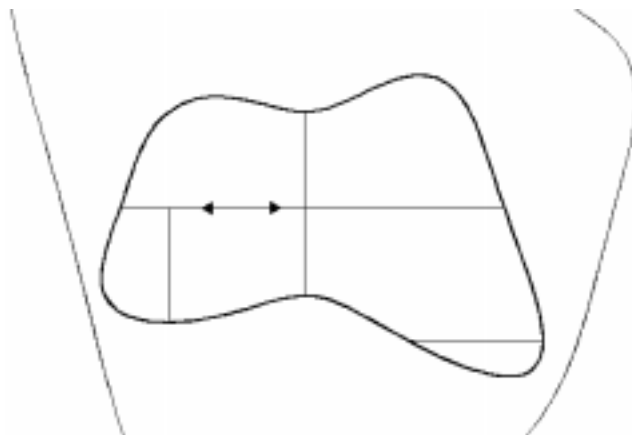
$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \gamma \leq y \leq \delta, h(y) \leq x \leq k(y)\},$$

con  $h$  e  $k$  funzioni di classe  $C^1([\gamma, \delta])$ .

**Teorema A.18** *Sia  $E$  un aperto connesso e semplicemente connesso di  $\mathbf{R}^2$ , e sia  $\gamma$  una curva regolare a tratti, chiusa e semplice contenuta in  $E$ . Sia  $D$  il sottoinsieme di  $E$  la cui frontiera è  $\gamma$ . Allora  $D$  si può decomporre nell'unione finita di sottoinsiemi  $D_1, \dots, D_n$  ognuno dei quali è normale rispetto all'asse  $x$  o all'asse  $y$ .*

**Teorema A.19** *Sia  $E$  un aperto connesso e semplicemente connesso di  $\mathbf{R}^2$ , e sia  $\omega$  una forma differenziale chiusa su  $E$ . Allora  $\omega$  è esatta.*

**Dimostrazione.** Sia  $\gamma$  una curva regolare a tratti, chiusa e semplice contenuta in  $E$ , e sia  $D$  il sottoinsieme di  $E$  la cui frontiera è  $\gamma$ . Per il Teorema A.18,  $D$  si può decomporre come unione di un numero finito di insiemi  $D_i$ , normali rispetto ad uno degli assi. Se dimostriamo che l'integrale di  $\omega$  lungo la frontiera di ognuno dei  $D_i$ , percorsa in senso antiorario, vale zero avremo la tesi. Infatti l'integrale di  $\omega$  lungo  $\gamma$  (percorsa in verso antiorario) è uguale alla somma degli integrali di  $\omega$  lungo le frontiere di  $D_i$ , dato che i tratti comuni sono percorsi due volte ed in verso opposto (si veda la figura).



Per il Teorema A.17,  $\omega$  è esatta su  $D_i$ ; dal momento che la frontiera di  $D_i$  è una curva chiusa semplice e regolare a tratti (essendo di classe  $C^1$  le funzioni  $f_i$  e  $g_i$ , ovvero  $h_i$  e  $k_i$ , che compaiono nella definizione di insieme normale) contenuta in  $D_i$ , e che  $D_i$  è connesso, il Teorema A.12 implica che l'integrale di  $\omega$  lungo la frontiera di  $D_i$  vale zero. ■

Come possiamo risolvere il problema dell'esattezza di una forma differenziale chiusa su un dominio non semplicemente connesso? La risposta è nel seguente teorema (dato senza dimostrazione).

**Teorema A.20** *Sia  $E$  un aperto connesso ma non semplicemente connesso di  $\mathbf{R}^2$ , e sia  $\omega$  una forma differenziale chiusa in  $E$ . Siano  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  due curve chiuse regolari a tratti, una contenuta dentro l'altra e tali che il dominio la cui frontiera è  $\gamma_1 \cup \gamma_2$  sia tutto contenuto in  $E$ . Allora*

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega.$$

L'applicazione classica di questo teorema è la seguente: se  $E$  è della forma  $D \setminus \{x_0\}$ , con  $D$  semplicemente connesso,  $\omega$  è chiusa in  $E$  ed esiste una curva  $\gamma$  chiusa, regolare a tratti, contenuta in  $E$  e tale da "girare" intorno a  $x_0$  per la quale l'integrale di  $\omega$  lungo  $\gamma$  vale zero, allora  $\omega$  è esatta.

Infatti l'integrale di  $\omega$  lungo una qualsiasi curva chiusa che non gira intorno a  $x_0$  vale zero (perché tale curva è la frontiera di un dominio semplicemente connesso, e  $\omega$  è chiusa), mentre se la curva gira intorno a  $x_0$  l'integrale è nullo per il teorema precedente (usando la curva  $\gamma$  come "paragone").

**Esempio A.21** La forma differenziale

$$\omega(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy,$$

che è chiusa in  $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  (come si verifica facilmente), è anche esatta in tale insieme. Infatti l'integrale di  $\omega$  lungo la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 è dato da

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\cos(t) (-\operatorname{sen}(t))}{\cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t)} + \frac{\operatorname{sen}(t) (\cos(t))}{\cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t)} \right] dt = 0.$$

Ed infatti, la funzione  $f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$  è tale che il suo differenziale è esattamente  $\omega$ .