Capitolo 4

Il Teorema di Mountain-Pass

Descriviamo ora un altro metodo per trovare soluzioni non nulle di alcuni tipi di problemi, per esempio

$$\begin{cases} -\Delta u &= |u|^{p-1}u \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \qquad\quad \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

con $p > 1$, utilizzando dei *minimax*.
Per motivare ciò, consideriamo una situazione intuitiva.
Se $\varphi \in C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$, possiamo vedere $\varphi(x, y)$ come altitudine del punto del grafico di φ avente (x, y) come proiezione su $\mathbf{R}^2$. Assumiamo che esistano due punti $u_0,\ u_1 \in \mathbf{R}^2$ e un intorno aperto Θ di u_0 tale che $u_1 \in \mathbf{R}^2 \backslash \Theta$ e $\varphi(u) > \max(\varphi(u_0), \varphi(u_1))$ quando $u \in \partial\Theta$, (per esempio u_0 e u_1 sono due punti di minimo isolati di φ).
Guardando il grafico di φ in modo topografico possiamo considerare il punto $[u_0, \varphi(u_0)]$ localizzato in una valle, circondato da un anello montuoso raffigurato dall'insieme $\{[u, \varphi(u)] :\ u \in \partial\Theta\}$ e il punto $[u_1, \varphi(u_1)]$ localizzato fuori dall'anello montuoso.
Per andare da $[u_0, \varphi(u_0)]$ a $[u_1, \varphi(u_1)]$ in modo da minimizzare il cammino da percorrere, dobbiamo attraversare l'anello montuoso nel più basso passo di montagna.
La proiezione su $\mathbf{R}^2$ di questo passo di montagna fornisce un punto critico di φ con un valore critico

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{s \in [0,1]} \varphi(g(s))$$

dove con Γ denotiamo l'insieme dei cammini continui da u_0 a u_1, ovvero

$$\Gamma = \{g : [0, 1] \to \mathbf{R}^2 \text{ continua} : g(0) = u_0,\ g(1) = u_1\}.$$

Questo teorema di minimax si deduce dal Principio Variazionale di Ekeland (cf. [6]).

4.1 Il Lemma di Ekeland

Lemma 4.1.1 (Ekeland)**.** *Sia (M, d) uno spazio metrico completo e sia $\Phi : M \to (-\infty, +\infty]$ una funzione s.c.i., limitata inferiormente e non identicamente uguale a $+\infty$. Sia $\varepsilon > 0$ dato e $u \in M$ t.c.*

$$\Phi(u) \leq \inf_M \Phi + \varepsilon.$$

Allora esiste $v \in M$:

$$\Phi(v) \leq \Phi(u)$$

$$d(u, v) \leq 1 \tag{4.2}$$

e, $\forall\ w \neq v$ in M si ha che

$$\Phi(v) \leq \Phi(w) + \varepsilon d(v, w). \tag{4.3}$$

Dimostrazione. La relazione

$$w \leq v \Longleftrightarrow \Phi(w) + \varepsilon d(v, w) \leq \Phi(v) \tag{4.4}$$

definisce un ordine su M, facilmente verificabile. Costruiamo induttivamente una successione (u_n) come segue, partendo da $u_0 = u$. Supponiamo di conoscere u_n, allora definiamo

$$S_n = \{w \in M \ : \ w \leq u_n\} = \{w \in M \ : \ \Phi(w) + \varepsilon d(u_n, w) \leq \Phi(u_n)\}$$

e scegliamo $u_{n+1} \in S_n$ t.c.

$$\Phi(u_{n+1}) \leq \inf_{S_n} \Phi + \frac{1}{n+1}.$$

Chiaramente, $S_{n+1} \subset S_n$ e $u_{n+1} \leq u_n$, e, dal fatto che Φ è s.c.i., S_n è chiuso. Ora, se $w \in S_{n+1}$, $w \leq u_{n+1} \leq u_n$ e dunque

$$\varepsilon d(w, u_{n+1}) \leq \Phi(u_{n+1}) - \Phi(w) \leq \inf_{S_n} \Phi + \frac{1}{n+1} - \inf_{S_n} \Phi = \frac{1}{n+1}$$

e quindi

$$\text{diam } S_n \leq \frac{2}{\varepsilon(n+1)}$$

ovvero diam $S_n \to 0$ quando $n \to \infty$.
Essendo M completo, dal Teorema di Baire (Cf. [9] pg. 72) segue che

$$\bigcap_{n \in \mathbf{N}} S_n = \{v\} \tag{4.5}$$

per qualche $v \in M$. In particolare, $v \in S_0$, ovvero

$$v \leq u_0 = \ u,$$

e quindi

$$\Phi(v) \leq \Phi(u) - \varepsilon d(u,v) \leq \Phi(u)$$

e

$$d(u,v) \leq \varepsilon^{-1}(\Phi(u) - \Phi(v)) \leq \varepsilon^{-1}(\inf_M \Phi + \varepsilon - \inf_M \Phi) = 1$$

e quindi la (4.2).
Per ottenere la (4.3) è sufficiente provare che, se $w \leq v$, allora $w = v$. Ma se $w \leq v$, allora $\forall\ n$ si ha che $w \leq u_n$ e quindi $w \in \bigcap_{n \in \mathbf{N}} S_n$ e, da (4.5) $w = v$.

□

Osservazione. Usando la distanza equivalente λd con $\lambda > 0$, le conclusioni (4.2) e (4.3) diventano rispettivamente

$$d(u,v) < \frac{1}{\lambda}$$

e

$$\Phi(v) \leq \Phi(w) + \varepsilon\lambda d(v,w) \tag{4.6}$$

Diamo ora alcune definizioni di derivata per una funzione definita su uno spazio di Banach.

Definizione 4.1.2. *Sia X uno spazio di Banach, sia $\omega \subset X$ e sia $F : \omega \to \mathbf{R}$ una funzione a valori reali. Se $u \in \omega$ e $z \in X$ sono tali che per ogni $t > 0$ si ha che $u + tz \in \omega$, diciamo che F ammette* **derivata direzionale** *lungo la direzione z se il limite*

$$F'_z(u) = \lim_{t \to 0^+} \frac{F(u+tz) - F(u)}{t}$$

esiste.

□

Anche se una funzione F ammette derivata direzionale lungo tutte le direzioni $z \in X$ non è detto che sia continua.

Definizione 4.1.3. *Sia X uno spazio di Banach, sia $\omega \subset X$ e sia $F : \omega \to \mathbf{R}$. Se $u \in \omega$, diciamo che F è* **derivabile nel senso di Gâteaux** *(o G-derivabile, o ancora G-differenziabile) in u, se esiste $l \in X'$, indipendente da z, tale che, lungo le direzioni $z \in X$ in cui $F(u+tz)$ esiste per ogni $t > 0$ abbastanza piccolo, la derivata direzionale $F'_z(u)$ esiste e:*

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{F(u+tz) - F(u)}{t} = \langle l, z \rangle.$$

Definiamo $F'(u) = l$.

□

Una funzione $G-$ *derivabile* non è necessariamente continua. Introduciamo ora la derivata nel senso classico (o derivata nel senso di Fréchet).

Definizione 4.1.4. *Sia X uno spazio di Banach, sia ω un aperto di X e sia $F : \omega \to \mathbf{R}$ una funzione. Se $u \in \omega$, diciamo che F* **è differenziabile** *(o derivabile) in u* **nel senso di Fréchet** *se esiste $l \in X'$, tale che:*

$$\forall\ v \in \omega \quad F(v) - F(u) = \langle l, v-u\rangle + o(v-u).$$

Se F è differenziabile, l è unico e denotiamo $F'(u) = l$. L'insieme delle funzioni differenziabili da $\omega \to \mathbf{R}$ sarà denotato con il simbolo $C^1(\omega, \mathbf{R})$.

□

Una funzione differenziabile nel senso di Fréchet è continua.

Definizione 4.1.5. *Sia X uno spazio di Banach, $\omega \subset X$ un aperto e $J \in C^1(\omega, \mathbf{R})$. Diremo che $u \in \omega$ è un* **punto critico** *di J, se $J'(u) = 0$. Se u non è un punto critico di J allora u è un* **punto regolare** *di J.*
Sia $c \in \mathbf{R}$, diciamo che c è un **valore critico** *di J, se esiste $u \in \omega$ tale che $J(u) = c$ e $J'(u) = 0$. Se c non è un valore critico di J allora u è un* **valore regolare** *di J.*

□

Dimostriamo un risultato per funzioni limitate inferiormente in uno spazio di Banach.

Teorema 4.1.6. *Sia X uno spazio di Banach, $\varphi : X \to \mathbf{R}$ una funzione limitata inferiormente e differenziabile su X.*
Allora, $\forall\ \varepsilon > 0$ e $\forall\ u \in X$ t.c.

$$\varphi(u) \leq \inf_X \varphi + \varepsilon, \tag{4.7}$$

esiste $v \in X$ t.c.

$$\varphi(v) \leq \varphi(u) \tag{4.8}$$

$$\|u - v\|_X \leq \sqrt{\varepsilon} \tag{4.9}$$

$$\|\varphi'(v)\|_X \leq \sqrt{\varepsilon} \tag{4.10}$$

Dimostrazione. Usiamo il Lemma di Ekeland con $M = X$, $\Phi = \varphi$, e $\forall\ \varepsilon > 0$ dato scegliamo $\lambda = \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$.
Allora se u soddisfa (4.7), esiste v tale che valgono (4.8) e (4.9), e inoltre

$$\varphi(w) > \varphi(v) - \varepsilon^{\frac{1}{2}}\|v - w\|_X \tag{4.11}$$

$\forall\ w \neq v$ in X. Perciò, prendendo $w = v + th$ con $t > 0$ e $h \in X$, $\|h\|_X = 1$ in (4.11) abbiamo

$$\varphi(v + th) - \varphi(v) > -\varepsilon^{\frac{1}{2}} t.$$

Dividendo entrambi i membri per t e facendo tendere $t \to 0$ otteniamo

$$-\varepsilon^{\frac{1}{2}} \leq \langle \varphi'(v), h \rangle$$

$\forall\ h \in X$ con $\|h\|_X = 1$, e quindi (4.10) per la definizione di $\|\varphi'(v)\|_{X'}$.

□

Corollario 4.1.7. *Sia X uno spazio di Banach, $\varphi : X \to \mathbf{R}$ una funzione inferiormente limitata e differenziabile su X. Allora per ogni successione minimizzante (u_k) di φ esiste una successione minimizzante (v_k) di φ t.c.*

$$\varphi(v_k) \leq \varphi(u_k)$$

$$\|u_k - v_k\|_X \to 0 \ \textit{se}\ k \to +\infty$$

$$\|\varphi'(v_k)\|_X \to 0 \ \textit{se}\ k \to +\infty.$$

Dimostrazione. Se (u_k) è una successione minimizzante di φ, prendiamo

$$\varepsilon_k = \begin{cases} \varphi(u_k) - \inf_X \varphi & \text{se } \varphi(u_k) - \inf_X \varphi > 0 \\ \frac{1}{k} & \text{se } \varphi(u_k) - \inf_X \varphi < 0 \end{cases}$$

Prendiamo (v_k) associata a (u_k) e ε_k nel Teorema 4.1.6.

□

4.2 Il Teorema di Mountain-Pass

Diamo ora una dimostrazione del Teorema di Ambrosetti-Rabinowitz Mountain-Pass (cf. [2]). Per prima cosa diamo una definizione.

Definizione 4.2.1. *Sia X uno spazio di Banach. Sia $J : X \to \mathbf{R}$ di classe C^1. Si dice che J soddisfa la* **condizione di Palais-Smale (PS)** *a livello c se:*
$\forall\ (u_n) \subset X\ :$

$$|J(u_n)| \to c \tag{4.12}$$

$$\|J'(u_n)\|_{X'} \to 0 \ \textit{se}\ n \to +\infty \tag{4.13}$$

$\exists\ (u_{n_k}) \subset (u_n)\ :$

$$u_{n_k} \xrightarrow{X} u \ \textit{se}\ k \to +\infty.$$

□

Teorema 4.2.2 (Ambrosetti-Rabinowitz; Mountain-Pass)**.** *Sia X uno spazio di Banach. Sia Sia $J : X \to \mathbf{R}$ di classe C^1 tale che:*

$$J(0) = 0 \tag{4.14}$$

$$\exists\ R > 0,\ \rho > 0\ :\ J(u) \geq \rho\ \ \forall\ u \in X\ :\ \|u\|_X = R \tag{4.15}$$

$$\exists\ u_0 \in X,\ \|u_0\|_X > R\ :\ J(u_0) < 0. \tag{4.16}$$

Supponiamo inoltre che J verifichi la condizione di (PS).
Allora

$$\exists\ u \in X\ :\ J'(u) = 0,\ J(u) \geq \rho.$$

Dimostrazione. Sia

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1];\ X)\ :\ \gamma(0) = 0;\ \gamma(1) = u_0\}.$$

Γ è uno spazio metrico completo con la norma del sup. Sia

$$\psi(\gamma) = \max_{[0,1]} J(\gamma(t)) = J(\gamma(t_\gamma)) = J(u_\gamma).$$

Allora $\psi : \Gamma \to \mathbf{R}$ è continua, inoltre, se γ va da 0 a u_0 ($\|u_0\| > R$) $\Rightarrow\ \exists\ t_0\ :\ \|\gamma(t_0)\| = R$, e quindi dalla (4.15) si ha che:

$$\psi(\gamma) \geq \rho\ \ \forall\ \gamma \in \Gamma.$$

Per il Teorema 4.1.6 e il Corollario 4.1.7 si ha che: $\exists\ (u_n) \subset X\ :$

$$\psi(\gamma_n) = J(u_n) \to \inf_{\gamma \in\ \Gamma} \psi(\gamma) \text{ se } n \to +\infty \tag{4.17}$$

$$\|J'(u_n)\|_{X'} \to 0 \tag{4.18}$$

Sia

$$c = \inf_{\gamma \in\ \Gamma} \max_{t \in\ [0,1]} J(\gamma(t)).$$

Dalla (4.17) segue che

$$J(u_n) \to c. \tag{4.19}$$

Da (4.19), (4.18) e (PS) di ha che:

$$\exists\ (u_{n_k}) \subset (u_n)\ :\ u_{n_k} \to u \text{ se } k \to +\infty.$$

Allora, essendo J continuo,

$$J(u) = c \geq \rho$$

ed, essendo J' continuo,

$$J'(u) = 0$$

cioè la tesi.

□

Diamo ora un esempio di applicazione del Teorema di Mountain-Pass. Consideriamo il problema (4.1) con $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ a cui è associato il funzionale

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}. \tag{4.20}$$

Dimostriamo che questo funzionale soddisfa le ipotesi del Mountain-Pass. Intanto si vede che $J(0) = 0$. Verifichiamo l'ipotesi (4.16).
Sia $v \in H_0^1(\Omega)$ $v \neq 0$,

$$J(tv) = \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int_\Omega |v|^{p+1} = \alpha t^2 - \beta t^{p+1} \to -\infty \text{ se } t \to +\infty$$

e quindi abbiamo la (4.16).
Verifichiamo la (4.15). Per la disuguaglianza di Sobolev si ha che

$$\|u\|_{p+1}^{p+1} \leq \|u\|_{2^*}^{p+1}|\Omega|^{1-\frac{p+1}{2^*}} \leq S^{-1}|\Omega|^{1-\frac{p+1}{2^*}}\|u\|_{H_0^1}^{p+1}$$

e quindi esiste una costante C_p tale che

$$\frac{C_p^{-1}}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1} \leq \frac{1}{p+1}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{\frac{p+1}{2}}.$$

Si ha allora che:

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{C_p}{p+1}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{\frac{p+1}{2}} = \|u\|_{H_0^1}^2\left(\frac{1}{2} - \frac{C_p}{p+1}\|u\|_{H_0^1}^{p-1}\right).$$

Se $\|u\|_{H_0^1}^{p-1} = \frac{p+1}{4C_p} = R$, si ha

$$J(u) \geq \|u\|_{H_0^1}^2\left(\frac{1}{2} - \frac{C_p}{p+1}\frac{p+1}{4C_p}\right) = \frac{\|u\|_{H_0^1}}{4} > 0$$

e quindi la (4.15).
Rimane da verificare che J soddisfa la condizione di Paleis-Smale (PS).
Sia Γ come nella dimostrazione del Teorema di Ambrosetti-Rabinowitz, e sia

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma}\max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)).$$

Sia (u_n) una successione t.c.

$$J(u_n) \to c \tag{4.21}$$

e

$$\|J'(u_n)\|_{H^{-1}} \to 0. \tag{4.22}$$

Vediamo se esiste una sottosuccessione (u_{n_k}) t.c.

$$u_{n_k} \overset{H_0^1}{\to} u \text{ se } k \to +\infty.$$

La (4.21) equivale a

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u_n|^{p+1} \to c \tag{4.23}$$

mentre le (4.22) equivale a

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi = \int_\Omega |u_n|^{p-1} u_n \varphi + \langle y_n, \varphi \rangle \text{ con } y_n \overset{H^{-1}}{\to} 0. \tag{4.24}$$

Scelgliamo $\varphi = u_n$ nella (4.24) e dividiamo per $p+1$, otteniamo così

$$\frac{1}{p+1} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 = \frac{1}{p+1} \int_\Omega |u_n|^{p+1} + \frac{1}{p+1} \langle y_n, \varphi \rangle. \tag{4.25}$$

Sottraendo la (4.25) alla (4.24) otteniamo

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) \int_\Omega |\nabla u_n|^2 = c + \varepsilon_n + \frac{1}{p+1} \langle y_n, \varphi \rangle \leq c + \varepsilon_n + \|y_n\|_{H^{-1}} \|u_n\|_{H_0^1}$$

e quindi esistono due costanti C_1 e C_2 tali che $\|u_n\|^2_{H_0^1} \leq C_1 + C_2 \|u_n\|_{H_0^1}$ ovvero $\|u_n\|_{H_0^1} \leq M$ con M costante.
Quindi, a meno di sottosuccessioni abbiamo che esiste (u_{n_k}) t.c.

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \text{ in } H_0^1(\Omega),$$

$$u_{n_k} \to u \text{ in } L^p(\Omega),$$

$$u_{n_k} \to u \text{ q.o..}$$

Allora prendiamo come funzione test $u_{n_k} - u$ in (4.22) e otteniamo (chiamando per semplicità $u_{n_k} = u_n$), aggiungendo e sottraendo il termine $\int_\Omega \nabla u \nabla (u_n - u)$

$$\int_\Omega \nabla(u_n - u) \nabla(u_n - u) = \int_\Omega |u_n|^{p-1} u_n (u_n - u) + \langle y_n, (u_n - u) \rangle - \int_\Omega \nabla u \nabla (u_n - u).$$

Si ha che

$$\langle y_n, (u_n - u) \rangle \to 0 \text{ perché } y_n \overset{H^{-1}}{\to} 0 \text{ e } u_n \rightharpoonup u,$$

$$\int_\Omega \nabla u \nabla (u_n - u) \to 0 \text{ perché } \nabla u \text{ è fisso mentre } \nabla(u_n - u) \rightharpoonup 0.$$

Inoltre

$$\left| \int_\Omega |u_n|^{p-1} u_n (u_n - u) \right| \leq \int_\Omega |u_n|^{p+1} |u_n - u| \leq \left(\int_\Omega |u_n|^{2^*} \right)^{\frac{p}{2^*}} \left(\int_\Omega |u_n - u|^{\frac{2^*}{2^* - p}} \right)^{1 - \frac{p}{2^*}}.$$

La prima parentesi è limitata per l'immersione di $H_0^1(\Omega)$ in $L^{2^*}(\Omega)$ e per la stima su $\|u_n\|_{H_0^1}$, la seconda parentesi converge a 0 per la compattezza dell'immersione di $H_0^1(\Omega)$ in $L^s(\Omega)$ se $s = \frac{2^*}{2^* - p} < 2^*$ ma questo è vero se $p < 2^* - 1 = \frac{N+2}{N-2}$ che è vero per ipotesi.
In conclusione si ha che $u_{n_k} \overset{H_0^1}{\to} u$, ovvero vale la (PS). E quindi esiste u,

punto critico di J, ovvero soluzione di (4.1).
Verifichiamo ora che la soluzione è positiva e cioè vogliamo risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.26}$$

Consideriamo il funzionale

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega u_+^{p+1}.$$

Questo funzionale soddisfa le ipotesi del Teorema di Ambrosetti-Rabinowitz Mountain-Pass, e quindi ammette un punto critico. Questo punto critico è soluzione del seguente problema

$$\begin{cases} -\Delta u = u_+^p & \text{in } \Omega \\ u \neq 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.27}$$

Ma una soluzione di (4.27) risolve (4.26), infatti, consideriamo l'equazione $F'(u) = 0$, che è vera perchè u è un punto critico per F. Prendiamo come funzione test u_-. Otteniamo

$$\int_\Omega \nabla(u_+ - u_-)\nabla u_- = \int_\Omega (u_+)^p u_- = 0.$$

Ma il primo membro di questa equazione è $-\int_\Omega |\nabla u_-|^2$ e quindi si ha che

$$\int_\Omega |\nabla u_-|^2 = 0$$

ovvero $u_- = 0$, e quindi $u = u_+$.

Si può dimostrare che se Ω è un insieme stellato il problema (4.1) non ammette soluzione per $p \geq \frac{N+2}{N-2}$.
Consideriamo per semplicità $\Omega = B(0,1)$ nel problema

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) & \text{in } B(0,1) \\ u = 0 & \text{su } \partial B(0,1) \end{cases} \tag{4.28}$$

La non-esistenza di soluzioni non banali per il problema (4.28) discende dall'**identità di Pohozaev** (cf. [12]):

$$(1 - \frac{N}{2})\int_B |\nabla u|^2 - \frac{1}{2}\int_{\partial B} (\nabla u \cdot \nu)^2 = -N\int_B G(u) \tag{4.29}$$

dove ν è la normale esterna a B, e $g(s) = \int_0^s g(t)dt$.
Applicando l'identità di Pohozaev al problema seguente

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p & \text{in } B(0,1) \\ u \geq 0 & \text{in } B(0,1) \\ u = 0 & \text{su } \partial B(0,1) \end{cases} \tag{4.30}$$

tenendo conto che $\int_B |\nabla u|^2 = \int_B g(u)u$, $g(u) = u^p$, e $G(u) = \frac{1}{p+1}u^{p+1}$, moltiplicando per $\frac{2}{N+2}$ si ottiene

$$\int_B \left(\frac{2^*}{p+1} - 1\right) u^{p+1} = \int_{\partial B} \frac{(\nabla u \cdot \nu)^2}{N-2} \geq 0.$$

Dunque, se $p+1 > 2^*$ si ha che $-\int_B u^{p+1} \geq 0$ e quindi $u \equiv 0$, mentre se $p+1 = 2^*$ otteniamo $\int_{\partial B}(\nabla u \cdot \nu)^2 = 0$ e quindi $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ su ∂B. Usando il Principio del Massimo si ha che $\frac{\partial u}{\partial \nu} < 0$ su $B(0,1)$ e quindi $u \equiv 0$ su tutto $B(0,1)$. E quindi se $p \geq \frac{N+2}{N-2}$ l'unica soluzione di (4.30) è quella banale.

Forniamo ora, senza dimostrazione, una versione più generale del Teorema di Ambrosetti-Rabinowitz Mountain-Pass (cf. [2]) che permette di risolvere il seguente tipo di problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.31}$$

Teorema 4.2.3. *Consideriamo il problema* (4.31). *Siano f una funzione di Carathéodory e $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt$ tali che:*

i) $|F(x,u)| \leq C_1 + C_2|u|^{p+1}$ *con* $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ *e* C_1, C_2 *due costanti;*

ii) $|f(x,u)| \leq \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2|u|^p$ *con* $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ *e* $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$ *due costanti;*

iii) $\frac{F(x,u)}{u^2} \rightrightarrows 0$ *uniformemente in x quando $u \to 0^+$;*

iv) $\exists\ m > 2$ *e* $A > 0$ *tale che* $f(x,s)s \geq mF(x,s)\ \ \forall\ |s| \geq A$.

Allora esiste una soluzione di (4.31).

□

Osservazione. Dalla iv) segue che $\frac{F(x,s)}{s^2} \to +\infty$ quando $s \to +\infty$.