

Calcolo I, a.a. 2009–2010 – Primo esonero

10 novembre 2009

1) – 6 punti

Dimostrare per induzione che

$$3^{n+1} \geq n^2, \quad \forall n \geq 2.$$

Se $n = 2$, abbiamo $3^{2+1} = 27 \geq 4 = 2^2$, cosicché la disuguaglianza è vera. Supponiamo ora che la disuguaglianza sia vera per n (ovvero che $3^{n+1} \geq n^2$), e dimostriamo che — sotto questa ipotesi — si ha $3^{n+2} \geq (n+1)^2$. Si ha

$$3^{n+2} = 3 \cdot 3^{n+1} \geq [\text{ipotesi induttiva}] \geq 3n^2,$$

e dunque avremo la tesi se riusciamo a dimostrare che $3n^2 \geq (n+1)^2$ per ogni $n \geq 2$. Sviluppando il quadrato e semplificando, si ha

$$3n^2 \geq (n+1)^2 \iff 2n^2 - 2n - 1 \geq 0,$$

e l'ultima disequazione è vera se $n \leq (1 - \sqrt{3})/2$ (valori da scartare) o se $n \geq (1 + \sqrt{3})/2$. Essendo $(1 + \sqrt{3})/2 < 2$, la disuguaglianza è soddisfatta per ogni $n \geq 2$, come volevasi dimostrare.

2) – 7 punti

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \operatorname{sen} \left(\frac{n^4 + n^2 \operatorname{sen}(n)}{2n^3 \sqrt{n^3 + 3}} \right).$$

Definiamo, per semplicità,

$$a_n = \frac{n^4 + n^2 \operatorname{sen}(n)}{2n^3 \sqrt{n^3 + 3}}.$$

Mettendo in evidenza a numeratore e denominatore i termini che divergono più velocemente, abbiamo

$$a_n = \frac{n^4}{2n^{\frac{9}{2}}} \frac{1 + \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{3}{n^3}}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \frac{1 + \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{3}{n^3}}}.$$

Dal momento che la seconda frazione tende ad 1 (ricordiamo che $\frac{\operatorname{sen}(n)}{n^2}$ tende a zero per il teorema dei carabinieri essendo il rapporto tra una quantità limitata ed una che diverge), si ha che a_n tende a zero. Ricordando che, per uno dei limiti notevoli, $\frac{\operatorname{sen}(a_n)}{a_n}$ tende ad 1, si ha

$$\sqrt{n} \operatorname{sen} \left(\frac{n^4 + n^2 \operatorname{sen}(n)}{2n^3 \sqrt{n^3 + 3}} \right) = \sqrt{n} a_n \frac{\operatorname{sen}(a_n)}{a_n} = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} \frac{1 + \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{3}{n^3}}} \frac{\operatorname{sen}(a_n)}{a_n},$$

e quindi il limite vale $\frac{1}{2}$.

3) – 7 punti

Studiare la convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k 3^k}{4^k + k^2}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right).$$

Per la prima serie (che è a termini positivi) usiamo il criterio del rapporto:

$$\frac{(k+1) 3^{k+1}}{4^{k+1} + (k+1)^2} \frac{4^k + k^2}{k 3^k} = \frac{k+1}{k} \frac{3^{k+1}}{3^k} \frac{4^{k+1} \left(1 + \frac{(k+1)^2}{4^{k+1}}\right)}{4^k \left(1 + \frac{k^2}{4^k}\right)} = \frac{3}{4} \frac{k+1}{k} \frac{1 + \frac{(k+1)^2}{4^{k+1}}}{1 + \frac{k^2}{4^k}}.$$

Passando al limite, il rapporto converge a $\frac{3}{4}$. Essendo $\frac{3}{4} < 1$, la serie converge. Per la seconda serie, iniziamo con l'osservare che l'argomento della funzione tangente è positivo ed infinitesimo — e dunque definitivamente compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$. Pertanto, la serie è a termini positivi. Ricordando inoltre che se a_n tende a zero si ha che $\frac{\operatorname{tg}(a_n)}{a_n}$ tende ad 1, per il criterio del confronto asintotico la serie si comporta come la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+2)(k+3)},$$

che è convergente perché maggiorata dalla serie (convergente) di termine generico $\frac{1}{k^2}$.

4) – 6 punti

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Ricordando che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1, \quad \text{e che} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x}\right) = 1,$$

abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \right] \left[\frac{1}{x \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x}\right)} \right] \frac{1}{x},$$

e quindi il limite vale 0.

5) – 7 punti

Determinare i valori di a , b e c affinché sia continua la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x > 0, \\ c & \text{se } x = 0, \\ (ax + b) \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Essendo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x^2} = -\infty,$$

si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Dovendo essere tale limite uguale al valore di f nell'origine, se ne deduce che deve essere $c = 0$. Ricordiamo ora che non esiste il limite per x tendente a zero da sinistra della funzione $\text{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ (è sufficiente muoversi lungo le successioni $a_n = -\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$ e $b_n = -\frac{1}{\sqrt{\pi/2+2n\pi}}$). Questo fatto, ed il fatto che debba essere il limite in zero da sinistra di $f(x)$ pari a zero, obbliga b ad essere uguale a zero. Inoltre, essendo $\text{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ limitato, si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} ax \text{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0,$$

per ogni valore di a in \mathbb{R} (se $a = 0$, stiamo considerando la funzione identicamente nulla). In definitiva, è continua per ogni valore di a in \mathbb{R} la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ ax \text{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Calcolo I, a.a. 2009–2010 – Primo esonero

10 novembre 2009

1) – 6 punti

Dimostrare per induzione che

$$3^n \geq (n-1)^2, \quad \forall n \geq 3.$$

Se $n = 2$, abbiamo $3^3 = 27 \geq 4 = (3-1)^2$, cosicché la disuguaglianza è vera. Supponiamo ora che la disuguaglianza sia vera per n (ovvero che $3^n \geq (n-1)^2$), e dimostriamo che — sotto questa ipotesi — si ha $3^{n+1} \geq n^2$. Si ha

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n \geq [\text{ipotesi induttiva}] \geq 3(n-1)^2,$$

e dunque avremo la tesi se riusciamo a dimostrare che $3(n-1)^2 \geq n^2$ per ogni $n \geq 3$. Sviluppando il quadrato e semplificando, si ha

$$3(n-1)^2 \geq n^2 \iff 2n^2 - 6n + 3 \geq 0,$$

e l'ultima disequazione è vera se $n \leq (3 - \sqrt{3})/2$ (valori da scartare) o se $n \geq (3 + \sqrt{3})/2$. Essendo $(3 + \sqrt{3})/2 < 3$, la disuguaglianza è soddisfatta per ogni $n \geq 3$, come volevasi dimostrare.

2) – 7 punti

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \operatorname{sen} \left(\frac{n^4 - n^3 \cos(n)}{3n^3 \sqrt{n^3 + 1}} \right).$$

Definiamo, per semplicità,

$$a_n = \frac{n^4 - n^3 \cos(n)}{3n^3 \sqrt{n^3 + 1}}.$$

Mettendo in evidenza a numeratore e denominatore i termini che divergono più velocemente, abbiamo

$$a_n = \frac{n^4}{3n^{\frac{9}{2}}} \frac{1 - \frac{\cos(n)}{n^3}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^3}}} = \frac{1}{3\sqrt{n}} \frac{1 - \frac{\cos(n)}{n^3}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^3}}}.$$

Dal momento che la seconda frazione tende ad 1 (ricordiamo che $\frac{\cos(n)}{n^3}$ tende a zero per il teorema dei carabinieri essendo il rapporto tra una quantità limitata ed una che diverge), si ha che a_n tende a zero. Ricordando che, per uno dei limiti notevoli, $\frac{\operatorname{sen}(a_n)}{a_n}$ tende ad 1, si ha

$$\sqrt{n} \operatorname{sen} \left(\frac{n^4 - n^3 \cos(n)}{3n^3 \sqrt{n^3 + 1}} \right) = \sqrt{n} a_n \frac{\operatorname{sen}(a_n)}{a_n} = \frac{\sqrt{n}}{3\sqrt{n}} \frac{1 - \frac{\cos(n)}{n^3}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^3}}} \frac{\operatorname{sen}(a_n)}{a_n},$$

e quindi il limite vale $\frac{1}{3}$.

3) – 7 punti

Studiare la convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2 2^k}{3^k + k}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right).$$

Per la prima serie (che è a termini positivi) usiamo il criterio del rapporto:

$$\frac{(k+1)^2 2^{k+1}}{3^{k+1} + k + 1} \frac{3^k + k}{k^2 2^k} = \frac{(k+1)^2}{k^2} \frac{2^{k+1}}{2^k} \frac{3^{k+1} \left(1 + \frac{k+1}{3^{k+1}}\right)}{3^k \left(1 + \frac{k}{3^k}\right)} = \frac{2}{3} \frac{(k+1)^2}{k^2} \frac{1 + \frac{k+1}{3^{k+1}}}{1 + \frac{k}{3^k}}.$$

Passando al limite, il rapporto converge a $\frac{2}{3}$. Essendo $\frac{2}{3} < 1$, la serie converge. Per la seconda serie, iniziamo con l'osservare che l'argomento della funzione tangente è positivo ed infinitesimo — e dunque definitivamente compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$. Pertanto, la serie è a termini positivi. Ricordando inoltre che se a_n tende a zero si ha che $\frac{\operatorname{tg}(a_n)}{a_n}$ tende ad 1, per il criterio del confronto asintotico la serie si comporta come la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)},$$

che è convergente perché maggiorata dalla serie (convergente) di termine generico $\frac{1}{k^2}$.

4) – 6 punti

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{e^{\frac{1}{x}} - 1}.$$

Ricordando che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1, \quad \text{e che} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x (e^{\frac{1}{x}} - 1) = 1,$$

abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{e^{\frac{1}{x}} - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \right] \left[\frac{1}{x (e^{\frac{1}{x}} - 1)} \right] \frac{1}{x},$$

e quindi il limite vale 0.

5) – 7 punti

Determinare i valori di a , b e c affinché sia continua la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^3}} & \text{se } x > 0, \\ c & \text{se } x = 0, \\ (ax + b) \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Essendo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x^3} = -\infty,$$

si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x^3}} = 0.$$

Dovendo essere tale limite uguale al valore di f nell'origine, se ne deduce che deve essere $c = 0$. Ricordiamo ora che non esiste il limite per x tendente a zero da sinistra della funzione $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (è sufficiente muoversi lungo le successioni $a_n = -\frac{1}{2n\pi}$ e $b_n = -\frac{1}{\pi/2+2n\pi}$). Questo fatto, ed il fatto che debba essere il limite in zero da sinistra di $f(x)$ pari a zero, obbliga b ad essere uguale a zero. Inoltre, essendo $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ limitato, si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} ax \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

per ogni valore di a in \mathbb{R} (se $a = 0$, stiamo considerando la funzione identicamente nulla). In definitiva, è continua per ogni valore di a in \mathbb{R} la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^3}} & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ ax \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$