

6.1 Esercizio

Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' - 4y' + 4y = x^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

SOLUZIONE.

Si tratta di un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti:

1. si trovano le due soluzioni linearmente indipendenti dell'omogenea (polinomio caratteristico $(\lambda - 2)^2 = 0 \rightarrow \lambda = 2$ molteplicità 2) e^{2x} , $x e^{2x}$

L'integrale generale dell'omogenea é pertanto

$$y(x) = e^{2x}(c_1 + c_2 x)$$

2. si trova una soluzione della completa (anche per prove partendo da un generico $y(x) = Ax^2 + Bx + C$)

$$\begin{aligned} (Ax^2 + Bx + C)'' - 4(Ax^2 + Bx + C)' + 4(Ax^2 + Bx + C) &= x^2 \rightarrow \\ \rightarrow 2A - 8Ax - 4B + 4Ax^2 + 4Bx + 4C &= x^2 \end{aligned}$$

che implica

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{3}{8}$$

Una soluzione dell'equazione completa é pertanto

$$\bar{y}(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}$$

3. L'integrale generale dell'equazione completa é pertanto

$$y(x) = \frac{3}{8} - \frac{3 e^{2x}}{8} + \left(\frac{1}{2} + \frac{5 e^{2x}}{4} \right) x + \frac{x^2}{4}$$

6.2 Esercizio

Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y''' - y' = 4 e^{-x} + 3 e^{2x}, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = -1, \\ y''(0) = 2 \end{cases}$$

SOLUZIONE.

Si tratta di un'equazione differenziale lineare di ordine 3, non omogenea a coefficienti costanti.

L'equazione caratteristica associata é

$$\lambda^3 - \lambda = 0, \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$$

L'integrale generale dell'equazione omogenea associata é pertanto

$$y_0(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + c_3 e^{\lambda_3 x} = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$$

Una soluzione dell'omogenea si trova pensando separatamente alle due equazioni

$$\begin{aligned} y''' - y' &= 4 e^{-x}, \\ y''' - y' &= 3 e^{2x}, \end{aligned}$$

Entrambe hanno a secondo membro funzioni particolarmente semplici:

- per la prima, tenuto conto che e^{-x} é soluzione dell'omogenea si potrà cercare una soluzione della completa nella forma

$$\bar{y}_1(x) == A x e^{-x}$$

Sostituendo si *deve avere*

$$2Ae^{-x} = 4 e^{-x} \quad \rightarrow \quad A = 2, \quad \rightarrow \quad \bar{y}_1(x) = 2 x e^{-x}$$

- per la seconda, tenuto conto che e^{2x} non é soluzione dell'omogenea si potrà cercare una soluzione della completa nella forma

$$\bar{y}_2(x) == A e^{2x}$$

Sostituendo si *deve avere*

$$6Ae^{2x} = 3 e^{2x}, \quad \rightarrow \quad A = 1/2 \quad \rightarrow \quad \bar{y}_2(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$$

L'integrale generale dell'equazione completa é pertanto

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + 2 x e^{-x} + \frac{1}{2}e^{2x}$$

La soluzione del problema di Cauchy assegnato si ottiene determinando opportunamente le tre costanti libere c_1, c_2, c_3

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + 2 x e^{-x} + \frac{1}{2}e^{2x} &\Rightarrow & y(0) = c_1 + c_2 + c_3 + \frac{1}{2} = 0 \\ y'(x) &= c_2 e^x - c_3 e^{-x} + 2e^{-x} - 2x e^{-x} + e^{2x} &\Rightarrow & y'(0) = c_2 - c_3 + 3 = -1 \\ y''(x) &= c_2 e^x + c_3 e^{-x} - 4e^{-x} + 2x e^{-x} + 2e^{2x} &\Rightarrow & y''(0) = c_2 + c_3 - 2 = 2 \end{aligned}$$

Ne segue

$$c_1 = -\frac{9}{2}, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 4$$

La soluzione pertanto é

$$y(x) = -\frac{9}{2} + 4 e^{-x} + 2 x e^{-x} + \frac{1}{2}e^{2x}$$

6.3 Esercizio

Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' + y'' = xe^{-x}.$$

SOLUZIONE.

Si tratta di un'equazione che può essere pensata come lineare di I ordine nell'incognita $z = y''$

$$z' + z = xe^{-x} \quad \rightarrow \quad z(x) = \left(c + \frac{1}{2}x^2\right)e^{-x}$$

A questo punto c'è da fare

- due primitive:

$$y'(x) = \int \left(\left(c + \frac{1}{2}x^2\right)e^{-x} \right) dx = -\left(1 + c + x + \frac{x^2}{2}\right)e^{-x} + a$$

$$y(x) = -\int \left\{ \left(1 + c + x + \frac{x^2}{2}\right)e^{-x} + a \right\} dx = (3 + c + 2x + \frac{x^2}{2})e^{-x} + ax + b$$

- oppure calcolare direttamente l'integrale

$$\int_0^x (x-t)\left(c + \frac{1}{2}t^2\right)e^{-t} dt = -3 - c + x + cx + \frac{6 + 2c + 4x + x^2}{2e^x}$$

che fornisce (vedi paragrafo *Primitive di ordine superiore*) la doppia primitiva cercata alla quale aggiungere un generico polinomio di primo grado $ax + b$.

6.4 Esercizio

Integrale generale dell'equazione di Eulero $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3$

SOLUZIONE.

Si tratta di un'equazione differenziale lineare di ordine 2 non omogenea. L'equazione omogenea associata

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$$

è del tipo di Eulero: sue soluzioni possono essere trovate nella forma $y(x) = x^\lambda$
Sostituendo si *deve avere*

$$(\lambda(\lambda - 1) - 2\lambda + 2)x^\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda(\lambda - 1) - 2\lambda + 2 = 0$$

da cui $\lambda = 2$ oppure $\lambda = 1$

Le due funzioni x e x^2 sono (ovviamente linearmente indipendenti) soluzioni dell'omogenea e l'integrale generale dell'omogenea é

$$y(x) = Ax + Bx^2$$

Una soluzione dell'equazione completa puó essere cercata come polinomio $\bar{y}(x) = Ax^3$: sostituendo si *deve avere* $2A = 1$ da cui

$$\bar{y}(x) = \frac{1}{2}x^3$$

L'integrale generale dell'equazione é pertanto

$$y(x) = \frac{1}{2}x^3 + Bx^2 + Ax$$

6.5 Esercizio

Integrale generale di $y'' - 2xy' - 2y = 0$ sapendo che e^{x^2} é soluzione.

SOLUZIONE.

L'equazione assegnata é lineare di secondo ordine omogenea a coefficienti variabili: l'informazione che $y_1(x) = e^{x^2}$ é una sua soluzione ci autorizza a cercare un'altra soluzione $y_2(x)$ nella forma

$$A(x)e^{x^2}$$

sostituendo si *deve avere*

$$\left(A(x)e^{x^2}\right)'' - 2x\left(A(x)e^{x^2}\right)' - 2\left(A(x)e^{x^2}\right) = 0$$

ovvero

$$e^{x^2} \left\{ (A'' + 4xA' + 2A + 4x^2A) - 2x((A' + 2Ax) - 2A) \right\} = 0$$

ovvero ancora

$$A'' + 2xA' = 0, \quad \rightarrow \quad A'(x) = e^{-x^2} \quad \rightarrow \quad A(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Un'altra soluzione dell'equazione assegnata é pertanto

$$y_2(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

L'integrale generale é pertanto

$$y(x) = e^{x^2} \left\{ c_1 + c_2 \int_0^x e^{-t^2} dt \right\}$$

6.6 Esercizio

Determinare una base per lo spazio vettoriale V delle soluzioni della seguente equazione differenziale lineare omogenea del quarto ordine

$$y^{[4]} + 2y'' + y = 0$$

SOLUZIONE.

Si tratta di un'equazione differenziale lineare omogenea di ordine 4: lo spazio V delle sue soluzioni ha dimensione 4.

La determinazione di una sua base é affidata alla determinazione delle radici dell'equazione di quarto grado

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

equazione biquadratica che ha la radice doppia $\lambda^2 = -1$ da cui le due radici (doppie) dell'equazione caratteristica,

$$\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i$$

Una base di V é costituita pertanto dalle seguenti 4 funzioni

$$y_1(x) = e^{ix}, y_2(x) = x e^{ix}, y_3(x) = e^{-ix}, y_4(x) = x e^{-ix}$$

Tenuto conto che

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x), \quad e^{-ix} = \cos(x) - i \sin(x)$$

una base di V é anche costituita da

$$y_1(x) = \cos(x), y_2(x) = x \cos(x), y_3(x) = \sin(x), y_4(x) = x \sin(x)$$

Ovvero ancora tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono date da

$$y(x) = (A + Bx) \cos(x) + (C + Dx) \sin(x), \quad \forall A, B, C, D \in \mathbb{R}$$

6.7 Esercizio

Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale lineare

$$y' - 5y = 3e^x - 2x + 1$$

SOLUZIONE.

Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea: soluzioni dell'equazione si determinano decomponendo il secondo membro nei tre addendi che lo compongono e determinando, per ciascun addendo, una soluzione ottenibile come riconosciuto nei casi particolari (polinomi, esponenziali, ecc.) considerati.

- Equazione omogenea $y' - 5y = 0$, $y_0(x) = e^{5x}$
- prima equazione non omogenea $y' - 5y = 3e^x$, $\bar{y}_1(x) = -3/4 e^x$
- seconda equazione non omogenea $y' - 5y = -2x$, $\bar{y}_2(x) = 2/5 x - 2/25$
- terza equazione non omogenea $y' - 5y = 1$, $\bar{y}_2(x) = 1/5$

Tutte le soluzioni dell'equazione sono pertanto:

$$y(x) = A e^{5x} - \frac{3}{4} e^x + \frac{2}{5} x - \frac{2}{25} + \frac{1}{5}$$

6.8 Esercizio

Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale lineare

$$y'' + y = 1 + \cos(x) + 10 \cos(2x) \quad (1)$$

SOLUZIONE.

Si tratta di un'equazione differenziale

- lineare
- a coefficienti costanti
- non omogenea

Equazioni di questo tipo sono state studiate nel modulo di *DERIVATE E INTEGRALI*

Equazione omogenea associata $y'' + y = 0$ detta *oscillatore armonico*.

Soluzioni:

$$Y(x) = A \sin(x) + B \cos(x), \quad \forall A, B \in \mathbb{R}$$

Equazione non omogenea Occorre trovare tre funzioni $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ (qualsiasi, ma diverse dalle soluzioni dell'equazione omogenea) che verifichino, rispettivamente

$$y_0''(x) + y_0(x) = 1, \quad y_1''(x) + y_1(x) = \cos(x), \quad y_2''(x) + y_2(x) = 10 \cos(2x)$$

Per quanto riguarda $y_0(x)$ è facile riconoscere che $y_0(x) = 1$ va bene ! L'idea di cercare y_1 nella forma

$$y_1(x) = \alpha \cos(x) + \beta \sin(x)$$

è evidentemente sbagliata perchè, come abbiamo visto sopra tutte le combinazioni lineari $A \sin(x) + B \cos(x)$ sono soluzioni dell'equazione omogenea.

Si può cercare y_1 nella forma più vicina a quella precedente

$$y_1(x) = \alpha x \cos(x) + \beta x \sin(x)$$

Fatti i conti si trova che va bene la funzione

$$y_1(x) = \frac{1}{2}x \sin(x)$$

Per quanto concerne y_2 il procedimento di cercarla nella forma

$$y_2(x) = \alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x)$$

va benissimo e, a conti fatti si trova che va bene

$$y_2(x) = -\frac{10}{3} \cos(2x)$$

Conclusioni Pertanto le soluzioni dell'equazione (1) sono le (infinite) funzioni

$$y(x) = A \sin(x) + B \cos(x) + 1 + \frac{1}{2}x \sin(x) - \frac{10}{3} \cos(2x)$$

6.9 Esercizio

Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + y' + y = \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) \quad (2)$$

Risolvere il problema di Cauchy

$$y'' + y' + y = 0, \quad y(\pi) = 1, \quad y'(\pi) = 0$$

SOLUZIONE.
EQUAZIONE OMOGENEA

$$y'' + y' + y = 0 \quad (3)$$

Polinomio caratteristico:

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(-1 \pm i\sqrt{3} \right)$$

Soluzioni dell'equazione omogenea

$$y_1(x) = e^{-x/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), \quad y_2(x) = e^{-x/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

Integrale generale dell'equazione omogenea

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

ovvero

$$y(x) = e^{-x/2} \left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right) \quad (4)$$

La (4) si chiama integrale generale dell'equazione omogenea (3) perché consente di risolvere qualunque problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' + y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

associato alla (3).

Per risolvere il problema

$$y'' + y' + y = 0, \quad y(\pi) = 1, \quad y'(\pi) = 0$$

basta scegliere i due coefficienti c_1 e c_2 in modo da soddisfare il sistema

$$\begin{cases} c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right) = e^{\pi/2} \\ -c_1 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right) + c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{\pi/2} \end{cases}$$

derivato dal rispetto delle condizioni iniziali.

Una proprietà delle soluzioni dell'omogenea Qualunque siano le costanti c_1 e c_2 scelte, ovvero qualunque siano le condizioni iniziali assegnate le funzioni

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

hanno limite zero per $x \rightarrow +\infty$.

Una soluzione della completa Cerchiamo in generale una soluzione dell'equazione generale

$$y'' + y' + y = \cos(kx) \quad (5)$$

Cerchiamo tale soluzione nella forma

$$y(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$$

Sostituendo si *deve avere*

$$\cos(kx) \{-Ak^2 + Bk + A\} + \sin(kx) \{-Bk^2 - Ak + A\} = \cos(kx)$$

Uguaglianza che implica

$$\begin{cases} A(1 - k^2) + Bk = 1 \\ -Ak + B(1 - k^2) = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$A = \frac{1 - k^2}{1 - k^2 + k^4}, \quad B = \frac{k}{1 - k^2 + k^4}$$

da cui la soluzione dell'equazione completa (5)

$$\bar{y}(x) = \frac{1}{1 - k^2 + k^4} ((1 - k^2) \cos(kx) + k \sin(kx))$$

Elenchiamo ora i tre casi relativi alla (5) per $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$ Le soluzioni particolari sono le seguenti

$k = 1$	$\sin(x)$
$k = 2$	$\frac{-3 \cos(2x) + 2 \sin(2x)}{13}$
$k = 3$	$\frac{-8 \cos(3x) + 3 \sin(3x)}{73}$

La soluzione della equazione completa

$$y(x) = e^{-x/2} \left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right) + \sin(x) + \frac{1}{13}(-3 \cos(2x) + 2 \sin(2x)) + \frac{1}{73}(-8 \cos(3x) + 3 \sin(3x)) \quad (6)$$

Tenuto conto che il primo gruppo di addendi, quello che contiene l'integrale generale dell'omogenea, rappresenta una funzione infinitesima per $x \rightarrow +\infty$ possiamo approssimare ben presto il grafico della $y(x)$ della (6) con il grafico dei soli altri addendi.

Nella figura seguente trovate disegnati sullo stesso piano il grafico della funzione $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x)$ messa a secondo membro dell'equazione (2), grafico in nero, e quello della soluzione dell'equazione completa depurato dei termini infinitesimi soluzioni dell'omogenea, grafico in rosso, Sono due grafici molto diversi...

Raffrontiamo nelle Figure seguenti lo stesso fenomeno pensando alle singole equazioni, quelle con un solo addendo a secondo membro,

Le tre figurine singole sembrano *fedeli* : la soluzione trovata somiglia perfettamente al termine forzante applicato, somiglia, tuttavia con una variante che può sembrare irrilevante

la scala, l'amplificazione (o il rimpicciolimento...)

Ed è proprio il diverso fattore di scala che i tre diversi addendi a secondo membro subiscono a produrre la mostruosa differenza riconoscibile nel caso dei tre addendi insieme illustrato in Figura (2).

Pensate che

- il termine $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x)$ sia un segnale in ingresso in un certo apparecchio (un amplificatore per esempio...)
- che il termine (6) sia la risposta (il suono diffuso dall'amplificatore...)
- fortemente distorto...!

6.10 Esercizio

Risolvere il problema di Cauchy

$$y'(x) = -\frac{y(x) - x y^2(x) - 2}{x - x^2 y(x) - 1}, \quad y(0) = 0. \quad (7)$$

SOLUZIONE. Posto

$$a(x, y) = y - x y^2 - 2, \quad b(x, y) = x - x^2 y - 1$$

consideriamo il campo vettoriale $\mathbf{F} = (a(x, y), b(x, y))$.

$-\mathbf{F}$ è conservativo in quanto è definito in tutto il piano e risulta

$$a_y = 1 - 2xy = b_x.$$

- Costruiamo un potenziale $U(x, y)$ per \mathbf{F} cioè una funzione scalare tale che $\mathbf{F} = \nabla U = (U_x, U_y)$.

Dalla condizione $U_x(x, y) = y - x y^2 - 2$ segue

$$U(x, y) = \int (y - x y^2 - 2) dx = xy - \frac{x^2 y^2}{2} - 2x + g(y)$$

e dalla condizione $U_y(x, y) = x - x^2 y - 1$ si trova $g'(y) = -1$ e quindi $g(y) = -y$.
Un potenziale è

$$U(x, y) = xy - \frac{x^2 y^2}{2} - 2x - y.$$

Tutte e sole le soluzioni dell'equazione $y' = -a(x, y)/b(x, y)$ verificano l'equazione in forma implicita $U(x, y) = c$.

Imponiamo la condizione iniziale $U(x, y) = U(0, 0) = 0$ e troviamo la soluzione del problema di Cauchy (7) nella forma

$$xy - \frac{x^2 y^2}{2} - 2x - y = 0$$

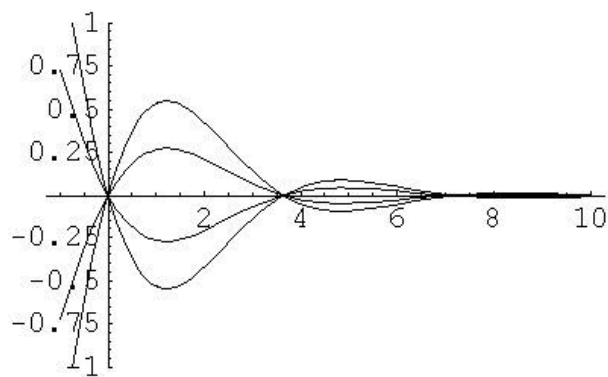


Figure 1: $y'' + y' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = h$, $h = -1, -0.5, 0.5, 1$

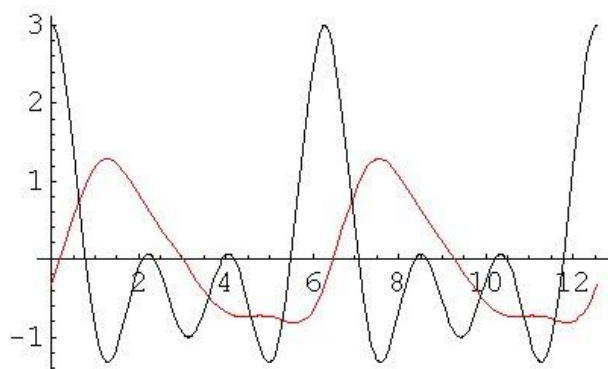


Figure 2: Il termine forzante e la soluzione...

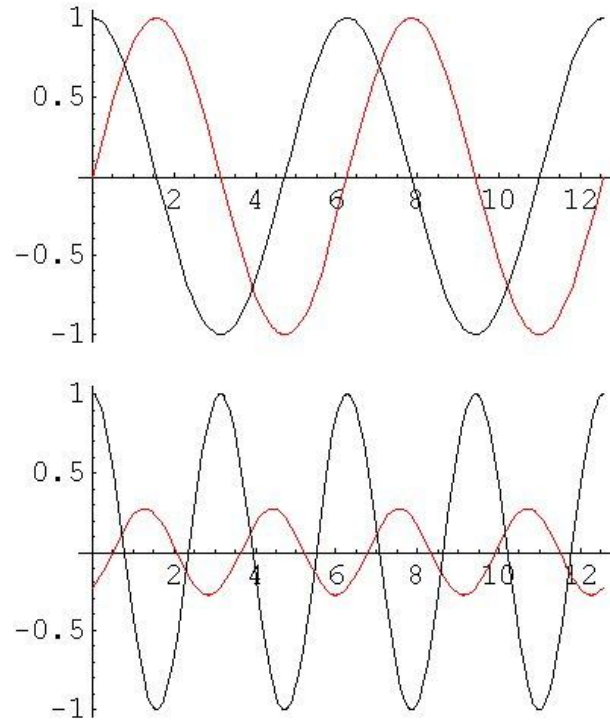


Figure 3: $y'' + y' + y = \cos(x)$, $y'' + y' + y = \cos(2x)$

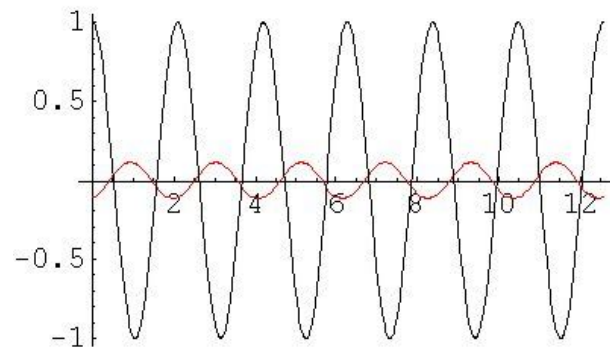


Figure 4: $y'' + y' + y = \cos(3x)$