Compito di Analisi vettoriale — a.a. 2006-2007
7 dicembre 2006

Chi deve fare lo scritto: svolgere **tre** esercizi a scelta per ognuna delle due parti. Chi è esonerato da una delle due parti: svolgere gli esercizi dellaltra.

1a) Sia $F(x,y) = \sin(xy^2) + 2xe^y + y^2$. Dopo aver dimostrato che l'equazione $F(x,y) = 0$ definisce implicitamente in un intorno di $(0,0)$ una funzione $y = f(x)$ o $x = g(y)$, scrivere il polinomio di Taylor del terzo ordine di tale funzione in un intorno dell'origine.

2a) Siano $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$. Dopo aver dimostrato che f ammette massimo e minimo su D, calcolare tali valori.

3a) Sia $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 \leq 2\,, y \geq 1 - x^2\}$. Disegnare E e calcolarne l'area tramite il teorema della divergenza.

4a) Data la superficie Σ definita da $z = x^2 + y^2/4$, con (x,y) in $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2/16 \leq 1\}$, calcolare l'area di Σ.

1b) Determinare, al variare di α in $\mathbb{R}$, la soluzione del problema di Cauchy

$$y'(x) = \cos(x)\,(e^{y(x)} - 1)\,, \qquad y(0) = \alpha\,.$$

2b) Si risolva il problema di Cauchy

$$y'''(x) - 2y''(x) + y'(x) = 2\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0\,, \quad y''(0) = -3\,.$$

3b) Sia, per β in $\mathbb{R}$, $y_\beta(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$y_\beta'(x) = y_\beta^2(x)\,(y_\beta(x) - 1)\,, \qquad y_\beta(0) = \beta\,.$$

Disegnare in modo qualitativo i grafici delle soluzioni y_β in un intorno di $x = 0$, determinando i valori di β per cui y_β è crescente o decrescente e quelli per i quali y_β ha dei flessi.

4b) Date le serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{nx}}{n}\,, \qquad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(n-1)!}\,,$$

se ne determini l'insieme di convergenza e si calcoli $S(x)$.