Compito di Analisi Reale — a.a. 2005-2006

25 gennaio 2006

---

1) Studiare la convergenza in ℓ^p, $1 \le p \le +\infty$ della successione $\{x^{(n)}\}$ definita da

$$x_k^{(n)} = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{k}}\right) & \text{se } k \le n, \\ 0 & \text{se } k > n. \end{cases}$$

La successione $x^{(n)}$ converge puntualmente a $x_k^{(0)} = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{k}}\right)$. Ricordando che, per x tendente a zero, $\operatorname{tg}(x) \approx x$, si vede facilmente che la successione $x^{(0)}$ appartiene ad ℓ^p se e solo se $p > 3$. Per tali valori di p si ha

$$d_p^p(x^{(n)}, x^{(0)}) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left| \operatorname{tg}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{k}}\right) \right|^p ,$$

che tende a zero per n tendente ad infinito (essendo la serie resto di una serie convergente). Inoltre,

$$d_\infty(x^{(n)}, x^{(0)}) = \sup_{k>n} \left| \operatorname{tg}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{k}}\right) \right| = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\right) ,$$

che tende anch'essa a zero. Pertanto $x^{(n)}$ converge a $x^{(0)}$ in ℓ^p, $3 < p \le +\infty$.

2) Dire perché è misurabile l'insieme

$$E = \{x \in \mathbb{R} : 1 < \mathrm{e}^x < 10\} \cup \left\{ \frac{\sqrt{2}}{n^2}, n \in \mathbb{N} \right\} \cup \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3^n}, 1 + \frac{1}{4^n} \right) ,$$

e successivamente calcolarne la misura.

Si ha $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, dove

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R} : 1 < \mathrm{e}^x < 10\} , \quad E_2 = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{n^2}, n \in \mathbb{N} \right\} , \quad E_3 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3^n}, 1 + \frac{1}{4^n} \right) .$$

L'insieme E_1 è misurabile, essendo l'intersezione di $E_0(\mathrm{e}^x)$ ed $E''_{10}(\mathrm{e}^x)$, insiemi misurabili essendo $x \mapsto \mathrm{e}^x$ continua. E_2 è misurabile perché numerabile, mentre E_3 è misurabile come intersezione numerabile di insiemi misurabili (sono infatti intervalli) — ovvero perché $E_3 = [0, 1]$. Essendo $E_1 = (0, \log(10))$, ne segue che $E_2 \subset E_1$ e quindi $E = E_1 \cup \{0\}$. Pertanto, $m(E) = \log(10)$.

3) Sia $g : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ misurabile, sia $E = \{x \in [-2, 2] : 2 < g(x) < 3\}$ e sia

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in E, \\ x^4 & \text{se } x \in [-2, 2] \setminus E. \end{cases}$$

Studiare la misurabilità di f. Se $g(x) = |x| + 1$, studiare la continuità di f.

Essendo g misurabile, è misurabile $E = E_2(g) \cap E''_3(g)$. Detto $F = [-2, 2] \setminus E$ (che è misurabile come differenza di insiemi misurabili, si ha

$$f(x) = x^2\, \chi_E(x) + x^4\, \chi_F(x) ,$$

cosicché f è misurabile come prodotto di funzioni misurabili. Se $g(x) = |x| + 1$, allora $E = (-2, -1) \cup (1, 2)$ e quindi f è continua ovunque tranne che per $x = \pm 2$.

4) Calcolare, giustificando i passaggi, la misura di $\bigcup_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3^n}-\frac{1}{4^n},\frac{1}{3^n}\right)$.

Studiando la disequazione $\frac{1}{3^n}-\frac{1}{4^n}\geq\frac{1}{3^{n+1}}$, si vede che è verificata solo per $n\geq 2$. Detto E l'insieme di cui si deve calcolare la misura, si ha allora

$$E=\left(\frac{1}{12},\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{7}{144},\frac{1}{9}\right)\cup\bigcup_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{1}{3^n}-\frac{1}{4^n},\frac{1}{3^n}\right),$$

e quindi, i primi due non essendo disgiunti,

$$E=\left(\frac{7}{144},\frac{1}{3}\right)\cup\bigcup_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{1}{3^n}-\frac{1}{4^n},\frac{1}{3^n}\right),$$

con unione disgiunta. Pertanto

$$m(E)=\frac{1}{3}-\frac{7}{144}+\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{4^n}=\frac{41}{144}+\frac{1}{48}=\frac{11}{36}\,.$$

5) Sia a_n la successione $1,3,9,1,3,9,1,3,\ldots$ Calcolare, giustificando i passaggi,

$$\int_{[0,1]}\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\,\chi_{\left(\frac{1}{3^n},\frac{1}{3^{n-1}}\right)}(x)\,.$$

La funzione

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\,\chi_{\left(\frac{1}{3^n},\frac{1}{3^{n-1}}\right)}(x)$$

è limitata in valore assoluto da 9, e così è la successione delle somme parziali della serie la cui somma è f. Pertanto, per il Teorema di convergenza limitata, è possibile scambiare sommatoria ed integrale. Si ha

$$\int_{[0,1]}\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\,\chi_{\left(\frac{1}{3^n},\frac{1}{3^{n-1}}\right)}(x)=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{3^n}\,.$$

Sfruttando la periodicità di a_n, si vede facilmente che l'integrale vale $\frac{27}{13}$.

---

1) Calcolare, giustificando i passaggi,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{(0,1)}x^n\,(1-x)\,\mathrm{e}^x\,.$$

Le funzioni $g_n(x)=x^n\,(1-x)\,\mathrm{e}^x$ sono non negative e misurabili (perché continue). Per un corollario del Teorema di Beppo Levi, è possibile scambiare serie ed integrale. Ricordando che la somma della serie di termine generico x^n è $\frac{x}{1-x}$, si ha, integrando per parti

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{(0,1)}x^n\,(1-x)\,\mathrm{e}^x=\int_{(0,1)}x\,\mathrm{e}^x=1\,.$$

2) Studiare la convergenza in $L^p((0,+\infty))$, $1\leq p\leq+\infty$ della successione di funzioni

$$f_n(x)=\frac{\cos(n-x)}{n+x^2}\,.$$

La successione f_n converge puntualmente a zero. Inoltre si ha

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}\,, \qquad |f_n(x)| \leq \frac{1}{n}\,.$$

Siccome la funzione $\frac{1}{1+x^2}$ appartiene ad $L^p((0,+\infty))$ per ogni $1 \leq p < +\infty$ (come si verifica facilmente), dal Teorema di Lebesgue segue la convergenza di f_n a zero in $L^p((0,+\infty))$ per ogni $1 \leq p < +\infty$. D'altra parte, dalla seconda maggiorazione segue che l'estremo superiore di $|f_n|$ tende a zero, e quindi f_n converge a zero in $L^\infty((0,+\infty))$.

3) Per quali valori di $p \geq 1$ appartiene ad $L^p((1,+\infty))$ la funzione

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n}\, \chi_{[4^n,4^{n+2})}(x)\,?$$

Gli insiemi $\big[4^n, 4^{n+2}\big)$ non sono a due a due disgiunti e quindi non è possibile calcolare direttamente $|f(x)|^p$. Si ha, però,

$$\big[4^n, 4^{n+2}\big) = \big[4^n, 4^{n+1}\big) \cup \big[4^{n+1}, 4^{n+2}\big)\,,$$

e quindi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n}\, \chi_{[4^n,4^{n+1})}(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n}\, \chi_{[4^{n+1},4^{n+2})}(x)\,.$$

Cambiando indice nella seconda sommatoria,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n}\, \chi_{[4^n,4^{n+1})}(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{n-1}}\, \chi_{[4^n,4^{n+1})}(x)\,,$$

da cui

$$f(x) = \chi_{[1,4)}(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n-1}}\right) \chi_{[4^n,4^{n+1})}(x) = \chi_{[1,4)}(x) + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}\, \chi_{[4^n,4^{n+1})}(x)\,.$$

Essendo gli insiemi a due a due disgiunti,

$$|f(x)|^p = \chi_{[1,4)}(x) + 4^p \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{np}}\, \chi_{[4^n,4^{n+1})}(x)\,.$$

Integrando $|f(x)|^p$, e scambiando integrale e sommatoria per il corollario del Teorema di Beppo Levi,

$$\int_{(0,1)} |f(x)|^p = 3 + 3\, 4^p \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{3^{np}}\,,$$

e l'ultima serie converge se e solo se $3^p > 4$, ovvero se e solo se $p > \frac{\log(4)}{\log(3)}$. Osservando inoltre che i valori assunti da f sono tutti minori di 1, si ha che f appartiene anche a $L^\infty((1,+\infty))$.

4) Sia

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \mathrm{sen}(n\,x)\,.$$

Dopo aver dimostrato che f è in $L^2((-\pi,\pi))$, dimostrare che f è derivabile due volte con continuità.

Ricordando che, per x tendente a 0, $1 - \cos(x) \approx \frac{x^2}{2}$, si vede facilmente che la successione $a_n = 1 - \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$ appartiene ad ℓ^2, e quindi f è in $L^2((-\pi, \pi))$. Inoltre, dal momento che $n^2\, a_n$ è in ℓ^1, convergono totalmente sia la serie che definisce f, sia la serie delle derivate prime, sia la serie delle derivate seconde. Pertanto, f è derivabile due volte con continuità.

5) Studiare la convergenza in $L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq p \leq +\infty$ della successione di funzioni

$$f_n(x, y) = \cos(n\, x\, y)\, \mathrm{e}^{-n(x^2+y^2)}\,.$$

La successione f_n converge puntualmente a zero ovunque tranne in $(0, 0)$ dove tende ad 1. Pertanto, f_n converge quasi ovunque a zero. Inoltre,

$$|f_n(x, y)| \leq \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,.$$

Dal momento che la funzione $\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ appartiene ad $L^p(\mathbb{R}^2)$ per ogni $1 \leq p < +\infty$ (come si verifica facilmente utilizzando le coordinate polari), dal Teorema di Lebesgue segue la convergenza di f_n a zero in $L^p(\mathbb{R}^2)$ per ogni $1 \leq p < +\infty$. D'altra parte, essendo f_n una successione di funzioni continue che converge ad una funzione discontinua, la convergenza non può essere uniforme — e quindi non si ha convergenza in $L^\infty(\mathbb{R}^2)$.