Primo esonero di Analisi Reale — a.a. 2005-2006
19 gennaio 2006
Svolgere non più di 5 esercizi

1) Calcolare, giustificando i passaggi,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_{(0,1)} \frac{x^{k+1}}{k+1}\,(1-x)\,.$$

2) Studiare la convergenza in $L^p((0,+\infty))$, $1 \le p \le +\infty$, della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(n\,x)\,\mathrm{e}^{-x}}{n+x}\,.$$

3) Per quali valori di $p \ge 1$ appartiene ad $L^p((0,1))$ la funzione

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} 3^k\,\chi_{\left[\frac{1}{4^{k+2}},\frac{1}{4^k}\right)}(x)\,?$$

4) Sia

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{k^3}\right)\cos(kx)\,.$$

Dopo aver dimostrato che f è in $L^2((-\pi,\pi))$, calcolare l'integrale di f su $(0,\pi)$ (motivando i passaggi); dimostrare successivamente che f è derivabile con continuità.

5) Sia

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(kx)}{k^2}\,.$$

Dimostrare che esiste una funzione g in $L^2((-\pi,\pi))$ tale che

$$f(x) = f(0) + \int_{[0,x]} g(t)\,, \qquad \forall x \in [-\pi,\pi]\,.$$

6) Studiare la convergenza in $L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 \le p \le +\infty$, della successione di funzioni

$$f_n(x,y) = \frac{\cos(n\,x\,y)}{\sqrt{n+x^2+y^2}}\,.$$

7) Sia f in $L^1(\mathbb{R})$ e

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-|t\,x|}\,|f(t)|\,dt\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Dimostrare che g è ben definita, limitata e continua. g è in $L^1(\mathbb{R})$?