Topologia Algebrica a.a. 2007/08 - Esercizi

Kieran G. O'Grady

30 Novembre 2007

Esercizio 1.

Sia X uno spazio topologico e $\sigma\colon \Delta^n \to X$ un simplesso singolare di X. Sia τ una permutazione dell'insieme $\{0, 1, \ldots, n\}$ e sia $sign(\tau) \in \{0, 1\}$ il *segno di* τ (cioè 0 se τ è pari, 1 se τ è dispari). Sia σ^τ il simplesso singolare di X definito da

$$\sigma^\tau := \sigma \circ (v_{\tau(0)}, \ldots, v_{\tau(n)}). \tag{0.1}$$

Dimostrare che

$$\sigma^\tau - (-1)^{sign(\tau)}\sigma \in \partial C_{n+1}(X; \mathbb{Z}) \tag{0.2}$$

(Suggerimento: considerate prima il caso $n = 1$.) e quindi

$$\sigma^\tau + \sigma \in \partial C_{n+1}(X; \mathbb{Z}/(2)). \tag{0.3}$$

(Suggerimento: considerate prima il caso $n = 1$.) L'equazione (0.3) permette di affermare che le classi in $H_n(X; \mathbb{Z}/(2))$ sono rappresentate da sottoinsiemi triangolati di X (senza alcuna "orientazione").

Esercizio 2.

Sia X un CW-complesso finito. Sia k un campo di caratteristica nulla. Dimostrate che $H_i(X; k) \cong H_i(X; \mathbb{Z}) \otimes k$.

Esercizio 3.

Sia X uno spazio topologico e k un campo. Supponiamo che $H_i(X; k)$ abbia dimensione finita per ogni i e che sia 0 per $i \gg 0$; allora ha senso definire la caratteristica di Eulero di X come

$$\chi_k(X) := \sum_i (-1)^i \dim H_i(X; k). \tag{0.4}$$

Supponiamo che X sia un CW-complesso finito e sia n_i il numero delle sue i-celle. Dimostrare che

$$\chi_k(X) := \sum_i (-1)^i \dim n_i. \tag{0.5}$$

In particolare $\chi_k(X)$ non dipende da k.

Esercizio 4.

Siano $r, R \in \mathbb{R}$ con $0 < r < R$. Dimostrare che esiste $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$0 \leq f \leq 1, \quad f|_{B(0,r)} \equiv 1, \quad suppf \subset B(0,R). \tag{0.6}$$

Esercizio 5.

Sia X una varietà differenziale. Verificate che abbiamo un'applicazione ben definita

$$\begin{array}{ccc} H^p_{DR}(X) \times H^q_{DR}(X) & \longrightarrow & H^{p+q}_{DR}(X) \\ ([\alpha], [\beta]) & \mapsto & [\alpha \wedge \beta] \end{array} \tag{0.7}$$

e che quindi $H^\bullet_{DR}$ acquista una struttura di anello.

Esercizio 6.

Calcolare $H^\bullet_{DR}(S^1)$.