Università degli Studi di Roma “La Sapienza”
Anno Accademico 2001-2002

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Prezzi di copertura per opzioni:
mercati completi ed incompleti a tempo discreto

Relatore
Prof. Giovanna Nappo

Studente
Belleudi Valeria
Matricola: 11112120

Indice

Introduzione

L'obiettivo di questa tesi è determinare, in un mercato a tempo discreto, i prezzi di copertura per particolari titoli obbligazionari detti opzioni.
Un'obbligazione è un contratto in cui due parti si impegnano a scambiarsi quantità di denaro in date diverse. Tipicamente, tutte le quantità oggetto di scambio sono note con esattezza alle parti al momento in cui l'impegno viene sottoscritto. Tuttavia, in alcuni casi, come per le opzioni, l'ammontare degli importi scambiati e, più raramente, le relative date di pagamento non sono conosciuti all'istante di stipula ma vengono determinati successivamente in dipendenza della struttura temporale del titolo (si pensi a un titolo azionario). Di solito uno dei contraenti può essere qualificato come creditore (*long side*) e la controparte, conseguentemente, come debitore (*short side*). In quest'ottica il possesso del titolo costituisce una garanzia per il creditore a ricevere l'importo pattuito da parte del debitore che ha venduto il titolo. Tale importo deve essere corrisposto in una data prefissata o entro tale data a seconda che il tipo di opzione sia, rispettivamente, Europea o Americana; quindi il tempo di esercizio può essere deterministico o aleatorio.
L'idea intuitiva che sta alla base di questo discorso è che *l'emissario dell'obbligazione, per onorare il contratto, cercherà un investimento che gli garantisca di ottenere, con probabilità* 1 *o almeno positiva, un capitale pari o superiore all'importo pattuito (copertura).*
Problemi di questo tipo risultano, come ovvio, direttamente connessi all'ammontare inizialmente disponibile per l'investimento di copertura. L'obiettivo da raggiungere è, dunque, quello di stabilire qual è la quota minima che permette di assicurarsi una strategia di copertura, tale quota

altro non è che il prezzo di vendita del contratto; da questo ragionamento deriva il concetto di *prezzo di copertura*.

Indispensabili, per la risoluzione di questa questione, risultano alcune condizioni sul mercato finanziario, nel caso specifico si assumerà di operare in un mercato a tempo discreto, con orizzonte finito e numero di azioni limitato. Sotto tali condizioni verranno definiti e dimostrati due dei teoremi principali che legano elementi finanziari a modelli probabilistici: *First and Second Fundamental Asset Pricing Theorem (APT1) e (APT2)* [9]. Nel dettaglio questi teoremi dimostrano che caratteristiche economiche del mercato quali l'*assenza di opportunità di arbitraggio* e la *completezza* sono legate, rispettivamente, all'esistenza e all'unicità di una *misura martingala equivalente*, cioè una misura di probabilità rispetto la quale la successione dei prezzi attualizzati dell'azione risulta una martingala.

L'importanza della struttura del mercato verrà sottolineata tramite i controesempi del capitolo I: si mostrerà, infatti, che nel caso di orizzonte infinito [8] e di numero di azioni infinito cade la relazione di equivalenza tra arbitrage-free e l'esistenza di una misura martingala.

Si procederà illustrando l'idea di F. Black e M. Scholes [2] e di R. Merton [4]: in un mercato completo e arbitrage-free

> *la dinamica dei prezzi delle opzioni deve essere replicata*
>
> *dalla dinamica del valore della strategia ottimale di copertura*
>
> *nel corrispondente problema di investimento.*

Sfruttando questa idea e applicando i teoremi fondamentali si determinerà il prezzo di copertura per un'opzione Europea.

Interessante risulterà far vedere che in realtà la sola esistenza di una misura martingala equivalente (mercato privo di opportunità di arbitraggio) permette di arrivare, introducendo il concetto di *strategia di copertura con consumo*, a una stima del prezzo del contratto Europeo. Quindi anche il caso di non unicità della misura martingala equivalente (mercato non completo) presenta una trattazione esauriente. Si mostrerà, inoltre, che partendo dai risultati relativi alle opzioni Europee si può, attraverso opportune generalizzazioni, arrivare a determinare i prezzi di copertura nel caso Americano. Tali generalizzazioni sono connesse alla risoluzione del *problema di ottimizzazione dei tempi di esercizio*. Si esaurirà la trattazione dando, infine, un'applicazione pratica dei risultati mostrati nel caso di un mercato binomiale multiperiodale: *il modello di Cox Ross Rubinstein*.

Per chiarire la logica attraverso la quale si arriva ai risultati enunciati e evidenziare i legami tra i modelli probabilistici e gli elementi finanziari si è scelto di elencare e illustrare vicino ad ogni risultato le nozioni probabilistiche e finanziarie necessarie per determinarlo.
I riferimenti bibliografici usati per gli elementi finanziari sono Moriconi [5] e Shiryaev [9], mentre per le nozioni probabilistiche di base, quali ad esempio il concetto di martingala, di estremo superiore essenziale, la formula di Bayes generalizzata, si è fatto riferimento, oltre al [9], ai testi di Baldi [1], di Billingsley [3] e di Williams [10]. Per le nozioni probabilistiche prettamente connesse all'ambito finanziario, ovvero la misura di Esscher e la decomposizione opzionale, vanno citati, rispettivamente, gli articoli di Rogers [7] e di El Karoui e Quenez [6].

Capitolo 1

Mercato (B, S): investimenti, proprietà e caratteristiche

1.1 Struttura del mercato (B, S)

Si ipotizzi che il mercato che si andrà a considerare operi sotto condizioni di incertezza rappresentabili in termini probabilistici da uno spazio di probabilità dotato di filtrazione

$$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}, P).$$

Il flusso $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ di σ-algebre può essere interpretato come il flusso di informazioni $\mathcal{F}_n$ accessibile fino all'istante n, con $n \geqslant 0$.
Si definisce *mercato*-(B, S) la coppia di elementi formata da $d + 1$ operazioni finanziarie:

un conto bancario B *titolo non rischioso*

$$d \quad \text{azioni } S = (S^1, \ldots, S^d) \qquad \textit{titolo rischioso}$$

in cui si è assunto che l'evoluzione del conto bancario possa venir descritta tramite una successione stocastica positiva

$$B = (B_n)_{n \geqslant 0}$$

dove le variabili B_n sono $\mathcal{F}_{n-1}$-misurabili per ogni $n \geqslant 1$.
Anche la dinamica dei valori dell'i-esimo titolo S^i può essere descritta da una successione stocastica

$$S^i = (S^i_n)_{n \geqslant 0}$$

dove le S^i_n sono variabili $\mathcal{F}_n$-misurabili per ogni $n \geqslant 0$.
Dalle definizioni date si vede che esiste una differenza sostanziale tra un conto bancario e un'azione; ovvero, la $\mathcal{F}_{n-1}$-misurabilità di B_n indica che lo stato del conto bancario al tempo n risulta già conosciuto (si hanno tutte le informazioni) al tempo $n-1$: la variabile B_n per questa sua caratteristica è detta *predicibile*. La situazione per i prezzi delle azioni è completamente differente: le variabili S^i_n sono $\mathcal{F}_n$-misurabili, ciò significa che i loro valori attuali si possono determinare solo dopo che risultano disponibili tutte le informazioni $\mathcal{F}_n$ arrivate fino al tempo n.
Tali considerazioni permettono di capire perché si dice che un conto bancario è un'operazione non rischiosa mentre le azioni sono dei titoli rischiosi.
Ponendo

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{B_n - B_{n-1}}{B_{n-1}} = \frac{\Delta B_n}{B_{n-1}} \qquad tasso\, di\, interesse \\ \rho^i_n &= \frac{S^i_n - S^i_{n-1}}{S^i_{n-i}} = \frac{\Delta S^i_n}{S^i_{n-1}} \qquad rendimento\, dell'azione\, i \end{aligned}$$

si può scrivere

$$\Delta B_n = r_n B_{n-1}, \tag{1.1}$$

$$\Delta S_n^i = \rho_n^i S_{n-1}^i, \tag{1.2}$$

dove le r_n sono $\mathcal{F}_{n-1}$-misurabili e le ρ_n^i sono $\mathcal{F}_n$-misurabili.
Allora per $n \geqslant 1$ si ha

$$B_n = B_0 \prod_{k=1}^{n} (1 + r_k) \tag{1.3}$$

$$S_n^i = S_0^i \prod_{k=1}^{n} (1 + \rho_k^i). \tag{1.4}$$

1.1.1 Strategia di investimento di un portfolio

Si consideri un investitore sul mercato (B, S) che può:

1. depositare o prendere soldi dal conto bancario
2. vendere e comprare azioni.

Si assumerà che un trasferimento di denaro da un'operazione ad un'altra non richieda costi di transazione e che le operazioni risultano infinitamente divisibili, cioè, l'investitore può comprare, o vendere, qualunque porzione di azione e prelevare, o depositare, qualsiasi ammontare dal conto bancario.
Si vogliono ora introdurre alcune definizioni in merito alle operazioni, alle posizioni e alle strategie finanziarie possibili in tale mercato.

Definizione 1.1.1. Una successione stocastica predicibile

$$\pi = (\beta, \gamma)$$

dove $\beta = (\beta_n(\omega))_{n \geqslant 0}$ e $\gamma = (\gamma_n^1(\omega), \ldots, \gamma_n^d(\omega))_{n \geqslant 0}$ e tale che $\beta_n(\omega)$ e $\gamma_n^i(\omega)$ risultano $\mathcal{F}_{n-1}$-misurabili per ogni $n \geqslant 0$ e $i = 1, \ldots, d$ è detta *investimento di un portfolio* sul mercato (B, S).

Per enfatizzare il dinamismo al quale risulta sottoposto l'investimento di un portfolio viene spesso usato il termine *strategia di investimento.*

Si osservi che le variabili $\beta_n(\omega)$ e $\gamma_n^i(\omega)$ possono essere positive, nulle e anche negative; quest'ultimo caso indica che l'investitore può prendere un prestito dalla banca e vendere azioni che non possiede (*vendita a corto*).
Un altro punto importante da sottolineare è che la $\mathcal{F}_{n-1}$-misurabilità indica che le variabili $\beta_n(\omega)$ e $\gamma_n^i(\omega)$, che descrivono la posizione finanziaria dell'investitore al tempo n (ovvero l'ammontare presente sul conto bancario e le azioni in suo possesso), sono determinabili tramite le informazioni ottenibili fino al tempo $n - 1$ mentre *non* sono necessarie quelle relative al tempo n (*la posizione di domani è completamente definita dalla situazione presente oggi*).
Il tempo $n = 0$ gioca un ruolo importante; infatti la predicibilità in tale istante, formalmente equivalente alla $\mathcal{F}_{-1}$-misurabilità, corrisponde alla $\mathcal{F}_0$-misurabilità, si assume cioè $\mathcal{F}_{-1} = \mathcal{F}_0$.
Si è già assunto $n \geqslant 0$ verrà fatta anche l'ipotesi aggiuntiva di tempo limitato (*orizzonte finito*), ovvero $n \leqslant N$ da cui segue che si considereranno solo gli istanti di tempo $0 \leqslant n \leqslant N$.

Nell'indicare una generica successione $(a_n)_{n=0}^N$ si useranno, equivalentemente, le espressioni: $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(a_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ o addirittura (a_n).

Definizione 1.1.2. Il *valore* associato a una strategia di investimento π è la successione stocastica:

$$X^\pi = (X_n^\pi)_{n\geqslant 0}$$

dove

$$X_n^\pi = \beta_n B_n + \sum_{i=1}^d \gamma_n^i S_n^i. \tag{1.5}$$

Per evitare di appesantire le notazioni si indicherà con $\gamma_n S_n$ il prodotto scalare dei vettori $\gamma_n = (\gamma_n^1, \dots, \gamma_n^d)$ e $S_n = (S_n^1, \dots, S_n^d)$ per cui la (1.5) diviene

$$X_n^\pi = \beta_n B_n + \gamma_n S_n. \tag{1.6}$$

Si osservi che prese due successioni arbitrarie $a = (a_n)_{n\geqslant 0}$ e $b = (b_n)_{n\geqslant 0}$ sussiste la *regola di differenziazione discreta*:

$$\Delta(a_n b_n) = a_n \Delta b_n + b_{n-1}\Delta a_n, \tag{1.7}$$

applicando questo risultato alla parte destra della (1.6) si ottiene l'espressione:

$$\begin{aligned} \Delta X_n^\pi &= \Delta(\beta_n B_n) + \Delta(\gamma_n S_n) \\ &= [\beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n] + [B_{n-1}\Delta\beta_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n]. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Ciò mostra che il cambiamento del valore del portfolio ($\Delta X_n^\pi = X_n^\pi - X_{n-1}^\pi$) dipende, in generale, da due fattori:

1. dalla *variazione* dovuta al *conto bancario* e ai *prezzi delle azioni* $(\beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n)$;

2. dalla *variazione* della composizione del *portfolio* (*cambio di strategia*) $(B_{n-1}\Delta\beta_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n)$.

Risulta, dunque, ragionevole assumere che il reale cambio di valore di X_n^π sia sempre dovuto alle variazioni ΔB_n e ΔS_n e non $\Delta\beta_n$ e $\Delta\gamma_n$ (si assume, cioè, che le posizioni finanziarie prese dall'investitore non siano soggette a cambiamenti).

Da quanto osservato si può concludere che il capitale guadagnato (*capital gains*) tramite l'investimento di un portfolio π può essere descritto da una successione $G^\pi = (G_n^\pi)_{n\geqslant 0}$, dove

$$G_0^\pi = 0 \qquad \text{e} \qquad G_n^\pi = \sum_{k=1}^{n}(\beta_k \Delta B_k + \gamma_k \Delta S_k), \tag{1.9}$$

quindi il valore del portfolio al tempo n è dato dall'espressione

$$X_n^\pi = X_0^\pi + G_n^\pi, \tag{1.10}$$

si arriva così alla seguente definizione:

Definizione 1.1.3. Un portfolio π è *autofinanziante* se il suo valore $X^\pi = (X_n^\pi)_{n\geqslant 0}$ può essere rappresentato dalla somma:

$$X_n^\pi = X_0^\pi + \sum_{k=1}^{n}(\beta_k \Delta B_k + \gamma_k \Delta S_k) \qquad n \geqslant 1. \tag{1.11}$$

Si vede immediatamente che assumere π autofinanziante equivale al verificarsi della seguente condizione

$$B_{n-1}\Delta\beta_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n = 0 \qquad n \geqslant 1. \tag{1.12}$$

La classe delle strategie π autofinanzianti verrà indicata con *SF* (*self-financing*).

Osservazione 1.1.1. Le ipotesi fondamentali che caratterizzano il mercato finanziario considerato, ovvero:

- ▷ *assenza di costi di transazione*;
- ▷ *titoli infinitamente divisibili*: non ci sono limiti sulle quantità minime dei titoli trattati;
- ▷ *possibilità di vendite allo scoperto (short sale)*: è possibile vendere titoli che non si possiedono, ciò equivale a ipotizzare che è sempre consentito assumere la posizione di debitore;
- ▷ *assenza di rischio di insolvenza (default risk)*: si assume che i contratti di compravendita stipulati vengano sicuramente onorati;

possono essere sintetizzate dicendo che il *mercato è privo di frizionalità* (per maggiori dettagli si consulti il Moriconi [5]).

1.1.2 Mercato scontato

Si consideri un mercato (B, S) come descritto precedentemente. È interessante notare che partendo da questo è sempre possibile costruire un nuovo mercato $(\widetilde{B}, \widetilde{S})$ detto *mercato scontato* o *attualizzato* tale che

$$\widetilde{B} = (\widetilde{B}_n)_{n \geqslant 0} \qquad \text{con} \qquad \widetilde{B}_n \equiv 1$$

e

$$\widetilde{S} = (\widetilde{S}_n)_{n \geqslant 0} \qquad \text{con} \qquad \widetilde{S}_n = \frac{S_n}{B_n}.$$

Allora preso un portfolio $\pi = (\beta, \gamma)$ il *valore scontato* $\widetilde{X}_n^\pi = (\widetilde{X}_n^\pi)_{n \geqslant 0}$ risulta dato dall'espressione

$$\widetilde{X}_n^\pi = \beta_n \widetilde{B}_n + \gamma_n \widetilde{S}_n = \beta_n + \gamma_n \widetilde{S}_n = \frac{1}{B_n} \left(\beta_n B_n + \gamma_n S_n \right) = \frac{X_n^\pi}{B_n} \tag{1.13}$$

e nel caso in cui π è autofinanziante nel mercato (B, S) si ha che questa proprietà si trasmette al mercato $(\widetilde{B}, \widetilde{S})$, infatti la condizione (1.12) implica

$$\widetilde{B}_{n-1} \Delta \beta_n + \widetilde{S}_{n-1} \Delta \gamma_n = \frac{1}{B_{n-1}} \left(B_{n-1} \Delta \beta_n + S_{n-1} \Delta \gamma_n \right) = 0. \tag{1.14}$$

Pertanto vale la (1.11) attualizzata dove, cioè, al posto di X, B, S si considera $\widetilde{X}$, $\widetilde{B}$, $\widetilde{S}$ ed essendo $\Delta \widetilde{B}_k \equiv 0$ segue, inoltre, che per $\pi \in SF$

$$\widetilde{X}_n^\pi = \widetilde{X}_0^\pi + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \Delta \widetilde{S}_k, \tag{1.15}$$

quindi l'espressione esplicita del valore del portfolio è

$$\widetilde{X}_n^\pi = \widetilde{X}_0^\pi + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{d} \gamma_k^i \Delta \widetilde{S}_k^i, \qquad \widetilde{S}_k^i = \frac{S_k^i}{B_k}. \tag{1.16}$$

Allora si conclude considerando la (1.13) e la (1.14) che il valore scontato $\frac{X^\pi}{B} = \left(\frac{X_n^\pi}{B_n} \right)_{n \geqslant 0}$ con $\pi \in SF$ soddisfa la relazione

$$\Delta \left(\frac{X_n^\pi}{B_n} \right) = \gamma_n \Delta \left(\frac{S_n}{B_n} \right). \tag{1.17}$$

Da quanto illustrato risulta chiaro che nel caso si sappia a priori che $B_n > 0$ con $n \geqslant 1$ si può semplificare la struttura del portfolio π assumendo $B_n \equiv 1$.

Dopo aver dato le nozioni base di mercato (B, S) un punto fondamentale che si vuole sottolineare è che si considererà *sempre e soltanto* un mercato che non prevede opportunità di arbitraggio (non esistono *free-lunch*, cioè pasti gratis), ovvero:

Definizione 1.1.4. Un mercato è detto *privo di opportunità di arbitraggio (arbitrage-free, razionale, fair)* se non permette di ottenere guadagni sicuri, cioè se non si possono ottenere dei profitti senza sottoporsi a dei rischi

N.B. La relazione illustrata nella (1.17), nella sua semplicità, risulterà assumere un ruolo chiave in molti calcoli relativi al concetto di arbitrage-free, ciò spiega il perché dell'introduzione del mercato scontato.

1.2 Nozione di copertura. Prezzo superiore e inferiore.

Sia $f_N = f_N(\omega)$ una funzione non negativa $\mathcal{F}_N$-misurabile detta *obbligazione* o *pay-off (prezzo di pagamento) terminale*

Definizione 1.2.1. Un portfolio $\pi = (\beta, \gamma)$ con $\beta = (\beta_n)$, $\gamma = (\gamma_n)$, per $n = 0, 1, \ldots, N$ è detto *copertura superiore per* (x, f_N) (o *copertura inferiore per* (x, f_N)) per $x \geqslant 0$ se

$$X_0^\pi = x \qquad \text{e} \qquad X_N^\pi \geqslant f_N \quad (P \text{ q.o.})$$

(rispettivamente $X_N^\pi \leqslant f_N \quad (P \text{ q.o.})$).
Una copertura per (x, f_N) si dirà *perfetta* se $X_0^\pi = x$, con $x \geqslant 0$, e $X_N^\pi = f_N \quad (P \text{ q.o.})$.

Il concetto di *copertura* gioca un ruolo di fondamentale importanza in ambito finanziario in quanto rappresenta uno strumento di protezione che permette di ottenere un livello di garanzia relativamente a un certo investimento.

Tramite le successive definizioni si potranno formalizzare le azioni che si devono compiere per assicurarsi un livello di garanzia.
Si indichi con

$$H^*(x, f_N; P) = \{\pi :\ X_0^\pi = x, \quad X_N^\pi \geqslant f_N \quad (P \text{ q.o.})\}$$

la classe di coperture superiori per (x, f_N) e con

$$H_*(x, f_N; P) = \{\pi :\ X_0^\pi = x, \quad X_N^\pi \leqslant f_N \quad (P \text{ q.o.})\}$$

la classe di coperture inferiori per (x, f_N).

Definizione 1.2.2. Sia f_N una funzione di pay-off, allora la quantità

$$C^*(f_N; P) = \inf\{x \geqslant 0 :\ H^*(x, f_N; P) \neq \emptyset\}$$

è detta *prezzo superiore* (di copertura per f_N) e

$$C_*(f_N; P) = \sup\{x \geqslant 0 :\ H_*(x, f_N; P) \neq \emptyset\}$$

è detta *prezzo inferiore* (di copertura per f_N).

N.B. Per convenzione si pone $C^*(f_N; P) = \infty$ se $H^*(x, f_N; P) = \emptyset$ per tutti gli $x \geqslant 0$ e $C_*(f_N; P) = \infty$ se $H_*(x, f_N; P) \neq \emptyset$ per tutti gli $x \geqslant 0$.

Osservazione 1.2.1. Le definizioni date precedentemente assumono, implicitamente, che le strategie π considerate seguono le costrizioni imposte sulla dinamica del valore del portfolio; ad esempio nel caso autofinanziante si prendono le sole strategie che soddisfano la condizione (1.12). Da quanto osservato segue che il concetto di copertura, essendo legato alla strategia che lo garantisce, dovrà essere rielaborato a seconda del portfolio ammissibile (si veda il caso delle strategie con consumo illustrato nel prossimo capitolo e in particolare la Definizione 2.3.1).

Dopo aver visto formalmente i concetti di copertura risulta interessante darne una visione pratica, cioè spiegare il loro utilizzo in ambito finanziario e il loro legame con la condizione di assenza di opportunità di arbitraggio. Va osservato che le strategie descritte in seguito sono relative a un mercato scontato ciò permette di considerare i guadagni ad esse relativi nell'istante iniziale senza dover attualizzare i valori.
Si immagini di vendere a un prezzo x un generico contratto al quale corrisponde, all'istante N, il pagamento di un pay-off f_N. Naturalmente lo scopo è venderlo a un prezzo elevato, si deve tener conto, però, che il compratore lo vuole acquistare a un basso costo. Considerando queste posizioni opposte si pone il problema di determinare il *più piccolo prezzo accettabile*, ovvero quel prezzo che permette al venditore di rispettare i termini del contratto (cioè di pagare l'ammontare f_N al tempo N) senza però dargli l'opportunità di ottenere un arbitraggio altrimenti il compratore non avrebbe ragione di accettare.
D'altra parte acquistando un contratto lo si vuole comprare a buon mercato ma non si può pretendere di ottenere un guadagno sicuro, senza rischi, altrimenti il venditore non avrebbe interesse a cederlo.
Da quanto richiesto si ottiene, come si spiegherà tra poco, che i prezzi

superiore e inferiore, $C^* = C^*(f_N; P)$ e $C_* = C_*(f_N; P)$, definiti precedentemente, soddisfano la seguente proprietà:
gli intervalli $[0, C_*)$ *e* (C^*, ∞) *sono i massimi insiemi dei valori dei prezzi che danno, rispettivamente, al compratore e al venditore opportunità di arbitraggio.*
Si assuma che il contratto venga pagato un prezzo x maggiore di C^* allora il venditore può ottenere un free-lunch agendo in questo modo: egli preleva dalla somma totale x una quota y in modo tale che $C^* < y < x$ e $H^*(y, f_N; P) \neq \emptyset$ e la usa per costruire un portfolio $\pi^*(y)$ che assume i seguenti valori $X_0^{\pi^*(y)} = y$ e $X_N^{\pi^*(y)} \geqslant f_N$ al tempo N. Si può descrivere la stessa azione dicendo che il venditore *investe* la quota y nel mercato (B, S) in accordo con la strategia $\pi^*(y) = (\beta_n^*(y), \gamma_n^*(y))_{0 \leqslant n \leqslant N}$.
Il valore di $\pi^*(y)$ al tempo N è $X_N^{\pi^*(y)}$, il guadagno totale delle due transazioni (vendere il contratto e comprare il portfolio $\pi^*(y)$) risulta quindi

$$(x - f_N) + (X_N^{\pi^*(y)} - y) = (x - y) + (X_N^{\pi^*(y)} - f_N) \geqslant x - y > 0.$$

Si noti che $x + X_N^{\pi^*(y)}$ sono i ritorni delle transazioni al tempo $n = 0$ e $n = N$ e $f_N + y$ è l'ammontare da pagare, rispettivamente, al tempo $n = N$ e al tempo $n = 0$.
Allora, $x - y$ è il *guadagno netto senza rischio* (arbitraggio) del venditore.

Si consideri ora l'opportunità di arbitraggio per il compratore. Ipotizzando che il compratore acquisti, per un prezzo $x < C_*$, un contratto che preveda all'istante N il pagamento di un ammontare f_N, egli può ottenere, come illustrato seguentemente, un free-lunch scegliendo y tale che $x < y < C_*$ e $H_*(y, f_N; P) \neq \emptyset$. Considerando che la definizione di C_* implica l'esistenza di un portfolio $\pi_*(y)$ di valore iniziale y e tale che il suo valore al tempo $n = N$ risulti $X_N^{\pi_*(y)} \leqslant f_N$, il compratore agisce come segue: al tempo $n = 0$ investe la quota $-y$ in accordo con la strategia $\overline{\pi}(-y) = -\pi_*(y)$, dove

$$\pi_*(y) = (\beta_{*n}(y), \gamma_{*n}(y))_{0 \leqslant n \leqslant N}.$$

Allora

$$\overline{\pi}(-y) = (-\beta_{*n}(y), -\gamma_{*n}(y))_{0 \leqslant n \leqslant N},$$

in modo tale che

$$-y = -\beta_{*0}(y)B_0 - \gamma_{*0}(y)S_0$$

e il valore di $\overline{\pi}(-y)$ sia

$$X_N^{\overline{\pi}(-y)} = X_N^{-\pi_*(y)} = -X_N^{\pi_*(y)},$$

si ottiene, quindi, che il guadagno totale dato dalle due transazioni (comprare il contratto e investire $-y$) è

$$(f_N - x) + (X_N^{\overline{\pi}(-y)} - (-y)) = (f_N - X_N^{\pi_*(y)}) + (y - x) \geqslant y - x > 0,$$

si vede, infine, che essendo questo il guadagno netto del compratore relativo all'acquisto di un contratto di prezzo $x < C^*$ implica un arbitraggio.

Osservazione 1.2.2. Nella discussione precedente è stato considerato un investimento con un ammontare negativo $-y$, praticamente ciò significa che esiste la possibilità di trovare uno speculatore che mette a disposizione la quota y al tempo $n = 0$ al patto di ricevere $X_N^{\pi_*(y)}$ al tempo $n = N$; si noti che quest'ultimo valore può essere superiore o inferiore a y data l'aleatorietà dei prezzi.

Dalla serie di considerazioni fatte si evince che l'unica possibilità per non avere opportunità di arbitraggio è porsi nell'ipotesi che $C_* \leqslant C^*$ e prendere come prezzo del contratto un valore $x \in [C_*, C^*]$; per questo motivo si dà a $[C_*, C^*]$ il nome di *intervallo dei prezzi accettabili (razionali)*.
La trattazione dei prezzi razionali può essere schematizzata come segue

arbitraggio compratore			*arbitraggio venditore*
0	C_*	C^*	
	arbitrage-free		

Si osservi, infine, che operare con prezzi appartenenti al range di quelli accettabili esclude soltanto il caso di profitti sicuri situazione logicamente e economicamente assurda poiché un guadagno può essere visto come una *compensazione per il rischio*!

1.2.1 Mercato completo e incompleto

Si consideri ora il caso particolare che esista, per un fissato valore x e una funzione di pay-off f_N, una copertura perfetta π per (x, f_N), cioè una strategia tale che $X_0^\pi = x$ e $X_N^\pi = f_N \quad P$ q.o..
Assumere che $X_N^\pi = f_N$ significa prendere una copertura π in grado di *replicare* la f_N richiesta.
Per molte ragioni risulta auspicabile che ogni obbligazione si possa replicare

per qualche valore di $x = \overline{x}$; il motivo principale è che se questo accade l'intersezione tra le classi $H^*(x, f_N; P)$ e $H_*(x, f_N; P)$ è diversa dall'insieme vuoto in quanto contiene la strategia π che dà la replicabilità. Dalla definizione dei prezzi di copertura segue allora

$$C^*(f_N; P) \leqslant \overline{x} \leqslant C_*(f_N; P)$$

ovvero, in questo caso, l'intervallo dei prezzi accettabili si riduce a un *unico* prezzo

$$C(f_N; P) = C^*(f_N; P) = C_*(f_N; P) = \overline{x},$$

detto *prezzo razionale (fair price)* per la richiesta f_N (è il prezzo che risulta accettabile sia per il venditore che per il compratore: ogni deviazione da questo comporterebbe la possibilità di ottenere guadagni senza rischi).
Il caso trattato, vista la sua importanza, presenta una terminologia specifica.

Definizione 1.2.3. Un mercato (B, S) è detto *N-perfetto* o *perfetto rispetto il tempo N*, se *ogni* funzione f_N $\mathcal{F}_N$-misurabile può essere replicata, cioè, per qualche x esiste una copertura perfetta π di (x, f_N): esiste un portfolio π tale che

$$X_N^\pi = f_N \qquad P \text{ q.o.},$$

altrimenti il mercato viene detto *N-imperfetto*.

La condizione che un mercato (B, S) sia perfetto è molto forte e impone delle severe costrizioni sulla struttura del mercato. Fortunatamente, non è necessario, in molti casi, che la copertura perfetta esista per tutte le funzioni f_N $\mathcal{F}_N$-misurabili a volte è sufficiente considerare solo funzioni limitate oppure funzioni con opportune condizioni di integrabilità o di misurabilità: è questo il caso di un mercato completo.

Definizione 1.2.4. Un mercato (B, S) si dice *N-completo* o *completo rispetto il tempo N*, se *ogni* funzione f_N di pay-off *limitata* e $\mathcal{F}_N$-misurabile è replicabile.

Determinare se e quando un mercato è perfetto o completo è uno dei punti di maggiore interesse per la matematica finanziaria rispondere a queste domande risulta estremamente difficile nel caso generale, ma, considerando delle ipotesi aggiuntive sulla struttura del mercato, si può arrivare a una soluzione esaustiva del problema. È questo il caso di un mercato arbitrage-free dove la completezza risulta strettamente connessa all'esistenza e all'unicità di un particolare elemento probabilistico: *la misura martingala equivalente* (si vedano i teoremi *APT1* e *APT2* enunciati nelle successive sezioni).

1.3 Mercato arbitrage-free

In poche parole, come preannunciato, dire che un mercato è senza opportunità di arbitraggio significa dire che il mercato è razionale: non si ottengono profitti senza rischiare. La Definizione 1.1.4 di arbitrage-free è piuttosto intuitiva la si vuole formalizzare illustrandone i legami con gli elementi finanziari introdotti.
Si fissi un $N \geqslant 1$ si è interessati al valore X_N^π di una strategia $\pi \in SF$ all'istante terminale.

Definizione 1.3.1. Si dice che una strategia autofinanziante π permette un'*opportunità di arbitraggio* (al tempo N) se, per un capitale iniziale

$$X_0^\pi = 0$$

si ha

$$X_N^\pi \geqslant 0 \quad P \text{ q.o.}$$

e $X_N^\pi > 0$ con probabilità P positiva, cioè

$$P(X_N^\pi > 0) > 0$$

o, equivalentemente,

$$E(X_N^\pi) > 0.$$

Si indichi con SF_{arb} la classe delle strategie autofinanzianti con opportunità di arbitraggio. Se $\pi \in SF_{arb}$ e $X_0^\pi = 0$, allora

$$P(X_N^\pi \geqslant 0) = 1 \quad \Longrightarrow \quad P(X_N^\pi > 0) > 0.$$

Definizione 1.3.2. Si dice che *non esiste opportunità di arbitraggio* su un mercato (B, S) o che il mercato è *arbitrage-free* se $SF_{arb} = \emptyset$. In altre parole, se il capitale iniziale X_0^π di una strategia π è zero, allora

$$P(X_N^\pi \geqslant 0) = 1 \quad \Longrightarrow \quad P(X_N^\pi = 0) = 1.$$

Si noti che nelle definizioni date sopra si considerano eventi del tipo $\{X_N^\pi > 0\}$, $\{X_N^\pi \geqslant 0\}$, o $\{X_N^\pi = 0\}$, che sono, rispettivamente, gli stessi di $\{\widetilde{X}_N^\pi > 0\}$, $\{\widetilde{X}_N^\pi \geqslant 0\}$, o $\{\widetilde{X}_N^\pi = 0\}$ dove $\widetilde{X}_N^\pi = \frac{X_N^\pi}{B_N}$ (ipotizzando che $B_N > 0$). Ciò spiega perché la discussione relativa all'assenza o, alla presenza, di arbitraggio su un mercato (B, S), può essere ristretta al mercato $(\widetilde{B}, \widetilde{S})$ con $\widetilde{B}_n \equiv 1$ e $\widetilde{S}_n = \frac{S_n}{B_n}$; in altre parole, se si prende $B_n > 0$, allora si può assumere senza ledere la generalità che $B_n \equiv 1$.

1.4 Primo e Secondo Teorema Fondamentale

In questo paragrafo si vogliono illustrare i legami esistenti tra le proprietà di assenza di arbitraggio e di completezza in un mercato finanziario e la nozione di misura martingala equivalente (si veda la Definizione 1.4.2). Per poterlo fare risulta indispensabile richiamare un concetto noto a tutti gli studiosi di probabilità ovvero quello di martingala (per una piena conoscienza di questo argomento si consiglia la consultazione del Williams [10] e del Billingsley [3]).

Definizione 1.4.1. Un processo $X = (X_n)_{n\geqslant 0}$ definito su uno spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n), P)$ è una *martingala* rispetto $(\mathcal{F}_n)$ sotto P, $(P, \mathcal{F}_n)$-*martingala*, se:

1 X_n è $\mathcal{F}_n$-misurabile $\forall\, n$ (X_n è $\mathcal{F}_n$-*adattato*);

2 X_n è integrabile ($\mathbb{E}|X_n| < \infty \quad \forall\, n$);

3 $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}$ (*condizione martingala*).

Si consideri ora un mercato (B, S) strutturato come descritto nel primo paragrafo, in quest'ambito viene data la seguente definizione

Definizione 1.4.2. Una misura di probabilità $\widetilde{P}$ è una *misura martingala equivalente* alla misura P se la successione d-dimensionale scontata

$$\frac{S}{B} = \left(\frac{S_n}{B_n}\right)_{n\geqslant 0}$$

è una $(\widetilde{P}, \mathcal{F}_n)$-martingala, cioè esplicitamente presa $\widetilde{\mathbb{E}}$ come la media rispetto alla $\widetilde{P}$ si ha che per tutti gli $i = 1, \ldots, d$

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left|\frac{S_n^i}{B_n}\right| < \infty \tag{1.18}$$

con $n = 0, 1, \ldots, N$ e

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left(\frac{S^i_n}{B_n}\Big|\mathcal{F}_{n-1}\right) = \frac{S^i_{n-1}}{B_{n-1}} \qquad (\widetilde{P}\ q.o.) \tag{1.19}$$

per $n = 1, \ldots, N$.

Introdotti questi elementi si può enunciare il seguente teorema che data la sua importanza è chiamato *First Fundamental Asset Pricing Theorem (APT1)*.

Teorema 1.4.1. *Un mercato finanziario (B, S) con $N < \infty$ e $d < \infty$ definito su uno spazio di probabilità filtrato in cui $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ e $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$ è arbitrage-free se e solo se esiste almeno una misura martingala $\widetilde{P}$ equivalente a P.*

Si è già detto che l'assunzione di assenza di arbitraggio ha un chiaro significato economico: questa proprietà rende il mercato razionale; è interessante osservare come tale caratteristica puramente finanziaria sia in realtà strettamente connessa a modelli probabilistici quali risultano essere le martingale, considerando ciò appare chiara l'importanza del teorema e il perché dell'attributo fondamentale!
Pur avendo elogiato il valore del teorema *APT1* bisogna sottolineare che le ipotesi su cui poggia risultano molto restrittive, infatti si sta immaginando di operare su un mercato con orizzonte finito ($N < \infty$) e numero di azioni limitato ($d < \infty$). Queste assunzioni pur limitando notevolmente l'applicazione del teorema risultano, purtroppo, indispensabili: si possono, infatti, fornire dei controesempi che mostrano la non validità del teorema nel caso di $d = \infty$ o $N = \infty$.

Esempio 1. Questo esempio, dovuto a W. Schachermayer [8], mostra che se $d = \infty$ (e $N = 1$) allora esiste un mercato arbitrage-free senza misura martingala equivalente, così che la parte necessaria del teorema risulta non verificata per un numero infinito di azioni.

Sia $\Omega = \{1, 2, \dots\}$, sia $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, sia $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$ la σ-algebra generata dall'insieme delle parti di Ω e sia $P = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\delta_k$, cioè, $P\{k\} = 2^{-k}$.

Si definisca la successione dei prezzi $S = (S_n^i)$ per $i = 1, 2, \dots$ e $n = 0, 1$ come segue:

$$\Delta S_1^i(\omega) = \begin{cases} 1, \quad \omega = i \\ -1, \quad \omega = i+1 \\ 0 \quad \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad S_0^i = 1 \quad \forall\, i$$

e si consideri il mercato (B, S) corrispondente alla successione $S = (S_n^i)$ e con $B_0 = B_1 = 1$.

Si inizi con il vedere che è arbitrage-free: il valore $X_1^\pi(\omega)$ di un generico portfolio può essere rappresentato con la somma

$$X_1^\pi = c_0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i S_1^i = X_0^\pi + \sum_{i=1}^{\infty} c_i \Delta S_1^i$$

dove $X_0^\pi = c_0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i$; ovvero c_0 rappresenta il conto in banca e le c_i con $i = 1, 2, \dots$ sono i prezzi iniziali delle azioni (si assume che $\sum |c_i| < \infty$).

Se $X_0^\pi = 0$ (cioè $c_0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i = 0$) allora dalla condizione $X_1^\pi \geqslant 0$ si ottiene

$$X_1^\pi(1) = c_1 \geqslant 0;\ X_1^\pi(2) = c_2 - c_1 \geqslant 0;\ \dots\ ; X_1^\pi(k) = c_k - c_{k-1} \geqslant 0;\ \dots$$

quindi, essendo la $\{c_i\}$ una successione crescente in senso lato e assolutamente convergente, si devono avere tutte le c_i uguali a zero da cui segue che $X_1^\pi = 0$ (P q.o.). Ricordando la Definizione 1.3.2 si ottiene l'assenza di opportunità di arbitraggio.

Tuttavia non si ha l'esistenza di una misura martingala equivalente. Se esistesse una misura $\widetilde{P} \sim P$ tale che S è una martingala rispetto a $\widetilde{P}$ si dovrebbe avere (si veda la (1.19)) che per ogni $i = 1, 2, \ldots$

$$\widetilde{\mathbb{E}}\Delta S_1^i = 0.$$

Esplicitando tale condizione si ottiene

$$\sum_{\omega=1}^{\infty} \Delta S_1^i(\omega)\widetilde{P}(\omega) = \Delta S_1^i(i)\widetilde{P}(i) + \Delta S_1^i(i+1)\widetilde{P}(i+1) = \widetilde{P}(i) - \widetilde{P}(i+1) = 0,$$

cioè $\widetilde{P}(i) = \widetilde{P}(i+1)$ per $i = 1, 2, \ldots$; ciò è chiaramente impossibile per una misura di probabilità σ-additiva (si avrebbe, infatti, $\sum_{\omega=1}^{\infty} \widetilde{P}(\omega) = \infty$ oppure $= 0$).

Esempio 2. Questo controesempio, che è il classico *Paradosso di S.Pietroburgo*, mostra che nel caso $N = \infty$ l'esistenza di una misura martingala non assicura l'assenza di opportunità di arbitraggio, ovvero la parte sufficiente del teorema risulta non verificata nel caso di orizzonte infinito.

Sia $\xi = (\xi_n)_{n \geqslant 0}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tali che $P(\xi_n = 1) = P(\xi_n = -1) = \frac{1}{2}$. Se si considera il mercato (B, S) tale che $S_0 = 0,\ S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ e $B_n \equiv 1$ si ottiene che il guadagno è

$$X_n^{\pi} = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \gamma_k \Delta S_k = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \gamma_k \xi_k,$$

dove si è scelto

$$\gamma_k = \begin{cases} 2^{k-1} & \text{se} \quad \xi_1 = \ldots = \xi_{k-1} = -1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Risulta interessante osservare che X_n^π può essere visto come il guadagno associato a un giocatore d'azzardo che sta giocando contro un avversario di pari livello (da qui la simmetria): l'esito del gioco è descritto dalle variabili aleatorie ξ_k (egli vince se $\xi_k = 1$ e perde se $\xi_k = -1$) e la strategia del giocatore consiste nel raddoppiare la puntata dopo una perdita e smettere di giocare dopo la prima vincita.
Chiaramente se $\xi_1 = \ldots = \xi_k = -1$ il giocatore è in netta perdita e il guadagno in questo caso assume il valore

$$X_k^\pi = -\sum_{i=1}^{k} 2^{i-1} = -(2^k - 1),$$

tuttavia se all'istante successivo $k+1$ si ha una vincita, cioè se $\xi_{k+1} = 1$, il guadagno diventa

$$X_{k+1}^\pi = X_k^\pi + 2^k = -(2^k - 1) + 2^k = 1;$$

quindi la strategia scelta ammette un tempo di arresto (aleatorio) τ cui è associato un guadagno positivo.
Si può definire τ come

$$\tau = \inf\{k : \ X_k^\pi = 1\}$$

e poiché $P(\tau = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$, risulta $P(\tau < \infty) = 1$, quindi essendo $P(X_\tau^\pi = 1)$ si ha $\mathbb{E}X_\tau^\pi = 1$ sebbene il capitale iniziale X_0^π sia nullo.
Allora nel mercato (B, S) considerato esiste un'opportunità di arbitraggio: esiste un portfolio π tale che $X_0^\pi = 0$ e $\mathbb{E}X_\tau^\pi = 1$ per un qualche istante τ.

N.B. Ipotizzare una strategia che raddoppi la posta dopo ogni perdita significa considerare, implicitamente, che il giocatore sia immensamente ricco oppure che egli possa prendere dei prestiti senza alcun limite; entrambe le varianti risultano altamente improbabili. Per questo motivo tra le considerazioni da fare, in relazione a un mercato, vi è anche quella di considerare, fra le strategie ammissibili, solo quelle economicamente ragionevoli.

Sia $\mathcal{P}(P)$ l'insieme di tutte le misure martingala $\widetilde{P}$ equivalenti a P: la successione dei prezzi scontati $\widetilde{S} = \left(\frac{S_n}{B_n}\right)_{n\geqslant 0}$ è una $(\widetilde{P}, \mathcal{F}_n)$-martingala. Definito questo insieme si può introdurre il seguente risultato che per la sua importanza viene detto *Second Fundamental Asset Pricing Theorem (APT2)*

Teorema 1.4.2. *Un mercato finanziario (B, S) arbitrage-free con $N < \infty$ e $d < \infty$ definito su uno spazio di probabilità filtrato in cui $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ e $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$ è completo se e solo se l'insieme $\mathcal{P}(P)$ delle misure martingala equivalenti contiene un singolo elemento.*

Allora si può osservare che mentre l'assenza di opportunità di arbitraggio implica

$$\mathcal{P}(P) \neq \emptyset$$

la completezza di un mercato arbitrage-free può essere scritta come

$$|\mathcal{P}(P)| = 1.$$

Visti gli enunciati dei teoremi *APT1* e *APT2* si procede illustrando la dimostrazione del primo teorema e tralasciando quella relativa al secondo. Si è scelto di operare come detto poichè i risultati ai quali si vuole arrivare poggiano sull'ipotesi fondamentale di mercato razionale; mentre considerano la completezza una proprietà utile ma non indispensabile: nel seguito si vedrà che risulta possibile stimare il prezzo di copertura anche su mercati incompleti.

1.4.1 ***SUFFICIENZA del Teorema APT1***

L'esistenza di una misura di probabilità $\widetilde{P}$ equivalente a P tale che il valore

$$\widetilde{S} = \frac{S}{B} = \left(\frac{S_n}{B_n}\right)_{0 \leqslant n \leqslant N}$$

sia una $(\widetilde{P}, \mathcal{F}_n)$-martingala implica l'assenza di opportunità di arbitraggio per il mercato (B, S).

Si ricorda che siamo nell'ipotesi $B_n > 0$ per $n \geqslant 0$ per cui si può assumere $B_n \equiv 1$ quindi usando la formula (1.17) relativa al mercato scontato si ha

$$X_n^\pi = X_0^\pi + G_n^\pi \qquad e \qquad G_n^\pi = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \Delta S_k \tag{1.20}$$

dove $S = (S_n)$ è una $(\widetilde{P}, \mathcal{F}_n)$-martingala.

Per provare quanto richiesto si deve mostrare che presa un qualunque strategia autofinanziante $\pi \in SF$ tale che $X_0^\pi = 0$ e $P(X_N^\pi \geqslant 0) = 1$, cioè

$$G_N^\pi = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \Delta S_k \geqslant 0 \tag{1.21}$$

P q.o. o, equivalentemente, $\widetilde{P}$ q.o., si ha $G_N^\pi = 0$ P q.o. o, equivalentemente, $\widetilde{P}$ q.o.. Per poter arrivare a dimostrare che, sotto le ipotesi fatte, $G_N^\pi = 0$, occorre introdurre delle definizioni e dei teoremi su nuovi elementi probabilistici: le martingale locali.

Definizione 1.4.3. Una successione stocastica $X = (X_n)$ è una $(P, \mathcal{F}_n)$-*martingala locale* se esiste una successione di tempi di Markov $(\tau_k)_{k\geqslant 1}$ (cioè, di variabili aleatorie che soddisfano la condizione $\{\omega : \tau_k \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n, \quad n \geqslant 1)$ tali che $\tau_k \leqslant \tau_{k+1}$ (P q.o.), $\tau_k \uparrow \infty$ (P q.o.) per $k \to \infty$ e per ogni k il processo arrestato al tempo τ_k

$$X^{\tau_k} = (X^{\tau_k \wedge n})$$

è una $(P, \mathcal{F}_n)$-martingala.

Teorema 1.4.3. *Sia il processo $(M_n)_{n\geqslant 0}$ una $(P, \mathcal{F}_n)$-martingala e Y_n un processo predicibile, allora la trasformazione di martingala $X = Y \cdot M$, cioè la successione stocastica definita come integrale stocastico a tempo discreto*

$$X_n = Y_0 M_0 + \sum_{k=1}^{n} Y_k (M_k - M_{k-1}) \tag{1.22}$$

è una martingala locale.

N.B. Per approfondimenti del concetto di integrale stocastico e dei legami tra questo e le martingale si rimanda alla lettura del Baldi [1].

Lemma 1.4.4. *1) Se il processo $(X_n)_{n\geqslant 0}$ è una $(P, \mathcal{F}_n)$-martingala locale tale che $\mathbb{E}X_0 < \infty$ e risulta verificata una fra le due condizioni seguenti*

$$\mathbb{E}X_n^- < \infty, \qquad n \geqslant 0$$

$$\mathbb{E}X_n^+ < \infty, \qquad n \geqslant 0$$

allora $X = (X_n)_{n\geqslant 0}$ è una $(P, \mathcal{F}_n)$-martingala.
2) Sia $X = (X_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ una $(P, \mathcal{F}_n)$-martingala locale e si assuma che $N < \infty$, $\mathbb{E}X_0 < \infty$ e sia $\mathbb{E}X_N^- < \infty$ oppure $\mathbb{E}X_N^+ < \infty$. Allora le ipotesi del punto 1) sono verificate per ogni $n \leqslant N$ e $X = (X_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ è una $(P, \mathcal{F}_n)$-martingala.

Introdotte queste nozioni si può procedere nella dimostrazione della sufficienza del teorema *APT1*.

Dall'espressione del guadagno $(G_n^\pi)_{n=0}^N$ risulta chiaro che questa successione è una trasformazione di martingala rispetto a $\widetilde{P}$ e quindi per Teorema 1.4.3 è una martingala locale. Inoltre, poichè si assume $G_0^\pi = 0$ e $P(G_N^\pi \geqslant 0) = 1$, risultano verificate le ipotesi di integrabilità della parte 2) del Lemma 1.4.4 da cui (G_n^π) è una $(\widetilde{P}, \mathcal{F}_n)$-martingala. Infine ricordando che dalla condizione di martingala discende che la successione considerata ha media costante si ottiene la seguente serie di implicazioni

$$G_0^\pi = 0 \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{\mathbb{E}} G_0^\pi = 0 \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{\mathbb{E}} G_N^\pi = 0$$

ed avendo assunto per ipotesi $P(G_N^\pi \geqslant 0) = 1$ si deve avere $G_N^\pi = 0 = X_N^\pi$ (P q.o. e $\widetilde{P}$ q.o.) ovvero quanto desiderato.

Osservazione 1.4.1. Come illustrato, la sufficienza del teorema *APT1* risulta banalmente dimostrata se G_n^π è una $(\widetilde{P}, \mathcal{F}_n)$-martingala. Tale proprietà è strettamente connessa all'integrabilità della successione $(\gamma_n S_n)$; infatti, dall'ipotesi che (S_n) è una $(\widetilde{P}, \mathcal{F}_n)$-martingala e data la $\mathcal{F}_{n-1}$-misurabilità delle (γ_n), si ottiene la condizione di martingala (si veda il punto 3 della Definizione 1.4.1) per il guadagno, risulta cioè:

$$\widetilde{\mathbb{E}}(G_n^\pi - G_{n-1}^\pi | \mathcal{F}_{n-1}) = \widetilde{\mathbb{E}}(\gamma_n (S_n - S_{n-1}) | \mathcal{F}_{n-1}) = \gamma_n \widetilde{\mathbb{E}}(S_n - S_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) = 0.$$

Quindi per avere verificate tutte le condizioni di martingala serve l'integrabilità della successione $(\gamma_n S_n)$ rispetto a $\widetilde{P}$, questo è, ad esempio, il caso in cui le (γ_n) sono uniformemente limitate.

Assumere la successione $(\gamma_n S_n)$ integrabile, pur semplificando notevolmente la dimostrazione del teorema, lederebbe la sua generalità, è per tale motivo che si preferisce ricorrere al concetto di martingala locale che permette di apprezzare l'*efficacia* dell'*APT1*.

1.4.2 *NECESSITÁ del Teorema APT1:* trasformazione condizionale di Esscher

Si deve dimostrare che l'assenza di opportunità di arbitraggio significa l'esistenza di una misura di probabilità $\widetilde{P} \sim P$ in $(\Omega, \mathcal{F})$ tale che la successione scontata $S = (S_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ è una $(\widetilde{P}, \mathcal{F}_n)$-martingala.
Esistono diverse dimostrazioni rigorose di questo risultato le quali sfruttano, in un modo o in un altro, dei risultati relativi all'analisi funzionale. Nessuna di queste suggerisce, però, la costruzione esplicita delle misure martingala equivalenti: non compare mai l'esplicita descrizione di tutte le misure martingala $\widetilde{P}$ equivalenti all'originale misura P.
Per questo motivo si è cercata una dimostrazione alternativa che potesse portare a una costruzione della misura martingala equivalente: l'idea da utilizzare, come illustrò per primo L.C.G. Rogers [7], è quella di sfruttare la *trasformazione condizionale di Esscher*, si veda il Lemma 1.4.6, tale trasformazione è una generalizzazione della (1.33).

Per spiegare l'idea base si considera inizialmente un modello a un singolo passo ($N = 1$) dove, per semplicità, si assume: $d = 1$, $B_0 = B_1 = 1$ e $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Si ipotizza inoltre che $P(S_1 \neq S_0) > 0$ altrimenti si avrebbe un mercato banale in cui si può prendere come misura martingala equivalente la misura originale P.

Considerato che ogni portfolio π è una coppia di numeri (β, γ), se $X_0^\pi = 0$ allora le sole coppie ammissibili sono quelle per cui si ha $\beta + \gamma S_0 = 0$. Assumere che il mercato sia arbitrage-free significa dire che devono verificarsi (sotto l'ipotesi di mercato non banale) le condizioni :

$$P(\Delta S_1 > 0) > 0 \qquad \text{e} \qquad P(\Delta S_1 < 0) > 0. \tag{1.23}$$

Si vuole dedurre dalla (1.23) che esiste una misura $\widetilde{P} \sim P$ tale che

1) $\widetilde{\mathbb{E}}|\Delta S_1| < \infty$;

2) $\widetilde{\mathbb{E}}\Delta S_1 = 0$;

per poter giungere a questa conclusione si applicano i risultati ottenuti dal seguente lemma.

Lemma 1.4.5. *Sia X una variabile aleatoria reale con distribuzione di probabilità su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tale che*

$$P(X > 0) > 0 \qquad e \qquad P(X < 0) > 0. \tag{1.24}$$

Allora esiste una misura $\widetilde{P} \sim P$ tale che

$$\widetilde{\mathbb{E}}\, e^{aX} < \infty \tag{1.25}$$

per ogni $a \in \mathbb{R}$; in particolare,

$$\widetilde{\mathbb{E}}|X| < \infty. \tag{1.26}$$

Inoltre, $\widetilde{P}$ ha la seguente proprietà:

$$\widetilde{\mathbb{E}}X = 0. \tag{1.27}$$

Dimostrazione. Data la misura P, si costruisce a partire da questa la misura di probabilità equivalente

$$Q(dx) = ce^{-x^2} P(dx), \qquad x \in \mathbb{R},$$

dove c è la costante di normalizzazione, cioè

$$c^{-1} = \mathbb{E}e^{-X^2}.$$

Considerando la funzione

$$\varphi(a) = \mathbb{E}_Q e^{aX} = \frac{\mathbb{E}(e^{aX}e^{-X^2})}{\mathbb{E}(e^{-X^2})}, \quad a \in \mathbb{R}, \tag{1.28}$$

dalla costruzione di Q segue che $0 < \varphi(a) < \infty$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ (si verificherà ciò nelle Osservazione 1.4.2); quindi ponendo

$$Z_a(x) = \frac{e^{ax}}{\varphi(a)}, \tag{1.29}$$

si ha $Z_a(x) > 0$ e $\mathbb{E}_Q Z_a(X) = 1$. Risulta possibile, dunque, definire per ogni $a \in \mathbb{R}$ la misura di probabilità

$$\widetilde{P}_a(dx) = Z_a(x)Q(dx) \tag{1.30}$$

tale che $\widetilde{P}_a \sim Q \sim P$.

Dalla definizione di $\widetilde{P}_a$ segue che, per ogni scelta di a, assumendo $\widetilde{P} = \widetilde{P}_a$ vale la (1.25), infatti

$$\mathbb{E}_{\widetilde{P}_a} e^{aX} = \mathbb{E}_Q \left(\frac{e^{2aX}}{\varphi(a)} \right) = \frac{\varphi(2a)}{\varphi(a)} < \infty. \tag{1.31}$$

Si può notare, inoltre, che la funzione $\varphi = \varphi(a)$ definita $\forall \ a \in \mathbb{R}$ è strettamente convessa poiché

$$\varphi''(a) = \frac{\mathbb{E}(X^2 e^{aX} e^{-X^2})}{\mathbb{E}(e^{-X^2})} > 0;$$

per cui se si pone

$$\varphi_* = \inf\{\varphi(a) : \ a \in \mathbb{R}\}$$

vi sono solo due casi possibili

1) esiste a_* tale che $\varphi(a_*) = \varphi_*$;

2) non esiste a_* tale che $\varphi(a_*) = \varphi_*$.

Nel primo caso risulta, come ovvio, $\varphi^{'}(a_*) = 0$ da cui

$$\mathbb{E}_{\widetilde{P}_{a^*}} X = \mathbb{E}_Q \left(\frac{X e^{a_* X}}{\varphi(a_*)} \right) = \frac{\varphi^{'}(a_*)}{\varphi(a_*)} = 0; \tag{1.32}$$

allora in virtù della (1.31) e della (1.32) si ha che prendendo $\widetilde{P} = \widetilde{P}_{a^*}$ il lemma è dimostrato.
Il secondo caso è irrealizzabile data l'ipotesi (1.24). Infatti, se un tale a_* non esiste, si può prendere una successione $\{a_n\}$ per cui valgano le relazioni

$$\varphi_* < \varphi(a_n) \qquad \text{e} \qquad \varphi(a_n) \searrow \varphi_*,$$

inoltre la successione $\{a_n\}$ deve tendere a $+\infty$ o a $-\infty$ poiché, altrimenti, si potrebbe scegliere una sottosuccessione convergente in modo tale che il valore di minimo venga assunto in un punto finito e ciò contraddice l'assunzione **2)**.
Sia $u_n = \frac{a_n}{|a_n|}$ e sia $u = \lim u_n$, ne segue $u = \pm 1$. Allora considerando l'ipotesi (1.24) e l'equivalenza tra le misure P e Q si ha

$$Q(uX > 0) > 0,$$

per cui esiste $\delta > 0$ tale che

$$Q(uX > \delta) > 0;$$

definendo $\varepsilon := Q(uX > \delta)$ e scegliendo δ in modo tale che risulti un punto di continuità per Q, cioè

$$Q(uX = \delta) = 0$$

si ottiene

$$Q(a_nX > |a_n|\delta) = Q(u_nX > \delta) \to \varepsilon \qquad \text{per} \qquad n \to \infty.$$

Quindi per n sufficientemente grande

$$\begin{aligned} \varphi(a_n) &= \mathbb{E}_Q(e^{a_nX}) \geqslant \mathbb{E}_Q(e^{a_nX}\mathbb{I}_{(a_nX>\delta|a_n|)}) \\ &\geqslant e^{\delta|a_n|}\mathbb{E}_Q(\mathbb{I}_{(a_nX>\delta|a_n|)}) = e^{\delta|a_n|}Q(u_nX > \delta) \end{aligned}$$

da cui definitivamente

$$\varphi(a_n) \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon e^{\delta|a_n|} \longrightarrow \infty.$$

Si è giunti a un assurdo poichè, come visto, $\varphi(a_n) \searrow \varphi_*$ e $\varphi_* < \infty$. □

Si osservi che la dimostrazione di tale lemma porta a una costruzione della misura $\widetilde{P}_a$ basata sulla trasformazione

$$x \mapsto \frac{e^{ax}}{\varphi(a)} \tag{1.33}$$

detta *trasformazione di Esscher*.

Osservazione 1.4.2. Nella precedente dimostrazione si è tralasciato di verificare l'asserzione $0 < \varphi(a) < \infty$ per ogni $a \in \mathbb{R}$; la prima disuguaglianza è ovvia, la seconda è diretta conseguenza della semplice relazione algebrica:

$$e^{-x^2}e^{ax} = e^{-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}e^{\frac{a^2}{4}},$$

infatti applicandola alla definizione di $\varphi(a)$ si ottiene

$$\varphi(a) = \frac{\mathbb{E}(e^{-X^2}e^{aX})}{\mathbb{E}(e^{-X^2})} = e^{\frac{a^2}{4}}\frac{\mathbb{E}e^{-\left(X-\frac{a}{2}\right)^2}}{\mathbb{E}(e^{-X^2})} \leqslant \frac{e^{\frac{a^2}{4}}}{\mathbb{E}(e^{-X^2})} < +\infty.$$

Dalla limitatezza delle $\varphi(a) = \mathbb{E}_Q(e^{aX})$ seguono alcune considerazioni che sono state adoperate nel corso della dimostrazione:

- $\varphi_* < \infty$ (φ_* è l'estremo inferiore di funzioni limitate)
- $\mathbb{E}_Q(Xe^{aX}) = \mathbb{E}_Q\left(\frac{d}{da}(e^{aX})\right) = \frac{d}{da}\mathbb{E}_Q(e^{aX}) = \frac{d}{da}\varphi(a)$.

Dimostrato il lemma è facile vederne la generalizzazione al caso vettoriale quando, cioè, si considera al posto di X una successione di variabili aleatorie $(X_0, X_1, \ldots, X_N)$ tali che X_n è $\mathcal{F}_n$-misurabile per $0 \leqslant n \leqslant N$ con $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ e $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$.

Per procedere nella trattazione del caso generale si deve tener presente il concetto di differenza di martingala.

Definizione 1.4.4. Un processo $X = (X_n)_{n\geqslant 1}$ con $\mathbb{E}|X_n| < \infty$ è una $(P, \mathcal{F}_n)$-*differenza di martingala* se

$$\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = 0 \qquad (P \text{ q.o.}), \qquad n \geqslant 1.$$

Lemma 1.4.6. *Si ipotizzi che*

$$P(X_n > 0|\mathcal{F}_{n-1}) > 0 \qquad e \qquad P(X_n < 0|\mathcal{F}_{n-1}) > 0 \tag{1.34}$$

per $1 \leqslant n \leqslant N$. *Allora esiste una misura di probabilità* $\widetilde{P} \sim P$ *nello spazio* $(\Omega, \mathcal{F})$ *tale che la successione* $(X_0, X_1, \ldots, X_N)$ *è una* $(\widetilde{P}, \mathcal{F}_n)$-*differenza di martingala.*

Dimostrazione. La dimostrazione di questo lemma ripercorre pari passo quella del precedente. Data P si considera la misura di probabilità Q tale che

$$Q(d\omega) = c\,exp\left\{-\sum_{i=0}^{N} X_i^2(\omega)\right\} P(d\omega) \tag{1.35}$$

e $\mathbb{E}_Q exp\left\{-\sum_{i=0}^{N} a_i X_i\right\}$ è finito. Per costruire la misura $\widetilde{P}$ richiesta si considerano le funzioni

$$\varphi_n(a;\omega) = \mathbb{E}_Q(e^{aX_n}|\mathcal{F}_{n-1})(\omega)$$

che fissato ω risultano strettamente convesse in a. Si può mostrare procedendo come fatto per il Lemma 1.4.5 che esiste un unico punto (finito) $a_n^*(\omega)$ tale che il più piccolo valore $\inf_a \varphi_n(a;\omega)$ viene assunto in questo punto, ovvero:

$$\inf_a \varphi_n(a;\omega) = \varphi_n(a_n^*(\omega);\omega).$$

La funzione $\inf_a \varphi_n(a;\omega)$ è $\mathcal{F}_{n-1}$-misurabile da ciò segue che anche $a_n^*(\omega)$ è $\mathcal{F}_{n-1}$-misurabile.

Ora si definisce ricorsivamente una successione $Z_0, Z_1(\omega), \ldots, Z_N(\omega)$ ponendo

$$Z_0 = 1 \quad \text{ e } \quad Z_n(\omega) = Z_{n-1}(\omega)\frac{exp\{a_n^*(\omega)X_n(\omega)\}}{\mathbb{E}_Q(exp\{a_n^*\,X_n\}|\mathcal{F}_{n-1})(\omega)}$$

per $n \geqslant 1$. Chiaramente, le variabili $Z_n(\omega)$ sono $\mathcal{F}_n$-misurabili e formano una $(Q,\mathcal{F}_n)$-martingala

$$\mathbb{E}_Q(Z_n|\mathcal{F}_{n-1}) = Z_{n-1} \qquad (Q \text{ q.o. e } P \text{ q.o.}).$$

Quanto mostrato permette di definire la $\widetilde{P}$ richiesta come:

$$\widetilde{P}(d\omega) = Z_N(\omega)P(d\omega),$$

ricordando la dimostrazione del Lemma 1.4.5 si vede che $\widetilde{\mathbb{E}}|X_n| < \infty$, $0 \leqslant n \leqslant N$,

$$\widetilde{\mathbb{E}}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = 0 \qquad 1 \leqslant n \leqslant N$$

e inoltre $\widetilde{\mathbb{E}}X_0$=0. Quindi la successione $(X_0, X_1, \ldots, X_N)$ è una differenza di martingala rispetto la $\widetilde{P}$ ciò prova il lemma. □

Si evince immediatamente che nel caso $d = 1$, la *necessità* dell'esistenza di una misura martingala $\widetilde{P} \sim P$ (in un mercato arbitrage-free) è conseguenza del Lemma 1.4.6: basta prendere come successione di variabili aleatorie $X_0 = S_0, X_1 = \Delta S_1, \ldots, X_N = \Delta S_N$.
Considerando un mercato privo di opportunità di arbitraggio si può assumere senza ledere la generalità che

$$P(\Delta S_n > 0|\mathcal{F}_{n-1}) > 0 \qquad \text{e} \qquad P(\Delta S_n < 0|\mathcal{F}_{n-1}) > 0 \tag{1.36}$$

per ogni $n = 1, \ldots, N$; infatti se esiste un istante n per cui $P(\Delta S_n = 0) = 1$ questo può essere trascurato in quanto, preso un generico portfolio π autofinanziante, l'istante n non apporta contributi al valore X_N^π. Allora la (1.36) risulta vera per tutti gli $n \leqslant N$ da cui si conclude, come annunciato, che applicando il Lemma 1.4.6 a $X_0 = S_0$ e $X_n = \Delta S_n$ per $1 \leqslant n \leqslant N$ esiste una misura martingala equivalente (si veda la Definizione 1.4.2).

Per il caso generale, $d \geqslant 1$, la dimostrazione della necessità è concettualmente la stessa del caso $d = 1$, si deve però tener conto della generalizzazione del Lemma 1.4.6 al caso di valori vettoriali.

Lemma 1.4.7. *Sia* $(X_0, X_1, \ldots, X_N)$ *una successione di d-vettori*

$\mathcal{F}_n$-misurabili

$$X_n = \begin{pmatrix} X_n^1 \\ . \\ . \\ . \\ X_n^d \end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant n \leqslant N$$

definita su uno spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}, P)$ con $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ e $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$. Si assuma inoltre che

$$\gamma_n = \begin{pmatrix} \gamma_n^1 \\ . \\ . \\ . \\ \gamma_n^d \end{pmatrix}$$

è un vettore di variabili vettoriali, diverse da zero, $\mathcal{F}_{n-1}$-misurabili avente componenti limitate ($|\gamma_n^i(\omega)| \leqslant c < \infty, \quad \omega \in \Omega$) tale che

$$P((\gamma_n, X_n) > 0 | \mathcal{F}_{n-1}) > 0 \qquad e \qquad P((\gamma_n, X_n) > 0 | \mathcal{F}_{n-1}) > 0 \qquad (P \ q.o.)$$

dove (γ_n, X_n) è il prodotto scalare.
Allora esiste una misura di probabilità $\widetilde{P}$ equivalente a P su $(\Omega, \mathcal{F})$ tale che la successione $(X_0, X_1, \ldots, X_N)$ è una differenza di martingala d-dimensionale rispetto a $\widetilde{P}$, cioè: $\widetilde{\mathbb{E}}|X_n| < \infty$, $\widetilde{\mathbb{E}}X_0 = 0 \quad e \quad \widetilde{\mathbb{E}}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = 0 \quad 1 \leqslant n \leqslant N$.

Risulta interessante notare che la costruzione della misura martingala basata sulla trasformazione condizionale di Esscher dà solo *una* misura particolare, sebbene la classe di misure martingala equivalente all'originale possa contenerne altre. A titolo informativo si osservi che esiste un procedimento rigoroso basato sulle *trasformazioni di Girsanov* che può essere usato nella costruzione di una famiglia di misure $\widetilde{P}$ (per un maggior approfondimento di questo argomento si veda il capitolo V dello Shiryaev [9]).

1.5 Completezza e S-rappresentabilità

In questo paragrafo si vuole illustrare l'equivalenza tra la completezza e la proprietà di S-rappresentabilità di martingale locali.

Definizione 1.5.1. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n), Q)$ uno spazio di probabilità filtrato con

$$\text{una } (Q, \mathcal{F}_n)\text{-martingala} \quad d \text{ dimensionale } S = (S_n)$$

e

$$\text{una } (Q, \mathcal{F}_n)\text{-martingala locale} \quad \textit{uni}\text{dimensionale } X = (X_n).$$

Allora diciamo che la $(Q, \mathcal{F}_n)$-martingala locale X ammette una *S-rappresentazione* rispetto a Q, o una *rappresentazione in termini della $(Q, \mathcal{F}_n)$-martingala S*, se esiste una successione predicibile $\gamma = (\gamma_n)$, dove $\gamma_n = (\gamma_n^1, \ldots, \gamma_n^d)$, tale che

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \Delta S_k = X_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{d} \gamma_k^j \Delta S_k^j \right) \qquad (Q \text{ q.o.}) \qquad (1.37)$$

per ogni $n \geqslant 1$, cioè X è una trasformazione di martingala ottenuta dalla $(Q, \mathcal{F}_n)$-martingala S attraverso l'integrazione di una successione predicibile γ_n.

Lemma 1.5.1. *Sia (B, S) un mercato arbitrage-free con orizzonte finito N e $B_n \equiv 1$ per $n \leqslant N$. Allora questo mercato è completo se e solo se esiste una misura $\widetilde{P} \in \mathcal{P}(P)$ tale che ogni $(\widetilde{P}, \mathcal{F}_n)$-martingala limitata $X = (X_n)$ (con $|X_n(\omega)| \leqslant C \quad n \leqslant N \quad \omega \in \Omega$) ammette una S-rappresentazione rispetto a $\widetilde{P}$.*

Dimostrazione. ($\Longrightarrow$) Si assuma che il mercato (arbitrage-free) sia completo. Presa una misura arbitraria $\widetilde{P}$ appartenente a $\mathcal{P}(P)$ si consideri una $(\widetilde{P}, \mathcal{F}_n)$-martingala $X = (X_n)$ con $|X_n(\omega)| \leqslant C$ per $n \leqslant N$ e $\omega \in \Omega$. Si può scegliere come funzione di pay-off $f_N = X_N$, dall'ipotesi di completezza segue l'esistenza di un portfolio π autofinanziante e di un capitale iniziale x tale che

$$X_n^\pi = x + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \Delta S_k$$

e $X_N^\pi = f_N = X_N$ (P q.o. e $\widetilde{P}$ q.o.). Dalla limitatezza dell'obbligazione $|f_N| \leqslant C$ segue che $\mathbb{E} X_N^\pi < \infty$ ed essendo $X_0^\pi = x$ risultano verificate le ipotesi del Lemma 1.4.4 quindi si ottiene che $X^\pi = (X_n^\pi)_{n \leqslant N}$ è una $(\widetilde{P}, \mathcal{F}_n)$-martingala. Le martingale X^π e X presentano la stessa funzione terminale, il pay-off f_N, e quindi la condizione di martingala porta alle seguenti uguaglianze

$$X_n^\pi = \widetilde{\mathbb{E}}(X_N^\pi | \mathcal{F}_n) = \widetilde{\mathbb{E}}(X_N | \mathcal{F}_n) = X_n$$

da ciò si può concludere che $X_n^\pi = X_n$ per ogni $0 \leqslant n \leqslant N$ (le martingale coincidono in ogni istante P q.o.), la martingala X ammette, quindi, una

S-rappresentazione.

$(\Longleftarrow)$ Si ipotizzi che esiste una misura $\widetilde{P} \in \mathcal{P}(P)$, tale che ogni $(\widetilde{P}, \mathcal{F}_n)$-martingala limitata ammette un S-rappresentazione e sia $f_N = f_N(\omega)$ una funzione limitata $\mathcal{F}_N$-misurabile ($|f_N| \leqslant C < \infty \quad P$ q.o.) si vuole ottenere che esiste una strategia π autofinanziante e un capitale iniziale x tale che $X_N^\pi = f_N$ (P q.o.).

Si consideri la $(\widetilde{P}, \mathcal{F}_n)$-martingala

$$X = (X_n)_{n \leqslant N}, \quad \text{dove} \quad X_n = \widetilde{\mathbb{E}}(f_N | \mathcal{F}_n),$$

essendo $|f_N| \leqslant C$ si ha che X è una martingala limitata e per ipotesi ammette una S-rappresentazione (1.37). Esiste dunque una successione di variabili aleatorie predicibili $\gamma_k^j,\ j = 1, \ldots, d,\ k \leqslant N$ tale che $X_n = X_0 + \sum_{k=1}^n \gamma_k \Delta S_k$, attraverso queste variabili si costruisce un portfolio $\pi^* = (\beta^*, \gamma^*)$ dove $\gamma_n^* = \gamma_n$ e $\beta_n^* = X_n - \sum_{j=1}^d \gamma_n^j S_n^j$. Si osserva che le β_n^* risultano predicibili data la $\mathcal{F}_{n-1}$-misurabilità delle γ_n, infatti

$$\begin{aligned}
\beta_n^* &= X_n - \gamma_n S_n = X_0 + \sum_{k=1}^n \gamma_k \Delta S_k - \gamma_n S_n \\
&= x + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k \Delta S_k + \gamma_n (S_n - S_{n-1}) - \gamma_n S_n \\
&= x + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k \Delta S_k - \gamma_n S_{n-1};
\end{aligned}$$

inoltre si ottiene che la relazione

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^d S_{n-1}^j \Delta \gamma_n^{*j} + \Delta \beta_n^* &= \sum_{j=1}^d S_{n-1}^j \Delta \gamma_n^j + \Delta X_n - \Delta \left(\sum_{j=1}^d \gamma_n^j S_n^j \right) \\
&= \sum_{j=1}^d S_{n-1}^j \Delta \gamma_n^j + \sum_{j=1}^d \gamma_n^j \Delta S_n^j - \Delta \left(\sum_{j=1}^d \gamma_n^j S_n^j \right) = 0
\end{aligned}$$

implica π^* portfolio autofinanziante di valore

$$X_n^{\pi*} = \beta_n^* + \sum_{j=1}^{d} \gamma_n^j S_n^j = X_n.$$

In particolare si vede che per l'istante terminale N si ha $X_N^{\pi*} = X_N = f_N$ ($\widetilde{P}$ e P q.o.) da cui segue la completezza del mercato (B, S). $\square$

N.B. Se non si assume che $B_n \equiv 1, n \leqslant N$, allora tutti i risultati ottenuti risultano, comunque, validi se si considera al posto della $(\widetilde{P}, \mathcal{F}_n)$-martingala $S = (S_n)_{n \leqslant N}$ la $(\widetilde{P}, \mathcal{F}_n)$-martingala $\frac{S}{B} = \left(\frac{S_n}{B_n}\right)_{n \leqslant N}$.

Capitolo 2

Prezzi di copertura per opzioni Europee su un mercato arbitrage-free

2.1 Premessa: opzioni call e put

In questo capitolo e nei successivi si applicheranno i risultati del capitolo I a particolari contratti detti *opzioni*.

Definizione 2.1.1. Un'*opzione* è un contratto emesso da una banca, da una ditta o da una qualunque altra compagnia finanziaria, che dà al suo compratore il diritto, ma non l'obbligo, di acquistare, o vendere, un qualche valore a un prezzo stabilito in un istante di tempo fissato o durante un certo periodo di tempo nel futuro.

Le ragioni per soffermarsi sullo studio di questi contratti sono molteplici la principale è che tutti i più importanti risultati della matematica finanziaria sono relativi a tali contratti (la teoria matematica sulle opzioni è la più sviluppata) ciò permette di comprendere a pieno i concetti di prezzi e di strategie di copertura.

Nella discussione in merito alle opzioni si assumerà di operare in un mercato scontato (B, S) con la stessa struttura descritta nel capitolo I, ovvero si sta nelle ipotesi che le transazioni possano avvenire solo al tempo

$$n = 0, 1, ..., N$$

e che tutte le operazioni finanziarie abbiano termine all'istante N (questo è il motivo per il quale N è detto *orizzonte*). Si assume, inoltre, che verranno discusse soltanto opzioni basate su azioni di valore descrivibile da una successione aleatoria

$$S = (S_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}.$$

Usando le notazioni standard le opzioni si distinguono in due tipi

- le opzioni che danno il *diritto di comprare*: opzioni *call*
- le opzioni che danno il *diritto di vendere*: opzioni *put*

un'ulteriore distinzione viene fatta relativamente alle modalità di esercizio: se l'opzione può essere esercitata solo a un certo istante N (*tempo di maturità*) si dirà di tipo *Europeo*, mentre se è possibile scegliere un istante di esercizio arbitrario (cioè aleatorio) $\tau \leqslant N$ l'opzione è di tipo *Americano*. Si noti che le opzioni Americane danno al compratore una maggiore libertà poiché gli permettono di scegliere il tempo di esercizio τ, inoltre risulta interessante osservare che in *certi* casi questi due tipi di opzioni sono equivalenti nel senso che *il tempo di esercizio ottimale* τ per un'opzione Americana risulta uguale ad N (per maggiori chiarimenti si veda il capitolo III).

Si definisca ora un'*opzione call standard di tipo Europeo* con tempo di maturità N. Essa viene caratterizzata da un prezzo K (*prezzo di esercizio* o *prezzo di strike*) al quale il compratore sarà abilitato ad acquistare azioni che all'istante N presentano un prezzo sul mercato pari a S_N (generalmente distinto da K).

Se $S_N > K$, allora la situazione è favorevole per il compratore perché, dai termini del contratto, egli ha il diritto di comprare azioni al prezzo K; in questo caso il guadagno associato a questa operazione è pari a $S_N - K$.

Invece, se l'S_N ottenuto è minore di K, allora il compratore rinuncia al diritto di esercitare l'opzione poiché può acquistare l'azione direttamente al prezzo S_N inferiore a K.

Combinando le due situazioni il compratore al tempo N riceve un pay-off f_N che può essere espresso dalla formula

$$f_N = (S_N - K)^+, \tag{2.1}$$

dove $(a)^+ = max(a, o)$.

Naturalmente si deve tener presente che per acquistare questo contratto occorre pagare un premio C_{call}, così che il *profitto netto del compratore di un'opzione call* è

$$f_N - C_{call} = (S_N - K)^+ - C_{call}, \tag{2.2}$$

cioè esplicitamente

$$\begin{aligned} (S_N - K) \quad &- \quad C_{call} \quad \textit{per } S_N > K, \\ &- \quad C_{call} \quad \textit{per } S_N \leqslant K. \end{aligned}$$

Conseguentemente il guadagno per il venditore dell'opzione risulta

$$\begin{aligned} C_{call} - (S_N - K) \qquad & per \quad S_N > K, \\ C_{call} \qquad & per \quad S_N \leqslant K. \end{aligned}$$

Quindi è chiaro che chi acquista un'opzione call prevede una crescita dei prezzi delle azioni. Si osservi, inoltre, che il premio C_{call} di tale contratto dipenderà sia da N che da K, e, evidentemente, minore è K maggiore deve essere C_{call}.

Tenendo presenti le notazioni introdotte per la call se si considera il caso di un'*opzione put standard di tipo Europeo* si avrà che $S_N < K$ porta a un guadagno $K - S_N$ mentre per $S_N > K$ non ha senso esercitare l'opzione. Quindi acquistare il contratto considerato, pagando un premio C_{put}, implica che il *profitto netto del compratore di un'opzione put* è

$$f_N - C_{put} = (K - S_N)^+ - C_{put}. \tag{2.3}$$

Si noti che nel caso di opzioni di tipo Americano al posto di una singola obbligazione f_N occorre considerare una successione $f_0^N = (f_0, f_1, ..., f_N)$ di funzioni di pay-off.

2.2 Prezzi di copertura in un mercato completo

Si consideri il solito mercato (B, S) arbitrage-free e completo con orizzonte finito e numero di azioni limitato ($N < \infty$ e $d < \infty$) richiamando le nozioni introdotte nel primo capitolo (si veda Definizione 1.2.2) si può introdurre la seguente definizione

Definizione 2.2.1. Il *prezzo di una copertura perfetta di tipo Europeo* per una funzione f_N $\mathcal{F}_N$-misurabile è la quantità:

$$C(f_N; P) = \inf\{x : \exists \pi \quad \text{t.c.} \quad X_0^\pi = x \text{ e } X_N^\pi = f_N \quad (P \text{ q.o.})\}. \tag{2.4}$$

Essendo il mercato in oggetto privo di opportunità di arbitraggio e completo dai teoremi *APT1* e *APT2* segue, rispettivamente, che

1. *esiste* una misura martingala $\widetilde{P}$ equivalente a P: la successione $\left(\frac{S_n}{B_n}\right)_{n \leqslant N}$ è una $(\widetilde{P}, \mathcal{F}_n)$-martingala;
2. questa misura è *unica* e ogni f_N può essere replicata, cioè, esiste una copertura (perfetta) π tale che $X_N^\pi = f_N$.

Quindi se π è una copertura perfetta per (x, f_N), cioè $X_0^\pi = x$ e $X_N^\pi = f_N$ (P q.o.), allora dalla formula (1.17) segue

$$\frac{f_N}{B_N} = \frac{X_N^\pi}{B_N} = \frac{X_0^\pi}{B_0} + \sum_{k=1}^{N} \Delta\left(\frac{X_k^\pi}{B_k}\right) = \frac{x}{B_0} + \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \Delta\left(\frac{S_k}{B_k}\right), \tag{2.5}$$

da cui per la proprietà $\widetilde{\mathbb{E}}\left(\sum_{k=1}^N \gamma_k \Delta\left(\frac{S_k}{B_k}\right)\right) = 0$, conseguenza dell'asserzione 2) del Lemma 1.4.4, si ha

$$\widetilde{\mathbb{E}}\frac{f_N}{B_N} = \frac{x}{B_0}, \tag{2.6}$$

cioè

$$x = B_0 \widetilde{\mathbb{E}}\frac{f_N}{B_N}. \tag{2.7}$$

Si noti che la parte destra dell'uguaglianza (2.5) risulta indipendente dalla struttura della copertura π considerata, ciò implica che se si considera un'altra copertura π' i prezzi iniziali sono gli stessi. Si è giunti così al seguente risultato

Teorema 2.2.1. Formula fondamentale per il prezzo di copertura di un'opzione di tipo Europeo in un mercato completo
Il prezzo $C(f_N; P)$ di una copertura perfetta in un mercato completo e arbitrage-free è descritto dalla formula

$$C(f_N; P) = B_0 \widetilde{\mathbb{E}} \frac{f_N}{B_N}, \tag{2.8}$$

dove $\widetilde{\mathbb{E}}$ è la media rispetto all'unica misura $\widetilde{P} \in \mathcal{P}(P)$.

Se si opera una copertura si deve conoscere sia il prezzo $C(f_N; P)$ che la composizione del portfolio che permette la copertura perfetta.
Un metodo standard per determinare tale strategia è il seguente: si costruisce la $(\widetilde{P}, \mathcal{F}_n)$-martingala $M = (M_n)_{n \leqslant N}$ con $M_n = \widetilde{\mathbb{E}} \left(\frac{f_N}{B_N} \middle| \mathcal{F}_n \right)$. Come mostrato nell'ultima sezione del capitolo precedente, la completezza del mercato è equivalente alla $\frac{S}{B}$*-rappresentabilità* di martingale limitate per cui M_n ammette la seguente rappresentazione:

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \Delta \left(\frac{S_k}{B_k} \right) \tag{2.9}$$

con le γ_n predicibili.
In considerazione di quanto visto si prende $\pi^* = (\beta^*, \gamma^*)$ con $\gamma_n^* = \gamma_n$ (dove le γ_n sono quelle della (2.9)) e $\beta_n^* = M_n - \gamma_n \frac{S_n}{B_n}$. Si verifica banalmente che questo è un portfolio autofinanziante (si veda la dimostrazione del Lemma 1.5.1).
Dalla costruzione della suddetta martingala segue dunque

$$\frac{X_0^{\pi^*}}{B_0} = M_0 \tag{2.10}$$

e

$$\Delta\left(\frac{X_n^{\pi^*}}{B_n}\right) = \gamma_n^*\Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right) = \gamma_n\Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right) = \Delta M_n; \tag{2.11}$$

quindi, per ogni $0 \leqslant n \leqslant N$, si ha

$$\frac{X_n^{\pi^*}}{B_n} = M_n = \widetilde{\mathbb{E}}\left(\frac{f_N}{B_N}\Big|\mathcal{F}_n\right), \tag{2.12}$$

e in particolare

$$X_N^{\pi^*} = f_N \qquad (\widetilde{P}\ \text{ q.o. e } P\ \text{ q.o.}).$$

Il portfolio π^* costruito sulla base della $\frac{S}{B}$-rappresentazione risulta, dunque, una copertura perfetta per f_N.

Si possono riassumere i risultati ottenuti come segue

Teorema 2.2.2. Formula fondamentale per la strategia di copertura di un'opzione di tipo Europeo in un mercato completo

In un generico mercato arbitrage-free e completo esiste una copertura perfetta autofinanziante $\pi^* = (\beta^*, \gamma^*)$ con capitale iniziale

$$X_0^{\pi^*} = C(f_N; P) = B_0\widetilde{\mathbb{E}}\frac{f_N}{B_N}$$

che replica f_N fedelmente:

$$X_N^{\pi^*} = f_N \qquad (P\ \text{q.o.}).$$

La dinamica del capitale $X_n^{\pi^*}$ è descritta dalla formula

$$X_n^{\pi^*} = B_n\,\widetilde{\mathbb{E}}\left(\frac{f_N}{B_N}\Big|\mathcal{F}_n\right), \qquad 1 \leqslant n \leqslant N$$

e le componenti $\beta^* = (\beta_n^*)$ possono essere definite dalla condizione

$$X_n^{\pi^*} = \beta_n^* B_n + \gamma_n^* S_n.$$

Osservazione 2.2.1. Si consideri ora una generalizzazione del caso illustrato, ovvero si assuma che al posto di una singola funzione f_N si abbia una successione $f_0^N = (f_0, f_1, ..., f_N)$ di obbligazioni tale che f_i è $\mathcal{F}_i$-misurabile con $0 \leqslant i \leqslant N$.
Sia $\tau = \tau(\omega)$ un tempo di Markov fissato, $\tau \in \{0, 1, ..., N\}$, e sia f_τ la funzione di pay-off associata a tale istante.

Teorema 2.2.3. *Se un mercato arbitrage-free (B, S) è N-completo, allora è anche τ-completo, cioè, esiste una strategia π autofinanziante e un capitale iniziale x tali che $X_0^\pi = x$ e $X_\tau^\pi = f_\tau$ (P q.o.)*

Dimostrazione. Si costruisce semplicemente a partire da f_τ una nuova funzione di pay-off $f_N^* = f_{\tau\wedge N}$; allora la copertura perfetta π^* per f_N^* risulta essere anche una copertura perfetta per l'obbligazione f_τ.
Il prezzo di copertura corrispondente è

$$C(f_\tau; P) = \min\{x : \exists\, \pi \quad \text{t.c} \quad X_0^\pi = x \text{ e } X_\tau^\pi = f_\tau \quad (P \text{ q.o.})\}$$

e può essere valutato dalla formula

$$C(f_\tau; P) = B_0 \widetilde{\mathbb{E}} \frac{f_\tau}{B_\tau}. \tag{2.13}$$

$\square$

2.3 Prezzi di copertura in un mercato incompleto: processi di consumo

Si può voler determinare il prezzo di copertura per un'opzione anche nel caso di mercato incompleto; tuttavia in questo caso non necessariamente esiste una copertura perfetta, quindi occorre modificare la definizione di prezzo di copertura in modo da poter trattare una classe più ampia di strategie rispetto a quella delle strategie autofinanzianti che permetta di ricondursi al caso di mercato completo.

Una scelta naturale consiste nel considerare insieme a un portfolio $\pi = (\beta, \gamma)$ anche un *processo di consumo* $C = (C_n)_{n \geqslant 0}$: un processo non negativo e non decrescente tale che le C_n sono $\mathcal{F}_n$-misurabili e $C_0 = 0$.

Si assume, cioè, che il capitale

$$X_n^{\pi,C} = \beta_n B_n + \gamma_n S_n \tag{2.14}$$

sia soggetto a spese di consumo $\Delta C_n \geqslant 0$ (ad esempio le spese dovute al cambio di strategia) ovvero

$$\Delta X_n^{\pi,C} = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n - \Delta C_n. \tag{2.15}$$

Come ovvio, se $\Delta C_n = 0$, si ottiene il caso autofinanziante caratterizzato dalla condizione $B_{n-1}\Delta\beta_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n = 0$. Dall'assunzione fatta e dall'applicazione della relazione algebrica (1.7) al valore della strategia segue immediatamente che

$$\Delta C_n = -B_{n-1}\Delta\beta_n - S_{n-1}\Delta\gamma_n. \tag{2.16}$$

Si osservi inoltre che la (2.15) implica che il valore $X^{\pi,C}$ del portfolio (π, C) è determinato tramite la formula

$$X_n^{\pi,C} = X_0^{\pi,C} + \sum_{k=1}^{n} (\beta_k \Delta B_k + \gamma_k \Delta S_k) - C_n, \qquad n \geqslant 1, \tag{2.17}$$

analogamente a quanto mostrato nella (1.11).

Si consideri ora un mercato scontato; essendo $\widetilde{B} = (\widetilde{B}_n)$ costantemente uguale a 1, l'applicazione della regola di differenziazione alla (2.14) attualizzata permette di ottenere

$$\Delta \widetilde{X}_n^{\pi,C} = \Delta\beta_n + \gamma_n \Delta \widetilde{S}_n + \widetilde{S}_{n-1}\Delta\gamma_n;$$

la (2.16) scontata diviene

$$\frac{\Delta C_n}{B_{n-1}} = -\Delta\beta_n - \widetilde{S}_{n-1}\Delta\gamma_n;$$

mettendo insieme le ultime due relazioni si ricava

$$\Delta \widetilde{X}_n^{\pi,C} = \gamma_n \Delta \widetilde{S}_n - \frac{\Delta C_n}{B_{n-1}}.$$

Esplicitando quanto illustrato si può concludere che la seguente relazione

$$\Delta\left(\frac{X_n^{\pi,C}}{B_n}\right) = \gamma_n \Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right) - \frac{\Delta C_n}{B_{n-1}}, \qquad n \geqslant 1. \tag{2.18}$$

è equivalente alla (2.17).

Osservazione 2.3.1. Se si assume $\beta_k^{'} = \beta_k - \frac{\Delta C_k}{\Delta B_k}$ segue dalla (2.17) che

$$X_n^{\pi,C} = X_0^{\pi,C} + \sum_{k=1}^{n} (\beta_k^{'} \Delta B_k + \gamma_k \Delta S_k),$$

questa formula pur essendo simile alla (1.11) presenta una differenza sostanziale, ovvero mentre le β_k nella (1.11) sono $\mathcal{F}_{k-1}$-misurabili le $\beta_k^{'}$ sono solo $\mathcal{F}_k$-misurabili.

Si è già osservato che, generalmente, non si può parlare di copertura perfetta in un mercato incompleto: non necessariamente esiste una strategia π tale che $X_N^\pi = f_N$ (P q.o.). Ciò non esclude, però, l'opportunità che cambiando l'insieme delle strategie ammissibili si possa ottenere, al tempo

N, un capitale che replica (*offsetting*) P q.o. la funzione di pay-off f_N.
Come si chiarirà tramite la dimostrazione del teorema che segue, introdurre il consumo permette di trovare una strategia (π, C) tale che $X_N^{\pi;C} = f_N$ (P q.o.). Questo è il motivo pratico per il quale si considera il consumo C insieme al portfolio π, si deve tener conto, però, che le strategie con consumo possono avere anche implicazioni economiche.

Definizione 2.3.1. *Il prezzo superiore di una copertura Europea (upper price) nel caso di strategie con consumo* è la quantità

$$C_c^*(f_N; P) = \inf\{x : \exists\, (\pi, C) \quad \text{t.c. } X_0^{\pi;C} = x \text{ e } X_N^{\pi;C} \geqslant f_N \quad (P \text{ q.o.})\}.$$

Risulta interessante notare che il motivo per il quale viene trattato il prezzo superiore di copertura è dato dalla necessità del venditore dell'opzione di poter rispettare i termini del contratto, egli deve, ottenuta all'istante iniziale una quota x, garantire al tempo N l'ammontare f_N, quindi ha la necessità di ricorrere a una strategia che lo metta in grado di ottenere all'istante N *almeno* il prezzo da risarcire (il mercato considerato non ammette *rischi di insolvenza*: i debiti vengono onorati).
N.B. Nella successiva discussione si considererà solo il prezzo di copertura superiore e per non appesantire le notazioni verrà chiamato prezzo di copertura.

2.3.1 Formula fondamentale

Nel caso in cui la famiglia $\mathcal{P}(P)$ delle misure martingale equivalenti a P sia non vuota, il seguente teorema mette in luce il risultato principale relativo ai prezzi di copertura in un mercato incompleto

Teorema 2.3.1. Formula fondamentale per il prezzo di copertura di un'opzione di tipo Europeo in un mercato incompleto
Sia $\mathcal{P}(P) \neq \emptyset$ e sia f_N una funzione non negativa, limitata e $\mathcal{F}_N$ misurabile. Allora il prezzo $C_c^*(f_N; P)$, su un mercato incompleto, può essere calcolato tramite la formula

$$C_c^*(f_N; P) = B_0 \sup_{\widetilde{P} \in \mathcal{P}(P)} \widetilde{\mathbb{E}} \frac{f_N}{B_N} \tag{2.19}$$

dove $\widetilde{\mathbb{E}}$ è la media rispetto alla misura $\widetilde{P}$.

Per semplicità la dimostrazione si articola in due passi: nel primo si verifica che $C_c^*(f_N; P)$ è maggiore o uguale dell'estremo superiore indicato, nel secondo si dimostra la disuguaglianza opposta utilizzando la *decomposizione opzionale*. L'esistenza di questa decomposizione fu stabilita per la prima volta da N. El Karoui e M.C. Quenez [6]: per capire di cosa si sta parlando occorre richiamare alcune nozioni di probabilità.

Definizione 2.3.2. Una successione stocastica $X = (X_n)_{n \geqslant 0}$ è detta $(P, \mathcal{F}_n)$-*supermartingala* (submartingala) se $E|X_n| < \infty$ e se

$$E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) \leqslant X_{n-1} \quad (\geqslant X_{n-1}) \qquad (P \text{ q.o.}) \quad \forall n \geqslant 1.$$

Teorema 2.3.2. Teorema di decomposizione di Doob
Se $X = (X_n)_{n \geqslant 0}$ è una $(P, \mathcal{F}_n)$-supermartingala allora la si può rappresentare come segue:

$$X_n = X_0 + M_n - C_n \qquad (\textit{decomposizione di Doob})$$

dove $M = (M_n)_{n \geqslant 0}$ è una $(P, \mathcal{F}_n)$-martingala e $C = (C_n)_{n \geqslant 0}$ è un processo predicibile non decrescente.

Teorema 2.3.3. Teorema di decomposizione opzionale
Se $X = (X_n)_{n \geqslant 0}$ *è una* $\mathcal{F}_n$*-supermartingala rispetto a ogni misura* $\widetilde{P} \in \mathcal{P}(P)$ *allora ammette la seguente decomposizione:*

$$X_n = X_0 + \overline{M}_n - \overline{C}_n \qquad n \leqslant N \qquad (\textit{decomposizione opzionale})$$

dove $\overline{M}_n = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \Delta S_k$, $\gamma = (\gamma_k)_{k \leqslant N}$ *è un processo predicibile e* $\overline{C} = (\overline{C}_n)_{n \leqslant N}$ *è un processo non decrescente tale che le* $\overline{C}_n$ *risultano* $\mathcal{F}_n$*-misurabili.*

Da quanto enunciato segue che prendendo un processo $X = (X_n)_{n \leqslant N}$ che è una supermartingala rispetto ogni misura $\widetilde{P} \in \mathcal{P}(P)$ per ogni scelta di $\widetilde{P}$ esistono due tipi di decomposizioni. Le differenze sostanziali fra le rappresentazioni consistono nelle diverse proprietà probabilistiche dei processi componenti, ovvero:

1. M_n è una martingala mentre $\overline{M}_n$ è una martingala locale;

2. C_n è un processo predicibile mentre $\overline{C}_n$ è solo $\mathcal{F}_n$-misurabile.

Prima di procedere con la dimostrazione occorre dare un'ulteriore nozione probabilistica, ovvero

Definizione 2.3.3. Sia W una variabile aleatoria si definisce *estremo superiore essenziale di* W *su* $\mathcal{P}(P)$ *condizionato a* $\mathcal{F}_n$ e si indica con

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\widetilde{P} \in \mathcal{P}(P)} \widetilde{\mathbb{E}}(W|\mathcal{F}_n)$$

la variabile aleatoria W_n $\mathcal{F}_n$-misurabile che soddisfa la disuguaglianza

$$W_n \geqslant \widetilde{\mathbb{E}}(W|\mathcal{F}_n) \qquad (P \text{ q.o.}) \tag{2.20}$$

per ogni misura $\widetilde{P} \in \mathcal{P}(P)$ e che gode della seguente proprietà di minimalità: se $\overline{W}_n$ è un'altra variabile aleatoria che soddisfa la (2.20) allora si ha $W_n \leqslant \overline{W}_n$ (P q.o.).

Introdotti questi elementi indispensabili si può passare alla dimostrazione del teorema:

Dimostrazione. (A) Si inizia dimostrando che

$$B_0 \sup_{\widetilde{P} \in \mathcal{P}(P)} \widetilde{\mathbb{E}} \frac{f_N}{B_N} \leqslant C_c^*(f_N; P). \tag{2.21}$$

Sia (π, C) una copertura per (x, f_N), cioè si assume $X_0^{\pi,C} = x$ e $X_N^{\pi,C} \geqslant f_N$ (P q.o.). Allora, considerando il valore esplicito di $X_N^{\pi,C}$ e tenendo presente che il consumo C_n è un processo non decrescente (per cui $\Delta C_n \geqslant 0$), seguono le disuguaglianze

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \frac{f_N}{B_N} \leqslant \frac{X_N^{\pi,C}}{B_N} &= \frac{X_0^{\pi,C}}{B_0} + \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \Delta \left(\frac{S_k}{B_k} \right) - \sum_{k=1}^{N} \frac{\Delta C_k}{B_{k-1}} \\ &\leqslant \frac{x}{B_0} + \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \Delta \left(\frac{S_k}{B_k} \right). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Passando ai valori attesi rispetto una generica $\widetilde{P} \in \mathcal{P}(P)$ si ottiene

$$\widetilde{\mathbb{E}} \frac{f_N}{B_N} \leqslant \frac{x}{B_0} + \widetilde{\mathbb{E}} \left(\sum_{k=1}^{N} \gamma_k \Delta \left(\frac{S_k}{B_k} \right) \right);$$

per l'asserzione 2) del Lemma 1.4.4 segue che $\sum_{k=1}^{N} \gamma_k \Delta \left(\frac{S_k}{B_k} \right)$ è una $(\widetilde{P}, \mathcal{F}_n)$-martingala da cui $\widetilde{\mathbb{E}} \left(\sum_{k=1}^{N} \gamma_k \Delta \left(\frac{S_k}{B_k} \right) \right) = 0$ così che per *ogni* misura $\widetilde{P} \in \mathcal{P}(P)$ si ha

$$B_0 \, \widetilde{\mathbb{E}} \frac{f_N}{B_N} \leqslant x. \tag{2.23}$$

Quindi, avendo posto $C_c^*(f_N;P)=x$, si ricava la (2.21).

(B) Per dimostrare la disuguaglianza inversa

$$C_c^*(f_N;P) \leqslant B_0 \sup_{\widetilde{P}\in\mathcal{P}(P)} \widetilde{\mathbb{E}}\frac{f_N}{B_N}, \tag{2.24}$$

si definisca

$$Y_n = \operatorname*{ess\,sup}_{\widetilde{P}\in\mathcal{P}(P)} \widetilde{\mathbb{E}}\left(\frac{f_N}{B_N}\Big|\mathcal{F}_n\right) \tag{2.25}$$

tale successione è una *supermartingala* rispetto a una qualunque misura $\widetilde{P}\in\mathcal{P}(P)$ (si veda l'Osservazione 2.3.2), cioè

$$\widetilde{\mathbb{E}}(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leqslant Y_n \qquad (\widetilde{P} \text{ q.o.}). \tag{2.26}$$

quindi $Y=(Y_n)_{n\leqslant N}$ ammette una decomposizione universale (indipendente da $\widetilde{P}$) opzionale del tipo

$$Y_n = Y_0 + \overline{M}_n - \overline{C}_n, \tag{2.27}$$

dove $\overline{M}=(\overline{M}_n)$ è una martingala rispetto ogni misura $\widetilde{P}$ della famiglia $\mathcal{P}(P)$ e $\overline{C}=(\overline{C}_n)$ è un processo non decrescente con $\overline{C}_0=0$ e $\overline{C}_n$ $\mathcal{F}_n$-misurabile. Si può osservare (si veda Teorema 2.3.3) che la struttura della martingala $\overline{M}=(\overline{M}_n)_{n\leqslant N}$ è quella di un integrale stocastico (o trasformata di martingala), ovvero

$$\overline{M}_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{\gamma}_k \Delta\left(\frac{S_k}{B_k}\right), \tag{2.28}$$

dove $\overline{\gamma}=(\overline{\gamma}_n)_{n\leqslant N}$ è un processo predicibile.

A questo punto si può considerare un portfolio $\widetilde{\pi}=(\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma})$ e un processo di consumo $\widetilde{C}$ dipendenti, come illustrato successivamente, dai processi $\overline{C}, \overline{\gamma}$ ai quali corrisponde un capitale tale che

$$X_0^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} = B_0 \sup_{\widetilde{P}\in\mathcal{P}(P)} \widetilde{\mathbb{E}} \frac{f_N}{B_N} \quad \text{e} \quad X_N^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} \geqslant f_N.$$

Naturalmente, tenendo presente la Definizione 2.3.1, questo significa

$$C_c^*(f_N; P) \leqslant X_0^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}}$$

ovvero la (2.24).

La strategia $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$ e il processo di consumo $\widetilde{C}$ richiesti si ottengono prendendo

$$\widetilde{\gamma}_n = \overline{\gamma}_n, \qquad \widetilde{\beta}_n = Y_n - \widetilde{\gamma}_n \frac{S_n}{B_n}, \qquad \widetilde{C}_n = \sum_{k=1}^{n} B_{k-1} \Delta \overline{C}_k \tag{2.29}$$

dove $\overline{\gamma}$ e $\overline{C}$ sono le successioni stocastiche della decomposizione opzionale relativa alla supermartingala Y.

Il capitale iniziale associato al portfolio $\widetilde{\pi}$ e al consumo $\widetilde{C}$ risulta dunque

$$X_0^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} = \widetilde{\beta}_0 B_0 + \widetilde{\gamma}_0 S_0 = \left(Y_0 - \widetilde{\gamma}_0 \frac{S_0}{B_0} \right) B_0 + \widetilde{\gamma}_0 S_0 = Y_0 B_0.$$

Come visto nello schema con consumo l'incremento del capitale (attualizzato) può essere descritto dalla formula

$$\Delta \left(\frac{X_n^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}}}{B_n} \right) = \widetilde{\gamma}_n \Delta \left(\frac{S_n}{B_n} \right) - \frac{\Delta \widetilde{C}_n}{B_{n-1}}.$$

Tenendo presente che $\widetilde{\gamma} = \overline{\gamma}$ e le definizioni di $\overline{M}_n$ e di $\widetilde{C}_n$ si ottiene

$$\Delta \left(\frac{X_n^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}}}{B_n} \right) = \Delta \overline{M}_n - \Delta \overline{C}_n = \Delta Y_n,$$

dove l'ultima uguaglianza è conseguenza della decomposizione opzionale (Teorema 2.3.3).
Infine, essendo $Y_0 = \frac{X_0^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}}}{B_0}$, si ricava

$$\frac{X_N^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}}}{B_N} = Y_N = \frac{f_N}{B_N}.$$

Allora $X_N^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} = f_N$ da cui segue che la strategia proposta $(\widetilde{\pi}, \widetilde{C})$ con capitale iniziale

$$X_0^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} = B_0 Y_0 = B_0 \sup_{\widetilde{P} \in \mathcal{P}(P)} \widetilde{\mathbb{E}} \frac{f_N}{B_N}$$

è una *copertura perfetta con consumo.* □

Osservazione 2.3.2. Nel corso della precedente dimostrazione si è asserito che la successione $Y = (Y_n)_{n \leqslant N}$ definita tramite la (2.25) è una supermartingala rispetto a una qualunque misura $\widetilde{P} \in \mathcal{P}(P)$, la dimostrazione di questa proprietà viene rimandata al prossimo capitolo dove verrà trattata in un ambito più generale; infatti si deve tener presente che tramite una generalizzazione della successione $Y = (Y_n)_{n \leqslant N}$ è possibile stabilire una connessione tra i prezzi di copertura Europei nel caso incompleto e quelli Americani.

Dimostrando il teorema si è giunti, inaspettatamente, a un risultato più generale, ovvero:

Teorema 2.3.4. Formula fondamentale per la strategia di copertura di un'opzione di tipo Europeo in un mercato incompleto
Su un mercato arbitrage-free è possibile trovare una copertura autofinanziante $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$ e un processo di consumo $\widetilde{C}$ tali che il valore di questa copertura,

$X_n^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} = \widetilde{\beta}_n B_n + \widetilde{\gamma}_n S_n$, cambi in accordo con la condizione di bilancio $\Delta X_n^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} = \widetilde{\beta}_n \Delta B_n + \widetilde{\gamma}_n \Delta S_n - \Delta C_n$ e soddisfi le relazioni

$$X_0^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} = C_c^*(f_N, P) = B_0 \sup_{\widetilde{P}\in\mathcal{P}(P)} \widetilde{\mathbb{E}} \frac{f_N}{B_N}$$

e

$$X_N^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} = f_N \qquad (P \text{ q.o.}).$$

Il valore $X_n^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}}$ di questa copertura può essere calcolato tramite la formula

$$X_n^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} = B_n \operatorname*{ess\,sup}_{\widetilde{P}\in\mathcal{P}(P)} \widetilde{\mathbb{E}} \left(\frac{f_N}{B_N} \Big| \mathcal{F}_n \right).$$

Le componenti $\widetilde{\gamma} = (\widetilde{\gamma}_n)$ e $\widetilde{C} = (\widetilde{C}_n)$ si determinano tramite la decomposizione opzionale di

$$Y_n = \operatorname*{ess\,sup}_{\widetilde{P}\in\mathcal{P}(P)} \widetilde{\mathbb{E}} \left(\frac{f_N}{B_N} \Big| \mathcal{F}_n \right) = \sup_{\widetilde{P}\in\mathcal{P}(P)} \widetilde{\mathbb{E}} \frac{f_N}{B_N} + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\gamma}_k \Delta \left(\frac{S_k}{B_k} \right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta \widetilde{C}_k}{B_{k-1}},$$

le componenti $\widetilde{\beta} = (\widetilde{\beta}_n)$ si ottengono dalla condizione $X_n^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} = \widetilde{\beta}_n B_n + \widetilde{\gamma}_n S_n$, come indicato nella (2.29).

Capitolo 3

Prezzi di copertura per opzioni Americane su un mercato arbitrage-free

3.1 Problema dell'ottimizzazione dei tempi di arresto: caratterizzazione tramite supermartingale

Un'opzione Americana, come visto nel capitolo precedente, dà al suo compratore la possibilità di scegliere l'istante i di esercizio in un intervallo finito di tempi ($0 \leqslant i \leqslant N$).
Naturalmente si pone il problema di determinare il tempo di esercizio ottimale, ovvero, quello rispetto al quale si ha un maggior guadagno. Da quanto asserito segue che lo studio di opzioni Americane può essere ricondotto

a un problema di ottimizzazione dei tempi.
Per procedere nell'analisi di questo tipo di opzioni e giungere così ai prezzi di copertura ad esse relativi occorre, quindi, introdurre strumenti matematici che trattino il *principio di ottimizzazione dei tempi.*
Sia $f_0^N = (f_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ una successione stocastica su $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{0 \leqslant n \leqslant N}, P)$ dove $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ e $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$ tale che $\mathbb{E}|f_n| < \infty$ per ogni $n \leqslant N$.
Si è interessati al problema di trovare

1. la funzione (*prezzo*)
$$V_n^N = \sup_{\tau \in \mathcal{M}_n^N} \mathbb{E} f_\tau,$$
dove l'estremo superiore è preso sulla classe $\mathcal{M}_n^N$ di tutti i tempi di arresto τ tali che $n \leqslant \tau \leqslant N$, e

2. il *tempo di arresto ottimale.*

Si introduca una successione $\gamma^N = (\gamma_n^N)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ definita (opportunamente) come segue

$$\begin{aligned} \gamma_N^N &= f_N \\ \gamma_n^N &= \max(f_n, \mathbb{E}(\gamma_{n+1}^N | \mathcal{F}_n)) \end{aligned} \tag{3.1}$$

e si consideri τ_n^N il primo istante, a partire da n, nel quale f e γ coincidono, ovvero
$$\tau_n^N = \min\{n \leqslant i \leqslant N \ : \ f_i = \gamma_i\}$$
con $0 \leqslant n \leqslant N$.
Date tali definizioni si può illustrare uno dei principali risultati relativo alla teoria dei tempi di arresto ottimali su un intervallo finito.

Teorema 3.1.1. *La successione* $\gamma^N = (\gamma_n^N)_{n \leqslant N}$ *definita dalla relazione ricorsiva (3.1) e il tempo di arresto* τ_n^N*,* $0 \leqslant n \leqslant N$*, godono delle seguenti proprietà:*

(a) $\tau_n^N \in \mathcal{M}_n^N$*;*

(b) $\mathbb{E}(f_{\tau_n^N}|\mathcal{F}_n) = \gamma_n^N$*;*

(c) $\mathbb{E}(f_\tau|\mathcal{F}_n) \leqslant \mathbb{E}(f_{\tau_n^N}|\mathcal{F}_n) = \gamma_n^N$ *per ogni* $\tau \in \mathcal{M}_n^N$*;*

(d) $\gamma_n^N = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{M}_n^N} \mathbb{E}(f_\tau|\mathcal{F}_n)$ *e, in particolare,*
$\gamma_0^N = \sup_{\tau \in \mathcal{M}_0^N} \mathbb{E} f_\tau = \mathbb{E} f_{\tau_0^N}$*;*

(e) $V_n^N = \mathbb{E}\gamma_n^N$.

N.B. Per evitare di appesantire le notazioni si ometterà nel corso della dimostrazione di scrivere N sopra ogni termine.

Dimostrazione. La proprietà (a) è diretta conseguenza della definizioni di τ_n e $\mathcal{M}_n$.

Osservando che le proprietà (b) e (c) risultano ovvie per il caso $n = N$, si può procedere per induzione a ritroso, cioè si ipotizza siano vere anche per gli istanti di tempo $n = N, N-1, .., k$ e si studia cosa accade per $n = k-1$. Sia $\tau \in \mathcal{M}_{k-1}$ $(k-1 \leqslant \tau \leqslant N)$ e sia $A \in \mathcal{F}_{k-1}$, si consideri inoltre $\overline{\tau} = \max(\tau, k)$ si ha che $\overline{\tau} \in \mathcal{M}_k$. Essendo τ un tempo di arresto vale la proprietà $\{\tau \geqslant k\} \in \mathcal{F}_{k-1}$, ciò implica che su tale insieme $\tau = \overline{\tau}$, dalle osservazioni fatte segue che

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbb{I}_A f_\tau) &= \mathbb{E}(\mathbb{I}_{A\cap\{\tau=k-1\}} f_\tau) + \mathbb{E}(\mathbb{I}_{A\cap\{\tau\geqslant k\}} f_\tau) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{I}_{A\cap\{\tau=k-1\}} f_{k-1}) + \mathbb{E}(\mathbb{I}_{A\cap\{\tau\geqslant k\}} f_{\overline{\tau}})
\end{aligned}$$

dato che l'insieme $A \cap \{\tau \geqslant k\} \in \mathcal{F}_{k-1}$ applicando la tecnica dei condizionamenti successivi si può portare fuori la funzione indicatrice dalla media condizionale rispetto $\mathcal{F}_{k-1}$, considerando inoltre la relazione $f_{\overline{\tau}} \in \mathcal{F}_k \supseteq \mathcal{F}_{k-1}$ si ottiene

$$\mathbb{E}(\mathbb{I}_{A\cap\{\tau\geqslant k\}} f_{\overline{\tau}}) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_{A\cap\{\tau\geqslant k\}} \mathbb{E}(\mathbb{E}(f_{\overline{\tau}}|\mathcal{F}_k)|\mathcal{F}_{k-1})).$$

Dall'ipotesi induttiva relativa alla (c), $\mathbb{E}(f_{\overline{\tau}}|\mathcal{F}_k) \leqslant \gamma_k$, segue

$$\mathbb{E}(\mathbb{I}_A f_\tau) \leqslant \mathbb{E}(\mathbb{I}_{A\cap\{\tau=k-1\}} f_{k-1}) + \mathbb{E}(\mathbb{I}_{A\cap\{\tau\geqslant k\}} \mathbb{E}(\gamma_k|\mathcal{F}_{k-1})).$$

Infine, considerando che la definizione di $\gamma_{k-1} = \max(f_{k-1}, \mathbb{E}(\gamma_k|\mathcal{F}_{k-1}))$ implica f_{k-1} e γ_k minori o uguali di γ_{k-1}, si può concludere che

$$\mathbb{E}(\mathbb{I}_A f_\tau) \leqslant \mathbb{E}(\mathbb{I}_A \gamma_{k-1}). \tag{3.2}$$

Per l'arbitrarietà di $A \in \mathcal{F}_{k-1}$ segue allora $\mathbb{E}(f_\tau|\mathcal{F}_{k-1}) \leqslant \gamma_{k-1}$. Per provare la validità delle relazioni (b) e (c) nel caso $n = k-1$ si deve mostrare inoltre che

$$\mathbb{E}(f_{\tau_{k-1}}|\mathcal{F}_{k-1}) = \gamma_{k-1}$$

ovvero che la disuguaglianza (3.2) diviene un'uguaglianza nel caso $\tau = \tau_{k-1}$. Si osservi, dunque, che la definizione di τ_{k-1} implica che sull'insieme $\{\tau_{k-1} \geqslant k\}$ si ha $\tau = \tau_{k-1} = \tau_k$ e poiché per ipotesi induttiva $\mathbb{E}(f_{\tau_k}|\mathcal{F}_k) = \gamma_k$ si ottiene la serie di uguaglianze

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbb{I}_A f_{\tau_{k-1}}) &= \mathbb{E}(\mathbb{I}_{A\cap\{\tau_{k-1}=k-1\}} f_{k-1}) + \mathbb{E}(\mathbb{I}_{A\cap\{\tau_{k-1}\geqslant k\}} \mathbb{E}(\mathbb{E}(f_{\tau_k}|\mathcal{F}_k)|\mathcal{F}_{k-1})) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{I}_{A\cap\{\tau_{k-1}=k-1\}} f_{k-1}) + \mathbb{E}(\mathbb{I}_{A\cap\{\tau_{k-1}\geqslant k\}} \mathbb{E}(\gamma_k|\mathcal{F}_{k-1})) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{I}_A \gamma_{k-1})
\end{aligned}$$

dove l'ultima identità discende dalla definizione di γ_{k-1}, come massimo tra le funzioni f_{k-1} e $\mathbb{E}(\gamma_k|\mathcal{F}_{k-1})$, e da quella di τ_k, infatti si ha

- su $\{\tau_{k-1} = k-1\}$ $\quad f_{k-1} = \gamma_{k-1}$;
- su $\{\tau_{k-1} > k-1\}$ $\quad f_{k-1} \neq \gamma_{k-1} \Longrightarrow \gamma_{k-1} = \mathbb{E}(\gamma_k|\mathcal{F}_{k-1})$.

Allora risultano dimostrate la (b) e la (c), dalle quali segue l'asserzione (d). Infine si può dimostrare la (e) applicando alla (c) le proprietà di monotonia che legano valori attesi e valori attesi condizionali: per ogni $\tau \in \mathcal{M}_k$ risulta

$$\mathbb{E}f_\tau \leqslant \mathbb{E}f_{\tau_k} = \mathbb{E}\gamma_k$$

da cui segue $V_k = \sup_{\tau\in\mathcal{M}_k} \mathbb{E}f_\tau = \mathbb{E}f_{\tau_k} = \mathbb{E}\gamma_k$. □

Corollario 3.1.2. *La successione $\gamma^N = (\gamma_n^N)_{n\leqslant N}$ è una $(P,\mathcal{F}_n)$-supermartingala. Inoltre γ^N è la più piccola $(P,\mathcal{F}_n)$-supermartingala tale che $\gamma_n^N \geqslant f_n \quad \forall\, n \leqslant N$, ovvero: se $\widetilde{\gamma}^N = (\widetilde{\gamma}_n^N)_{n\leqslant N}$ è una $(P,\mathcal{F}_n)$-supermartingala e $\widetilde{\gamma}_n^N \geqslant f_n \quad \forall\, n \leqslant N$, allora $\gamma_n^N \leqslant \widetilde{\gamma}_n^N$ (P q.o.) con $n \leqslant N$.*

Dimostrazione. La proprietà di supermartingala della successione $\gamma^N = (\gamma_n^N)_{n\leqslant N}$ segue dalla sua definizione ricorsiva (3.1), da questa relazione segue anche la disuguaglianza $\gamma_n^N \geqslant f_n \quad \forall\, n \leqslant N$.
Inoltre risulta evidente che se $\widetilde{\gamma}_N^N \geqslant f_N$ e si considera un istante $n < N$,

$$\widetilde{\gamma}_n^N \geqslant \max(f_n, \mathbb{E}(\widetilde{\gamma}_{n+1}^N|\mathcal{F}_n))$$

ed essendo $\gamma_N^N = f_N$ si ha $\widetilde{\gamma}_N^N \geqslant \gamma_N^N$ da cui si ricava la seguente relazione

$$\begin{aligned}\widetilde{\gamma}_{N-1}^N &\geqslant \max(f_{N-1}, \mathbb{E}(\widetilde{\gamma}_N^N|\mathcal{F}_{N-1})) \\ &\geqslant \max(f_{N-1}, \mathbb{E}(\gamma_N^N|\mathcal{F}_{N-1})) = \gamma_{N-1}^N. \qquad (3.3)\end{aligned}$$

Iterando questo procedimento si dimostra che $\gamma_n^N \leqslant \widetilde{\gamma}_n^N$ per ogni $n \leqslant N-1$. $\square$

Corollario 3.1.3. *La variabile*

$$\tau_0^N = \min\{0 \leqslant i \leqslant N : \; f_i = \gamma_i^N\}$$

è un tempo di arresto ottimale nella classe $\mathcal{M}_0^N$, cioè,

$$\sup_{\tau \in \mathcal{M}_0^N} \mathbb{E} f_\tau = \mathbb{E} f_{\tau_0^N} (= \gamma_0^N).$$

Si ottiene, dunque, che il problema di determinare il tempo di arresto ottimale può essere risolto attraverso l'induzione a ritroso (*backward induction*), ossia tramite la valutazione, nell'ordine indicato, delle variabili $\gamma_N^N, \gamma_{N-1}^N, ..., \gamma_0^N$, dove $\gamma_N^N = f_N$ e γ_n^N soddisfa la relazione ricorsiva definita dalla (3.1).

Se si riconsiderano gli elementi introdotti in termini finanziari, ovvero si assume che la successione $f_0^N = (f_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ sia la successione dei pay-off associati a un'opzione Americana, si può osservare che la definizione ricorsiva di $\gamma^N = (\gamma_n^N)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ permette di dire che γ^N *è una stima dell'andamento dei prezzi*. Infatti, tenendo presente che f_k è il guadagno associato all'opzione all'istante k, si vede chiaramente che

$$\gamma_k^N = \max(f_k, \mathbb{E}(\gamma_{k+1}^N | \mathcal{F}_k))$$

indica qual è il massimo guadagno tra quello *ottenibile* all'istante considerato, f_k, e quello *previsto* nell'istante successivo, $\mathbb{E}(\gamma_{k+1}^N | \mathcal{F}_k)$. Se il guadagno ottenibile è superiore di quello previsto, cioè $\gamma_k^N = f_k$ o meglio k è il valore del tempo di arresto τ_0^N, risulta ragionevole da parte del compratore dell'opzione esercitarla piuttosto che aspettare l'istante successivo $k+1$. Si può concludere, quindi, che il tempo di esercizio ottimale è quello indicato nel Corollario 3.1.3.

3.2 Prezzi di copertura: caratterizzazione tramite supermartingale

Si riveda la dimostrazione della formula (2.19) relativa al prezzo di copertura per un'opzione Europea in un mercato incompleto; come si è già fatto notare per poter ottenere questo risultato si deve tener conto di due fatti principali:

- ▷ la successione
$$Y_n = \operatorname*{ess\,sup}_{\widetilde{P} \in \mathcal{P}(P)} \widetilde{\mathbb{E}} \left(\frac{f_N}{B_N} \Big| \mathcal{F}_n \right)$$
è una supermartingala rispetto a ogni misura appartenente alla famiglia $\mathcal{P}(P)$;

- ▷ $Y = (Y_n)_{n \leqslant N}$ ammette una decomposizione opzionale.

Dalle asserzioni del paragrafo precedente (si veda Corollario 3.1.2) si può notare che la proprietà di supermartingala è intuitivamente ovvia se si considera l'operazione di prendere l'estremo essenziale superiore come un problema di ottimizzazione (si sta cercando la misura martingala migliore).
In questa sezione si vuole dimostrare la proprietà di supermartingala per la successione $Y = (Y_n)_{n \leqslant N}$, ma anche per una successione più generale definita dalla formula (3.4); interessante risulta premettere che quest'ultimo risultato

è alla base dello studio dei prezzi di copertura Americani.

Teorema 3.2.1. *Sia (B,S) un mercato scontato e arbitrage-free ($\mathcal{P}(P) \neq \emptyset$) definito sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \leqslant N}, P)$ tale che $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ e $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$. Presa una successione $f_0^N = (f_0, f_1, ..., f_N)$ di funzioni di pay-off tali che $\widetilde{E} f_k < \infty$ per ogni $\widetilde{P} \in \mathcal{P}(P)$ e $0 \leqslant k \leqslant N$, si ponga*

$$Y_n^{(A)} = \operatorname*{ess\,sup}_{\widetilde{P} \in \mathcal{P}(P), \tau \in \mathcal{M}_n^N} \widetilde{\mathbb{E}}(f_\tau | \mathcal{F}_n) \tag{3.4}$$

allora la successione $Y^{(A)} = (Y_n^{(A)})_{n \leqslant N}$ è una supermartingala rispetto a ogni misura appartenente all'insieme $\mathcal{P}(P)$.

Dimostrazione. Si prenda una generica misura P^* nell'insieme $\mathcal{P}(P)$ si vuole verificare che $Y^{(A)}$ è una supermartingala rispetto a P^*.
Se $\widetilde{P} \in \mathcal{P}(P)$ allora si pone $\widetilde{Z}_0 = 1$ e

$$\widetilde{Z}_N = \frac{d\widetilde{P}}{dP^*} \quad \widetilde{Z}_n = \frac{d\widetilde{P}_n}{dP_n^*}, \quad \text{dove} \quad \widetilde{P}_n = \widetilde{P} | \mathcal{F}_n, \quad \text{e} \quad P_n^* = P^* | \mathcal{F}_n.$$

Sia

$$\widetilde{\rho} = \frac{\widetilde{Z}_n}{\widetilde{Z}_{n-1}}$$

poiché $\widetilde{P} \sim P^*$, segue che

$$P^*(\widetilde{Z}_{n-1} > 0) = \widetilde{P}(\widetilde{Z}_{n-1} > 0) = 1$$

per ogni $n \leqslant N$. Infatti se si avesse $P^*(\widetilde{Z}_{n-1} = 0) > 0$ esisterebbe un evento $A = \{\widetilde{Z}_{n-1} = 0\}$ per cui

$$P^*(A) > 0 \quad \text{e} \quad \widetilde{P}(A) = \int_A \frac{d\widetilde{P}(\omega)}{dP^*(\omega)} dP^*(\omega) = \int_{\{\widetilde{Z}_{n-1} = 0\}} \widetilde{Z}_{n-1}(\omega) dP^*(\omega) = 0$$

e, quindi, verrebbe meno l'assoluta continuità.

Ponendo $\widetilde{m}_n = \widetilde{\rho}_n - 1, \quad \widetilde{M}_n = \sum_{k=1}^n \widetilde{m}_n, \quad \widetilde{M}_0 = 0$ si ottiene

$$\Delta \widetilde{Z}_n = \widetilde{\rho}_n \widetilde{Z}_{n-1} - \widetilde{Z}_{n-1} = \widetilde{m}_n \widetilde{Z}_{n-1} = \Delta \widetilde{M}_n \widetilde{Z}_{n-1}$$

da tale relazione si vede che

$$\widetilde{Z}_n = \prod_{k=1}^n (1 + \Delta \widetilde{M}_k) = \prod_{k=1}^n \widetilde{\rho}_k.$$

Segue quindi che avendo scelto P^* come misura base è possibile caratterizzare $\widetilde{P}$ e le sue restrizioni $\widetilde{P}_n$, $n \leqslant N$, attraverso una qualunque delle successioni $(\widetilde{Z}_n)$, $(\widetilde{M}_n)$ o $(\widetilde{\rho}_n)$.

Dalla formula di Bayes (si veda la (3.5) nella successiva Osservazione 3.2.1) per ogni tempo di arresto τ (rispetto $\mathcal{F}_n$) e per ogni $n \leqslant N$ si ha

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbb{E}}(f_\tau | \mathcal{F}_n) &= \frac{1}{\widetilde{Z}_n} \mathbb{E}^*(f_\tau \widetilde{Z}_\tau | \mathcal{F}_n) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n \widetilde{\rho}_k} \mathbb{E}^*(f_\tau \prod_{k=1}^\tau \widetilde{\rho}_k | \mathcal{F}_n) \\
&= \mathbb{E}^*(f_\tau \prod_{k=n+1}^\tau \widetilde{\rho}_k | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}^*(f_\tau \prod_{k=1}^\tau \overline{\rho}_k | \mathcal{F}_n) \\
&= \mathbb{E}^*(f_\tau \overline{Z}_\tau | \mathcal{F}_n)
\end{aligned}$$

dove si è assunto

$$\begin{cases} \overline{\rho}_1 = ... = \overline{\rho}_n = 1 \\ \\ \overline{\rho}_h = \widetilde{\rho}_h \qquad h > n \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \overline{Z}_h = \prod_{k=1}^h \overline{\rho}_k.$$

Chiaramente $\overline{P} \sim \widetilde{P} \sim P^*$ dove $d\overline{P} = \overline{Z}_N dP^*$. Dalle notazioni introdotte si ottiene che si può riscrivere la (3.4) in termini della misura di probabilità P^* e di $\overline{Z}_\tau$, cioè

$$Y_n^{(A)} = \operatorname*{ess\,sup}_{\overline{Z} \in \mathcal{Z}_n^N, \tau \in \mathcal{M}_n^N} \mathbb{E}^*(f_\tau \overline{Z}_\tau | \mathcal{F}_n)$$

dove $\mathcal{Z}_n^N$ è l'insieme delle $(P^*, \mathcal{F}_n)$-martingale positive $\overline{Z} = (\overline{Z}_k)_{k \leqslant N}$ tali che $\overline{Z}_0 = ... = \overline{Z}_n = 1$.

Si noti che se $k \leqslant N$ si hanno le relazioni

$$\mathcal{M}_k^N \subseteq \mathcal{M}_{k-1}^N \qquad \text{e} \qquad \mathcal{Z}_k^N \subseteq \mathcal{Z}_{k-1}^N$$

le quali giocano un ruolo importante nella dimostrazione della proprietà di supermartingala della successione $Y^{(A)} = (Y_n^{(A)})_{n \leqslant N}$.

Dalla Definizione 2.3.3 di estremo superiore essenziale segue che esiste una successione di tempi $\tau^{(i)}$ e una successione di martingale $\overline{Z}^{(i)}$ appartenenti, rispettivamente, alle classi $\mathcal{M}_k^N$ e $\mathcal{Z}_k^N$ tali che

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\overline{Z} \in \mathcal{Z}_k^N, \tau \in \mathcal{M}_k^N} \mathbb{E}^*(f_\tau \overline{Z}_\tau | \mathcal{F}_k) = \lim_{i \to \infty} \uparrow \mathbb{E}^*(f_{\tau^{(i)}} \overline{Z}_{\tau^{(i)}}^{(i)} | \mathcal{F}_k).$$

Quindi dalla relazione precedente, dalla proprietà dei condizionamenti successivi e dal teorema di convergenza monotona si ottiene la seguente serie di uguaglianze

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^*(Y_k^{(A)} | \mathcal{F}_{k-1}) &= \mathbb{E}^* \left(\operatorname*{ess\,sup}_{\overline{Z} \in \mathcal{Z}_k^N, \tau \in \mathcal{M}_k^N} \mathbb{E}^*(f_\tau \overline{Z}_\tau | \mathcal{F}_k) \middle| \mathcal{F}_{k-1} \right) \\
&= \mathbb{E}^* \left(\lim_{i \to \infty} \uparrow \mathbb{E}^*(f_{\tau^{(i)}} \overline{Z}_{\tau^{(i)}}^{(i)} | \mathcal{F}_k) \middle| \mathcal{F}_{k-1} \right) \\
&= \lim_{i \to \infty} \uparrow \mathbb{E}^*(f_{\tau^{(i)}} \overline{Z}_{\tau^{(i)}}^{(i)} | \mathcal{F}_{k-1}) \\
&= \operatorname*{ess\,sup}_{\overline{Z} \in \mathcal{Z}_k^N, \tau \in \mathcal{M}_k^N} \mathbb{E}^*(f_\tau \overline{Z}_\tau | \mathcal{F}_{k-1}),
\end{aligned}$$

infine considerando l'estremo superiore su una classe più grande si ha la disuguaglianza

$$\mathbb{E}^*(Y_k^{(A)} | \mathcal{F}_{k-1}) \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\overline{Z} \in \mathcal{Z}_{k-1}^N, \tau \in \mathcal{M}_{k-1}^N} \mathbb{E}^*(f_\tau \overline{Z}_\tau | \mathcal{F}_{k-1}) = Y_{k-1}^{(A)}$$

ovvero la proprietà di supermartingala cercata. □

Osservazione 3.2.1. Prese due misure equivalenti $P_n \sim \widetilde{P}_n$ e una variabile aleatoria X limitata (o uniformemente integrabile) $\mathcal{F}_n$-misurabile, allora per ogni $k \leqslant n$ si ha la seguente relazione detta *formula di Bayes*

$$\widetilde{\mathbb{E}}(X|\mathcal{F}_k) = \frac{1}{Z_k}\mathbb{E}(XZ_n|\mathcal{F}_k) \qquad (\widetilde{P} \text{ q.o}). \tag{3.5}$$

dove $Z_n = \frac{d\widetilde{P}_n}{dP_n}$.

In realtà questa formula è conseguenza di un risultato più generale dovuto a Kallianpur e a Striebel, ovvero: si considerino due σ-algebre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ tali che $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ e due misure equivalenti $P \sim \widetilde{P}$, se si definisce $Z = \frac{d\widetilde{P}}{dP}$ allora per ogni variabile aleatoria X $\mathcal{F}$-misurabile si ha

$$\widetilde{\mathbb{E}}(X|\mathcal{G}) = \frac{\mathbb{E}(XZ|\mathcal{G})}{\mathbb{E}(Z|\mathcal{G})} \qquad (\widetilde{P} \text{ q.o.}). \tag{3.6}$$

Dimostrare quest'ultima relazione equivale a verificare che per ogni $A \in \mathcal{G}$

$$\mathbb{E}(\widetilde{\mathbb{E}}(X|\mathcal{G})\mathbb{E}(Z|\mathcal{G})\mathbb{I}_A) = \mathbb{E}(XZ\mathbb{I}_A),$$

ciò è ovvio, infatti essendo $\mathbb{E}(Z|\mathcal{G}) = \frac{d\widetilde{P}}{dP}\Big|_{\mathcal{G}}$ si ha

$$\mathbb{E}(\widetilde{\mathbb{E}}(X|\mathcal{G})\mathbb{E}(Z|\mathcal{G})\mathbb{I}_A) = \mathbb{E}\left(\widetilde{\mathbb{E}}(X|\mathcal{G})\frac{d\widetilde{P}}{dP}\Big|_{\mathcal{G}}\mathbb{I}_A\right) = \widetilde{\mathbb{E}}(\widetilde{\mathbb{E}}(X|\mathcal{G})\mathbb{I}_A)$$

e tenendo conto della $\mathcal{G}$-misurabilità della $\mathbb{I}_A$ e della definizione di Z segue rispettivamente

$$\widetilde{\mathbb{E}}(\widetilde{\mathbb{E}}(X|\mathcal{G})\mathbb{I}_A) = \widetilde{\mathbb{E}}(X\mathbb{I}_A) = \mathbb{E}(XZ\mathbb{I}_A)$$

cioè l'uguaglianza cercata.

Dalle precedenti considerazioni si evince che per ottenere la formula di Bayes basta porre $\mathcal{F} = \mathcal{F}_n$, $\mathcal{G} = \mathcal{F}_k$ con $k \leqslant n$, $Z = Z_n$ ed esplicitare la condizione di martingala della successione Z_n, cioè $\mathbb{E}(Z_n|\mathcal{F}_k) = Z_k$.

3.2.1 Formule fondamentali

Partendo dalla formula (2.19) relativa al prezzo di copertura Europeo in un mercato incompleto si può determinare quella relativa al caso di copertura Americano.

Si è già detto che nello studio di opzioni di tipo Americano si considera al posto di una singola funzione di pay-off f_N un'intero sistema di funzioni $f_0^N = (f_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ che può essere interpretato come segue: se il compratore esercita l'opzione al tempo n allora gli corrisponde un ammontare (pagabile dal venditore) descritto da una funzione f_n $\mathcal{F}_n$-misurabile. Come fatto osservare nella trattazione dei prezzi di copertura Europei il venditore assume un atteggiamento razionale, ovvero sceglie solo le strategie π di valore $X^\pi = (X_n^\pi)_{n \leqslant N}$ che soddisfano la condizione di copertura

$$X_\tau^\pi \geqslant f_\tau \qquad (P \text{ q.o.})$$

in modo da onorare i termini del contratto per ogni tempo di arresto $\tau = \tau(\omega)$ che può essere scelto, dal compratore dell'opzione, come tempo di esercizio del contratto.

Per avere una precisa formulazione del problema si introducono delle definizioni rigorose.

Si ponga

$$\mathcal{M}_n^N = \{\tau = \tau(\omega) : \ n \leqslant \tau(\omega) \leqslant N, \quad \omega \in \Omega\}.$$

Definizione 3.2.1. Il *prezzo di una copertura superiore Americana* rispetto a un sistema $f_0^N = (f_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ di funzioni di pagamento f_n $\mathcal{F}_n$-misurabili è la quantità

$$\overline{C}(f_0^N; P) = \inf\{x: \quad \exists \quad (\pi, C) \quad X_0^{\pi,C} = x \quad \text{e}$$
$$X_\tau^{\pi,C} \geqslant f_\tau \quad (P \text{ q.o.}) \quad \forall\, \tau \in \mathcal{M}_0^N\}. \tag{3.7}$$

Si osservi che la definizione precedente considera strategie con consumo è per questo motivo che esiste un'analogia tra il caso di copertura Europea in un mercato incompleto e il caso Americano.

Definizione 3.2.2. La strategia (π, C) si dice *perfetta* se:

$$X_n^{\pi,C} \geqslant f_n \quad \forall\, n \leqslant N \quad \text{e} \quad X_N^{\pi,C} = f_N \quad P \text{ q.o.}.$$

Teorema 3.2.2. Formula fondamentale per il prezzo di copertura di un'opzione di tipo Americano

Sia $\mathcal{P}(P) \neq \emptyset$ e sia $f_0^N = (f_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ una successione di funzioni di pagamento non negative tali che

$$\sup_{\widetilde{P} \in \mathcal{P}(P)} \widetilde{\mathbb{E}} \frac{f_n}{B_n} < \infty \qquad n \leqslant N. \tag{3.8}$$

Allora il prezzo di una copertura superiore Americana è

$$\overline{C}(f_0^N; P) = B_0 \sup_{\widetilde{P} \in \mathcal{P}(P), \tau \in \mathcal{M}_0^N} \widetilde{\mathbb{E}} \frac{f_\tau}{B_\tau}. \tag{3.9}$$

Dimostrazione. Come nel caso della dimostrazione del Teorema 2.3.1 si procede dimostrando le due disuguaglianze opposte da cui segue l'uguaglianza.

(A) Si inizi col dimostrare che $\overline{C}(f_0^N; P)$ è maggiore o uguale dell'estremo superiore considerato; se l'insieme delle coperture è vuoto allora ciò è ovvio poichè dalla (3.7) segue che $\overline{C}(f_0^N; P) = \infty$. Si assuma che (π, C) sia una strategia di copertura con consumo tale che $X_0^{\pi,C} = x < \infty$, si ha allora

$$0 \leqslant \frac{f_\tau}{B_\tau} \leqslant \frac{X_\tau^{\pi,C}}{B_\tau} = \frac{X_0^{\pi,C}}{B_0} + \sum_{k=1}^{\tau} \gamma_k \Delta \left(\frac{S_k}{B_k} \right) - \sum_{k=1}^{\tau} \frac{\Delta C_k}{B_{k-1}}$$
$$\leqslant \frac{x}{B_0} + \sum_{k=1}^{\tau} \gamma_k \Delta \left(\frac{S_k}{B_k} \right), \tag{3.10}$$

per ogni $\tau \in \mathcal{M}_0^N$, in particolare se $\tau = N$

$$\sum_{k=1}^{N} \gamma_k \Delta \left(\frac{S_k}{B_k} \right) \geqslant -\frac{x}{B_0}.$$

Quindi dall'asserzione 2) del Lemma 1.4.4 segue che

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \gamma_k \Delta \left(\frac{S_k}{B_k} \right) \right)_{n \leqslant N}$$

è una martingala rispetto ogni misura $\widetilde{P} \in \mathcal{P}(P)$ per cui si ha

$$\sup_{\widetilde{P} \in \mathcal{P}(P)} \widetilde{\mathbb{E}} \frac{f_\tau}{B_\tau} \leqslant \frac{x}{B_0}$$

questa disuguaglianza è vera per ogni scelta di $\tau \in \mathcal{M}_0^N$ e quindi anche per l'estremo superiore, da questa considerazione si ottiene la disuguaglianza cercata.

(B) La dimostrazione della disuguaglianza opposta è più complicata in quanto occorre trovare una strategia $\overline{\pi} = (\overline{\beta}, \overline{\gamma})$ e un processo di consumo $\overline{C}$ tali che il capitale $X^{\overline{\pi},\overline{C}}$ soddisfa le seguenti condizioni:

- $\Delta X_n^{\overline{\pi},\overline{C}} = \overline{\beta}_n \Delta B_n + \overline{\gamma}_n \Delta S_n - \Delta \overline{C}_n \quad n \leqslant N$ (*condizione di bilancio*);
- $X_0^{\overline{\pi},\overline{C}} = \sup_{\widetilde{P} \in \mathcal{P}(P), \tau \in \mathcal{M}_0^N} B_0 \, \widetilde{\mathbb{E}} \frac{f_\tau}{B_\tau}$;

- $X_\tau^{\overline{\pi},\overline{C}} \geqslant f_\tau$ (P q.o.) $\quad \forall \tau \in \mathcal{M}_0^N$.

Per risolvere questo problema si considera una successione $\overline{Y} = (\overline{Y}_n)_{n\leqslant N}$ definita come

$$\overline{Y}_n = \operatorname*{ess\,sup}_{\widetilde{P}\in\mathcal{P}(P),\tau\in\mathcal{M}_n^N} \widetilde{\mathbb{E}}\left(\frac{f_\tau}{B_\tau}\middle|\mathcal{F}_n\right). \tag{3.11}$$

Tenendo presente che $\frac{f_n}{B_n}$ è il pay-off nel mercato scontato, il Teorema 3.2.1 permette di asserire che $\overline{Y}$ è una supermartingala rispetto ogni misura $\widetilde{P} \in \mathcal{P}(P)$ e inoltre, per il Teorema 2.3.3 di decomposizione opzionale, la successione ammette la seguente rappresentazione:

$$\overline{Y}_n = \overline{Y}_0 + \sum_{k=1}^{n} \overline{\gamma}_k \Delta\left(\frac{S_k}{B_k}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta\overline{C}_k}{B_{k-1}}, \tag{3.12}$$

dove $\overline{\gamma} = (\overline{\gamma}_n)_{n\leqslant N}$ è un processo predicibile non negativo e la successione $\overline{C} = (\overline{C}_n)_{n\leqslant N}$ è non decrescente e tale che $\overline{C}_0 = 0$ e le $\overline{C}_n$ sono $\mathcal{F}_n$-misurabili. Prendendo $\overline{\gamma}$ e $\overline{C}$ della decomposizione si definisce $\overline{\beta} = (\overline{\beta}_n)_{n\leqslant N}$ ponendo

$$\overline{\beta}_n = \overline{Y}_n - \overline{\gamma}_n \frac{S_n}{B_n}.$$

Il valore della strategia $(\overline{\pi}, \overline{C})$ risulta pari a

$$X_n^{\overline{\pi},\overline{C}} = \overline{\beta}_n B_n + \overline{\gamma}_n S_n = \overline{Y}_n B_n, \tag{3.13}$$

e la condizione di bilancio in virtù della (3.12) è soddisfatta. Inoltre considerando la (3.11) e la (3.13) si ottiene che il capitale può essere rappresentato come

$$X_n^{\overline{\pi},\overline{C}} = B_n \operatorname*{ess\,sup}_{\widetilde{P}\in\mathcal{P}(P),\tau\in\mathcal{M}_n^N} \widetilde{\mathbb{E}}\left(\frac{f_\tau}{B_\tau}\middle|\mathcal{F}_n\right), \tag{3.14}$$

la strategia mostrata soddisfa dunque le condizioni cercate e inoltre gode della proprietà di replicabilità, cioè $X_N^{\overline{\pi},\overline{C}} = f_N$ (P q.o.). $\square$

Dai risultati ottenuti nel corso della dimostrazione e ipotizzando inoltre l'unicità della misura martingala $\widetilde{P}$ si giunge al teorema seguente

Teorema 3.2.3. *Sia $|\mathcal{P}(P)| = 1$ e sia $f_0^N = (f_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ una successione di funzioni di pay-off non negative tali che $\widetilde{\mathbb{E}} \frac{f_n}{B_n} < \infty$, $n \leqslant N$. Allora*

1. *Il prezzo superiore è*

$$\overline{C}(f_0^N; P) = B_0 \sup_{\tau \in \mathcal{M}_0^N} \widetilde{\mathbb{E}} \frac{f_\tau}{B_\tau}. \tag{3.15}$$

2. *Esiste una strategia autofinanziante $(\overline{\pi}, \overline{C})$ tale che il capitale corrispondente $X^{\overline{\pi}, \overline{C}}$ soddisfa le condizioni:*

$$\Delta X_n^{\overline{\pi}, \overline{C}} = \overline{\beta}_n \Delta B_n + \overline{\gamma}_n \Delta S_n - \Delta \overline{C}_n;$$
$$X_0^{\overline{\pi}, \overline{C}} = B_0 \sup_{\tau \in \mathcal{M}_0^N} \widetilde{\mathbb{E}} \frac{f_\tau}{B_\tau} \quad \left(= \overline{C}(f_0^N; P)\right);$$
$$X_\tau^{\overline{\pi}, \overline{C}} \geqslant f_\tau \quad (P \text{ q.o.}), \qquad \forall\, \tau \in \mathcal{M}_0^N.$$

La dinamica $X_n^{\overline{\pi}, \overline{C}}$ è descritta dalla formula

$$X_n^{\overline{\pi}, \overline{C}} = B_n \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{M}_n^N} \widetilde{\mathbb{E}} \left(\frac{f_\tau}{B_\tau} \middle| \mathcal{F}_n \right). \tag{3.16}$$

3. *Le componenti $\overline{\gamma} = (\overline{\gamma}_n)_{n \leqslant N}$ e $\overline{C} = (\overline{C}_n)_{n \leqslant N}$ possono essere determinate tramite la decomposizione di Doob della $(\widetilde{P}, \mathcal{F}_n)$-supermartingala $\overline{Y} = (\overline{Y}_n)_{n \leqslant N}$ definita come*

$$\overline{Y}_n := \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{M}_n^N} \widetilde{\mathbb{E}} \left(\frac{f_\tau}{B_\tau} \middle| \mathcal{F}_n \right). \tag{3.17}$$

La decomposizione presenta, quindi, la seguente forma

$$\overline{Y}_n = \overline{Y}_0 + \sum_{k=1}^{n} \overline{\gamma}_k \Delta \left(\frac{S_k}{B_k} \right) - \overline{C}_n, \tag{3.18}$$

con le $\overline{\gamma}_n$ predicibili.

Le componenti $\overline{\beta} = (\overline{\beta})_{n \leqslant N}$ sono definite dalla relazione

$$\overline{\beta}_n = \overline{Y}_n - \overline{\gamma}_n \frac{S_n}{B_n}. \tag{3.19}$$

4. *Il problema di determinare il tempo di arresto ottimale per il $\sup_{\tau \in \mathcal{M}_0^N} \widetilde{\mathbb{E}} \frac{f_\tau}{B_\tau}$ equivale a determinare $\overline{\tau}$ per cui*

$$\overline{\tau} = \min\{0 \leqslant n \leqslant N : \quad \overline{Y}_n = \frac{f_n}{B_n}\}$$

e

$$\sup_{\tau \in \mathcal{M}_0^N} \widetilde{\mathbb{E}} \frac{f_\tau}{B_\tau} = \widetilde{\mathbb{E}} \frac{f_{\overline{\tau}}}{B_{\overline{\tau}}}. \tag{3.20}$$

Inoltre si ha che

$$X_{\overline{\tau}}^{\overline{\pi}, \overline{C}} = f_{\overline{\tau}} \quad (P \ q.o.) \tag{3.21}$$

e che la successione $\overline{Y} = (\overline{Y}_n)_{n \leqslant N}$ è la più piccola $(\widetilde{P}, \mathcal{F}_n)$-supermartingala tale che $Y_n \geqslant f_n \quad \forall \, n \leqslant N$.

Dimostrazione. Le asserzioni 1., 2. e 3., come risulta ovvio, sono diretta conseguenza del Teorema 3.2.2 e di quanto visto nella sua dimostrazione; si deve osservare solo che, poiché la misura martingala è unica, non occorre considerare la decomposizione opzionale, è sufficiente usare direttamente la decomposizione di Doob (si vedano i Teoremi 2.3.2 e 2.3.3).
L'asserzione 4. è un caso speciale dei Corollari 3.1.2 e 3.1.3 relativi al Teorema 3.1.1. □

Dati questi strumenti teorici, si procede trattando praticamente il problema di quale sia, giudicando in base alle informazioni contenute nel flusso $(\mathcal{F}_n)$, per il compratore dell'opzione, un tempo di esercizio τ ragionevole (cioè un tempo che non dia opportunità di arbitraggio al venditore).

Si pone come ipotesi iniziale che il prezzo dell'opzione $\overline{C}(f_0^N; P)$ definito dalla (3.15) venga accettato sia dal venditore che dal compratore. Si consideri, ora, la classe di tutte le strategie $(\widetilde{\pi}, \widetilde{C})$ con capitale iniziale $X_0^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} = \overline{C}(f_0^N; P)$ che permettono di ottenere una copertura, cioè

$$\widetilde{H}(f_0^N; P) = \{(\widetilde{\pi}, \widetilde{C}) : \; X_0^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} = \overline{C}(f_0^N; P) \quad \text{e} \quad X_n^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} \geqslant f_n \quad \forall\, n \leqslant N\}.$$

Questa classe contiene una strategia $(\overline{\pi}, \overline{C})$ di valore *minimo*, ovvero una strategia tale che

$$f_n \leqslant X_n^{\overline{\pi},\overline{C}} \leqslant X_n^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} \quad n \leqslant N, \quad \forall\, (\widetilde{\pi}, \widetilde{C}) \in \widetilde{H}(f_0^N; P). \tag{3.22}$$

Infatti dalla condizione di bilancio segue che $\left(\frac{X_n^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}}}{B_n}\right)_{n \leqslant N}$ è una $(\widetilde{P}, \mathcal{F}_n)$-supermartingala maggiore o uguale a $\frac{f_n}{B_n}$ per $n \leqslant N$, mentre per l'asserzione 4. del Teorema 3.2.3 la successione $\overline{Y} = (\overline{Y}_n)_{n \leqslant N}$ è la più piccola $(\widetilde{P}, \mathcal{F}_n)$-supermartingala maggiore o uguale a $\frac{f_n}{B_n}$ per $n \leqslant N$. Quindi $\overline{Y}_n \leqslant \frac{X_n^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}}}{B_n}$ per $n \leqslant N$ che insieme con la relazione

$$\frac{f_n}{B_n} \leqslant \overline{Y}_n = \frac{X_n^{\overline{\pi},\overline{C}}}{B_n}$$

prova la (3.22).

L'esistenza di una strategia di valore minimo mostra che per ogni tempo di arresto τ si ha

$$f_\tau \leqslant X_\tau^{\overline{\pi},\overline{C}} \leqslant X_\tau^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}}.$$

Chiaramente il compratore deve scegliere τ in modo tale che per strategie $(\widetilde{\pi}, \widetilde{C}) \in \widetilde{H}(f_0^N; P)$ il venditore non ottenga profitti $(X_\tau^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} - f_\tau)$ maggiori di 0 con probabilità positiva. In altre parole il compratore deve considerare solo quei tempi di arresto τ tali che

$$X_\tau^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} = f_\tau \qquad (P \text{ q.o.}), \qquad \forall\, (\widetilde{\pi},\widetilde{C}) \in \widetilde{H}(f_0^N;P). \tag{3.23}$$

Quanto illustrato permette di giustificare la seguente definizione

Definizione 3.2.3. I tempi di arresto τ che soddisfano la condizione (3.23) sono detti *tempi di esercizio razionali.*

Teorema 3.2.4. *Ogni tempo di arresto τ^* che soddisfa la relazione*

$$\widetilde{\mathbb{E}}\frac{f_{\tau^*}}{B_{\tau^*}} = \sup_{\tau\in\mathcal{M}_0^N} \widetilde{\mathbb{E}}\frac{f_\tau}{B_\tau}$$

è un tempo di esercizio razionale.

N.B. Dalla (3.20) segue quindi che il tempo di arresto ottimale $\overline{\tau}$ del Teorema 3.2.3 è razionale.

Dimostrazione. Sia $(\widetilde{\pi},\widetilde{C}) \in \widetilde{H}(f_0^N;P)$. Allora, considerando la proprietà di $(\widetilde{P},\mathcal{F}_n)$-supermartingala della successione $\left(\frac{X_n^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}}}{B_n}\right)_{n\leqslant N}$, si vede che

$$\begin{aligned}\overline{C}(f_0^N;P) &= X_0^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} \geqslant B_0\,\widetilde{\mathbb{E}}\frac{X_{\tau^*}^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}}}{B_{\tau^*}} \geqslant B_0\,\widetilde{\mathbb{E}}\frac{f_{\tau^*}}{B_{\tau^*}}\\ &= B_0 \sup_{\tau\in\mathcal{M}_0^N} \widetilde{\mathbb{E}}\frac{f_\tau}{B_\tau} = \overline{C}(f_0^N;P).\end{aligned}$$

Quindi si ottiene

$$\widetilde{\mathbb{E}}\frac{X_{\tau^*}^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}}}{B_{\tau^*}} = \widetilde{\mathbb{E}}\frac{f_{\tau^*}}{B_{\tau^*}},$$

alla luce di tale risultato e dalla proprietà $X_{\tau^*}^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} \geqslant f_{\tau^*}$ segue $X_{\tau^*}^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} = f_{\tau^*}$ (P q.o.), cioè, τ^* è un tempo razionale. □

Osservazione 3.2.2. Risulta interessante notare che risolvere il problema di determinare il tempo di arresto ottimale è strettamente connesso con il valore del prezzo razionale dell'opzione; ovvero i valori di $\overline{C}(f_0^N; P)$ e del tempo razionale $\overline{\tau}$ non possono essere individuati separatamente, ma vengono determinati solo in *tandem* tramite la soluzione della (3.20).

Capitolo 4

Il modello di Cox Ross Rubinstein *(CRR-model)*

In questo capitolo si vuole illustrare l'*applicazione* di alcuni risultati teorici trattati, ovvero considerando un modello del quale si conoscono le caratteristiche peculiari si vogliono trarre delle conclusioni in merito al mercato su cui esso opera (arbitrage-free, completo, incompleto) e ai prezzi di copertura per opzioni Europee.

4.1 Caratteristiche del modello

Il modello che si andrà a considerare è il *Cox Ross Rubinstein* (CRR-*model*) detto anche *modello binomiale multiperiodale*: si prende un mercato (B,S) che risulta formato da due operazioni finanziarie:

1. un conto bancario $B = (B_n)$

2. un'azione $S = (S_n)$

per le quali si ha (ricordando le formule (1.1) e (1.2))

$$\triangle B_n = r_n B_{n-1};$$

$$\triangle S_n = \rho_n S_{n-1}.$$

Si ipotizza che il tasso di interesse sia costante $r_n = r$ e che la successione di variabili aleatorie indipendenti $\rho = (\rho_n)$ possa prendere solo due valori a e b tali che

$$-1 < a < r < b. \tag{4.1}$$

Inoltre si assume che la successione $\rho = (\rho_n)$ definita sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}, P)$ sia $\mathcal{F}_n$-misurabile per ogni n e abbia la proprietà:

$$P(\rho_n = b) = p \qquad \text{e} \qquad P(\rho_n = a) = q \tag{4.2}$$

con $p + q = 1$ e $0 < p < 1$.

Si può osservare che tutta l'aleatorietà del modello risulta data dalle variabili ρ_n, quindi si può assumere come spazio dei risultati elementari lo spazio $\Omega = \Omega_n = \{a,b\}^N$ di successioni finite $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ tali che $x_n = a$ o $x_n = b$ con $n \leqslant N$. Allora $\rho_n(x) = x_n$ e la misura di probabilità P_N sui corrispondenti insiemi di Borel risulta completamente definita dalle distribuzioni finito dimensionali P_n dove $n \leqslant N$: se $\nu_b(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_b(x_i)$ è il numero di componenti $x_i = b$ per $i \leqslant n$ allora

$$P_n(x_1, \dots, x_n) = p^{\nu_b}(x_1, \dots, x_n) q^{n-\nu_b}(x_1, \dots, x_n). \tag{4.3}$$

Da tale considerazione segue che P_n è uguale a un prodotto diretto di n misure di tipo Q dove con Q si indica la misura caratterizzata da $Q(\{b\}) = p$

e $Q(\{a\}) = q$.

Nei prossimi paragrafi si mostrerà che il modello CRR è arbitrage-free e completo per i Teoremi *APT1* e *APT2* (si vedano i Teoremi 1.4.1 e 1.4.2) ciò significa, rispettivamente, che per ogni $n \geqslant 1$ esiste ed è unica la misura martingala $\widetilde{P}_n$ equivalente a P_n, si otterrà che $\widetilde{P}_n$ presenta la seguente struttura:

$$\widetilde{P}_n(x_1, \ldots, x_n) = \widetilde{p}^{\,\nu_b}(x_1, \ldots, x_n)\, \widetilde{q}^{\,n-\nu_b}(x_1, \ldots, x_n) \tag{4.4}$$

dove

$$\widetilde{p} = \frac{r-a}{b-a} \qquad \text{e} \qquad \widetilde{q} = \frac{b-r}{b-a}. \tag{4.5}$$

Si può osservare che dalla (4.4) segue che anche $\widetilde{P}_n$, così come P_n, presenta la struttura di un prodotto diretto di misure $\widetilde{Q}$ dove $\widetilde{Q}(\{b\}) = \widetilde{p}$ e $\widetilde{Q}(\{a\}) = \widetilde{q}$.

4.1.1 CRR è arbitrage-free e completo

Definita la struttura del modello si vuole dimostrare che il mercato su cui opera è senza opportunità di arbitraggio. Per realizzare tale scopo, come ricordato sopra, basta dimostrare l'esistenza di una misura di probabilità equivalente alla misura di probabilità definita dalla (4.3) rispetto alla quale la successione $\widetilde{S}_n = \frac{S_n}{B_n}$ è una martingala.

Si ricorda che per la Definizione 1.4.1 $\widetilde{S}_n$ è una $(\widetilde{P}, \mathcal{F}_n)$-martingala se risulta integrabile e gode della proprietà $\widetilde{\mathbb{E}}(\widetilde{S}_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \widetilde{S}_{n-1}$.

L'integrabilità in questo caso non comporta alcun problema poiché $\frac{S_n}{B_n}$ assume un numero finito di valori e in particolare risulta uniformemente limitata, infatti

$$\frac{S_n}{B_n} \leqslant \frac{S_0}{B_0} \left(\frac{1+b}{1+r} \right)^n .$$

Inoltre essendo in generale:

$$\frac{S_n}{B_n} = \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}} \frac{1+\rho_n}{1+r_n} \tag{4.6}$$

e considerata la $\mathcal{F}_{n-1}$-misurabilità di $\widetilde{S}_{n-1}$ e di $1 + r_n$ risulta chiaro che la proprietà di martingala diviene

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbb{E}}\left(\frac{S_n}{B_n}\Big|\mathcal{F}_{n-1}\right) = \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}} \quad &\Leftrightarrow \quad \widetilde{\mathbb{E}}\left(\frac{1+\rho_n}{1+r_n}\Big|\mathcal{F}_{n-1}\right) = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \widetilde{\mathbb{E}}\left(\rho_n|\mathcal{F}_{n-1}\right) = r_n \\
&\Rightarrow \quad \widetilde{\mathbb{E}}(\rho_n) = \widetilde{\mathbb{E}}(r_n).
\end{aligned}$$

Quindi nel caso considerato in cui r_n è costantemente uguale a r si ottengono le seguenti identità

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left(\rho_n|\mathcal{F}_{n-1}\right) = r \tag{4.7}$$

$$\widetilde{\mathbb{E}}(\rho_n) = r. \tag{4.8}$$

Si osservi che la (4.7) e la (4.8) unite all'ipotesi fondamentale che le ρ_n possano assumere solo i due valori a e b, implicano

$$\widetilde{P}(\rho_n = b|\mathcal{F}_{n-1}) = \widetilde{P}(\rho_n = b) = \widetilde{p} = \tfrac{r-a}{b-a} \tag{4.9}$$

$$\widetilde{P}(\rho_n = a|\mathcal{F}_{n-1}) = \widetilde{P}(\rho_n = a) = \widetilde{q} = \tfrac{b-r}{b-a}. \tag{4.10}$$

Un modo più elegante per pervenire a questo stesso risultato e verificare l'indipendenza delle ρ_n si ottiene illustrando la costruzione di $\widetilde{P}$.

Dalle premesse fatte si evince che si può costruire la misura $\widetilde{P} \sim P$ attraverso dei passi ben precisi: si prende $P_n = P_N|_{\mathcal{F}_n}$, dove $\mathcal{F}_n =$

$\sigma(\rho_1, \ldots, \rho_n)$, si considera una $(P, \mathcal{F}_n)$-martingala Z_n di media 1 e si definiscono $\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2, \ldots, \widetilde{P}_N$ tramite la formula

$$\widetilde{P}_n(x_1, \ldots, x_n) = Z_n(x_1, \ldots, x_n) P_n(x_1, \ldots, x_n),$$

quindi, dalla formula di Bayes (si veda la (3.5)), segue che la condizione (4.7) può essere espressa come

$$\mathbb{E}_n \left(\rho_n \frac{Z_n}{Z_{n-1}} \middle| \mathcal{F}_{n-1} \right) = r. \tag{4.11}$$

Per $n = 1$, tenendo conto che $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, che $Z_0 = 1$ e considerando la relazione (4.11) risulta

$$p\, b Z_1(b) + q\, a Z_1(a) = r, \tag{4.12}$$

tale equazione unita alla condizione di normalizzazione

$$p Z_1(b) + q Z_1(a) = 1, \tag{4.13}$$

permette di ottenere

$$Z_1(b) = \frac{r-a}{b-a}\frac{1}{p} \qquad \text{e} \qquad Z_1(a) = \frac{b-r}{b-a}\frac{1}{q}.$$

Ponendo

$$\widetilde{p} = \frac{r-a}{b-a} \qquad \text{e} \qquad \widetilde{q} = \frac{b-r}{b-a}$$

si arriva all'identità

$$\widetilde{P}_1(b) = Z_1(b) P_1(b) = \widetilde{p}$$
$$\widetilde{P}_1(a) = Z_1(a) P_1(a) = \widetilde{q}.$$

Si osservi che $\widetilde{p} + \widetilde{q} = 1$ e che, per la (4.1), $\widetilde{p}, \widetilde{q} > 0$ da cui segue $\widetilde{P}_1$ è una probabilità equivalente a P_1. Per determinare $\widetilde{P}_2$ si usa nuovamente la (4.11) e l'indipendenza tra ρ_1 e ρ_2 rispetto a P_2 arrivando al seguente risultato

$$p\, b \frac{Z_2(b,b)}{Z_1(b)} + q\, a \frac{Z_2(b,a)}{Z_1(b)} = r, \tag{4.14}$$

una condizione ulteriore sui valori di $Z_2(b,b)$ e $Z_2(b,a)$ è dovuta alla proprietà di martingala di Z_n

$$\mathbb{E}_2(Z_2(\rho_1,\rho_2)|\rho_1 = b) = Z_1(b),$$

che conduce all'uguaglianza

$$b \frac{Z_2(b,b)}{Z_1(b)} + q \frac{Z_2(b,a)}{Z_1(b)} = 1, \tag{4.15}$$

confrontando la (4.14) e la (4.15) rispettivamente con la (4.12) e la (4.13) si vede che

$$\frac{Z_2(b,b)}{Z_1(b)} = \frac{r-a}{b-a}\frac{1}{p} = \frac{\widetilde{p}}{p} \qquad \text{e} \qquad \frac{Z_2(b,a)}{Z_1(b)} = \frac{b-r}{b-a}\frac{1}{q} = \frac{\widetilde{q}}{q}.$$

In modo del tutto simile si può ottenere

$$\frac{Z_2(a,b)}{Z_1(a)} = \frac{\widetilde{p}}{p} \qquad \text{e} \qquad \frac{Z_2(a,a)}{Z_1(a)} = \frac{\widetilde{q}}{q};$$

quindi

$$\widetilde{P}_2(a,a) = Z_2(a,a)q^2 = Z_1(a)\frac{\widetilde{q}}{q}\, q^2 = \widetilde{q}^{\,2}$$

e analogamente

$$\widetilde{P}_2(a,b) = \widetilde{q}\,\widetilde{p}, \qquad \widetilde{P}_2(b,a) = \widetilde{p}\,\widetilde{q}, \qquad \widetilde{P}_2(b,b) = \widetilde{p}^{\,2}.$$

Le variabili aleatorie ρ_1, ρ_2 risultano, dunque, i.i.d. rispetto la misura $\widetilde{P}_2$; inoltre $\widetilde{P}_2(\rho_i = b) = \widetilde{p}$ e $\widetilde{P}_2(\rho_i = a) = \widetilde{q}$ per $i = 1, 2$.

L'ultimo passo per costruire una misura martingala $\widetilde{P} \sim P$ consiste nell'iterare il procedimento descritto per le misure $\widetilde{P}_3, \dots, \widetilde{P}_N$ ottenendo così le $\widetilde{P}_n$ definite dalla formula (4.4) e infine ponendo $\widetilde{P} = \widetilde{P}_N$. Segue che *il modello CRR è un mercato privo di opportunità di arbitraggio*; analizzando i passi che conducono alla costruzione di $\widetilde{P}$ si evince che quest'ultima è l'*unica* misura martingala equivalente da ciò discende la *completezza*.

4.1.2 S-rappresentabilità

Nel Lemma 1.5.1 viene stabilita l'equivalenza tra la proprietà di completezza e la S-rappresentabilità, è interessante osservare che in questo caso è proprio l'unicità della misura martingala a permettere la S-rappresentazione delle martingale limitate e quindi la completezza.
N.B. Si giunge così, per il modello in questione, a una dimostrazione diretta della necessità del teorema *APT2*.
Sia $X = (X_n)_{n \geqslant 0}$ una $(\widetilde{P}, \mathcal{F}_n)$-martingala e siano le $g_n = g_n(x_1, \dots, x_n)$ funzioni tali che

$$X_n(\omega) = g_n(\rho_1(\omega), \dots, \rho_n(\omega)),$$

ovvero

$$\Delta X_n(\omega) = g_n(\rho_1(\omega), \dots, \rho_n(\omega)) - g_{n-1}(\rho_1(\omega), \dots, \rho_{n-1}(\omega)).$$

Poichè $\widetilde{\mathbb{E}}(\Delta X_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 0$ e le ρ_n sono i.i.d. segue che

$$\begin{aligned} \widetilde{p}\, g_n(\rho_1(\omega), \dots, \rho_{n-1}(\omega), b) + \widetilde{q}\, g_n(\rho_1(\omega), \dots, \rho_{n-1}(\omega), a) \\ = g_{n-1}(\rho_1(\omega), \dots, \rho_{n-1}(\omega)) \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}
&\frac{g_n(\rho_1(\omega),\ldots,\rho_{n-1}(\omega),b)-g_{n-1}(\rho_1(\omega),\ldots,\rho_{n-1}(\omega))}{\widetilde{q}}\\
&=\frac{g_{n-1}(\rho_1(\omega),\ldots,\rho_{n-1}(\omega))-g_n(\rho_1(\omega),\ldots,\rho_{n-1}(\omega),a)}{\widetilde{p}}.
\end{aligned}$$

In virtù della (4.5) si definisce

$$\begin{aligned}
\gamma'_n(\omega) &:= \frac{g_n(\rho_1(\omega),\ldots,\rho_{n-1}(\omega),b)-g_{n-1}(\rho_1(\omega),\ldots,\rho_{n-1}(\omega))}{b-r}\\
&= \frac{g_{n-1}(\rho_1(\omega),\ldots,\rho_{n-1}(\omega))-g_n(\rho_1(\omega),\ldots,\rho_{n-1}(\omega),a)}{r-a}
\end{aligned}$$

da cui segue

$$\begin{aligned}
\Delta X_n(\omega) &= \mathbb{I}_{\rho_n(\omega)=b}[g_n(\rho_1(\omega),\ldots,\rho_{n-1}(\omega),b)-g_{n-1}(\rho_1(\omega),\ldots,\rho_{n-1}(\omega))]+\\
&+ \mathbb{I}_{\rho_n(\omega)=a}[g_n(\rho_1(\omega),\ldots,\rho_{n-1}(\omega),a)-g_{n-1}(\rho_1(\omega),\ldots,\rho_{n-1}(\omega))]\\
&= \mathbb{I}_{\rho_n(\omega)=b}(b-r)\gamma'_n(\omega)+\mathbb{I}_{\rho_n(\omega)=a}(a-r)\gamma'_n(\omega)\\
&= \sum_{x=\{a,b\}}\mathbb{I}_{\rho_n(\omega)=x}(x-r)\gamma'_n(\omega)\\
&= (\rho_n(\omega)-r)\gamma'_n(\omega).
\end{aligned}$$

La $(\widetilde{P},\mathcal{F}_n)$-martingala $X=(X_n)_{n\geqslant 0}$ ammette, dunque, la rappresentazione

$$X_n(\omega)=X_0(\omega)+\sum_{k=1}^{n}(\rho_k(\omega)-r)\gamma'_k(\omega);$$

infine considerando la (4.6) si ha l'uguaglianza

$$\rho_n(\omega)-r=(1+r)\frac{B_{n-1}}{S_{n-1}}\,\Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right)$$

da cui deriva la $\frac{S}{B}$-rappresentabilità della martingala considerata, cioè

$$X_n(\omega)=X_0(\omega)+\sum_{k=1}^{n}\widetilde{\gamma}_k(\omega)\Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right),$$

dove si è assunto

$$\widetilde{\gamma}_n(\omega) = \gamma'_n(\omega)(1+r)\frac{B_{n-1}}{S_{n-1}}. \tag{4.16}$$

Si osservi che poiché le $\gamma'_n(\omega)$ risultano $\mathcal{F}_{n-1}$-misurabili (questa proprietà è diretta conseguenza della loro definizione) la successione $\widetilde{\gamma}_n(\omega)$ è predicibile .

4.2 Prezzi di copertura per opzioni Europee

Si considerino le opzioni Europee di maturità $N < \infty$ con pay-off f_N dipendenti in generale da tutte le variabili $S_0, S_1, \ldots, S_N$ o equivalentemente da S_0 e $\rho_1, \ldots, \rho_N$. Come visto nel capitolo II se il mercato considerato è senza opportunità di arbitraggio e completo (come risulta essere il mercato binomiale (B,S) del modello CRR) il *prezzo di copertura* (o premio) per l'acquisto dell'opzione, cioè

$$C(f_N, P) = \inf\{x \geqslant 0 : \exists\, \pi \quad t.c. \quad X_0^\pi = x \quad e \quad X_N^\pi = f_N \quad P\, q.o.\} \tag{4.17}$$

dove con $X^\pi = (X_n^\pi)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ si indica il valore della strategia autofinanziante $\pi = (\beta, \gamma)$, può essere determinato dalla identità:

$$C(f_N, P) = B_0\, \widetilde{\mathbb{E}} \left(\frac{f_N}{B_N} \right). \tag{4.18}$$

Per il modello in oggetto essendo $B_N = B_0(1+r)^N$ si ottiene:

$$C(f_N, P) = \widetilde{\mathbb{E}} \left(\frac{f_N}{(1+r)^N} \right), \tag{4.19}$$

tale risultato permette di rispondere completamente al problema di determinare un prezzo razionale per il contratto di un'opzione con pay-off

f_N. Si ricorda che il venditore prendendo il premio $C(f_N, P)$ dal compratore può dotarsi di un portfolio $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$ che replica il pay-off f_N all'istante N, cioè

$$X_N^{\widetilde{\pi}} = f_N.$$

Come menzionato nella dimostrazione del Lemma 1.5.1 il modo standard per determinare il portfolio $\widetilde{\pi}$ consiste nel considerare, inizialmente, la $(\widetilde{P}, \mathcal{F}_n)$-martingala $M = (M_n)_{n \leqslant N}$ definita da

$$M_n = \widetilde{\mathbb{E}} \left(\frac{f_N}{B_N} \Big| \mathcal{F}_n \right).$$

Essendo M $\frac{S}{B}$-rappresentabile esiste una successione predicibile $\widetilde{\gamma} = (\widetilde{\gamma}_n)_{n \leqslant N}$, si veda la (4.16), tale che la martingala risulta data da:

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\gamma}_k \Delta \left(\frac{S_k}{B_k} \right) \qquad n \leqslant N. \tag{4.20}$$

Prendendo

$$\widetilde{\beta}_n = M_n - \widetilde{\gamma}_n \frac{S_n}{B_n}$$

si ottiene una copertura autofinanziante $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$ di valore

$$X_n^{\widetilde{\pi}} = \widetilde{\beta}_n B_n + \widetilde{\gamma}_n S_n = B_n \widetilde{\mathbb{E}} \left(\frac{f_N}{B_N} \Big| \mathcal{F}_n \right)$$

tale che inizialmente

$$X_0^{\widetilde{\pi}} = C(f_N, P)$$

e all'istante N goda della proprietà di copertura perfetta.

Considerando inoltre la relazione

$$\Delta \left(\frac{S_n}{B_n} \right) = \frac{S_{n-1}(\rho_n - r)}{B_n}$$

e sostituendo questo risultato nella (4.20) si ottiene:

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\gamma}_k \frac{S_{k-1}}{B_k}(\rho_k - r) = M_0 + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\alpha}_k(\rho_k - r) \tag{4.21}$$

avendo assunto $\widetilde{\gamma}_k = \widetilde{\alpha}_k \frac{B_k}{S_{k-1}}$.

Prendendo, infine, la successione $\delta = (\delta_n)$ delle variabili

$$\delta_n = \frac{\rho_n - a}{b - a}$$

risulta immediato che

$$\rho_n = \begin{cases} b \\ a \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \delta_n = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

per cui $\mathcal{F}_n = \sigma(\rho_1, \ldots, \rho_n) = \sigma(\delta_1, \ldots, \delta_n)$.

Dalla relazione:

$$\delta_n - \widetilde{p} = \frac{\rho_n - r}{b - a}$$

appare evidente che oltre alla (4.20) e alla (4.21) si ha anche una rappresentazione di M in funzione di δ, ovvero:

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\alpha}_k^{(\delta)} m_k^{(\delta)} \tag{4.22}$$

dove la successione $m^{(\delta)} = \left(m_n^{(\delta)}\right)_{n \leqslant N}$ di variabili $m_n^{(\delta)} = \sum_{k=1}^{n}(\delta_k - \widetilde{p})$ è una $(\widetilde{P}, \mathcal{F}_n)$-martingala e $\widetilde{\alpha}_n^{(\delta)} = (b-a)\widetilde{\alpha}_n$.

Si osservi che la scelta di esprimere M in termini di δ risulterà utile nel calcolo esplicito del valore del premio.

Si può riassumere quanto detto in questa sezione enunciando il seguente teorema:

Teorema 4.2.1. *Dato il modello CRR*

1 *per ogni N e per ogni pay-off f_N $\mathcal{F}_N$-misurabile il prezzo di esercizio può essere descritto dalla formula*

$$C(f_N, P) = B_0 \,\widetilde{\mathbb{E}} \left(\frac{f_N}{B_N} \right) = \widetilde{\mathbb{E}} \left(\frac{f_N}{(1+r)^N} \right). \tag{4.23}$$

2 *esiste una copertura perfetta e autofinanziante $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$ dal valore $X^{\widetilde{\pi}} = (X_n^{\widetilde{\pi}})_{n \leqslant N}$ tale che*

$$X_0^{\widetilde{\pi}} = C(f_N; P) \qquad\qquad X_N^{\widetilde{\pi}} = f_N$$

$$e \qquad X_n^{\widetilde{\pi}} = B_n \,\widetilde{\mathbb{E}} \left(\frac{f_N}{B_0(1+r)^N} \Big| \mathcal{F}_n \right).$$

3 *le componenti $\widetilde{\beta} = (\widetilde{\beta}_n)_{n \leqslant N}$ e $\widetilde{\gamma} = (\widetilde{\gamma}_n)_{n \leqslant N}$ della copertura $\widetilde{\pi}$ soddisfano la relazione*

$$\widetilde{\beta}_n = M_n - \widetilde{\gamma}_n \frac{S_n}{B_n}$$

dove $\widetilde{\gamma}_n$ con $n \leqslant N$ può essere determinata attraverso la $\frac{S}{B}$-rappresentazione (4.20) della $(\widetilde{P}, \mathcal{F}_n)$-martingala $M = (M_n)_{n \leqslant N}$ definita come

$$M_n = \widetilde{\mathbb{E}} \left(\frac{f_N}{B_N} \Big| \mathcal{F}_n \right).$$

4.2.1 Calcolo del prezzo di copertura per l'opzione call

Per un'opzione call standard (si veda la premessa del capitolo II) la funzione di pay-off f_N risulta pari a:

$$f_N = (S_N - K)^+ \tag{4.24}$$

dove N indica il tempo di maturità e K il prezzo di esercizio. Applicando i risultati generali (descritti nel paragrafo precedente) al caso considerato si ha che la (4.19) diviene:

$$C(f_N, P) = \widetilde{\mathbb{E}}\left(\frac{(S_N - K)^+}{(1+r)^N}\right). \tag{4.25}$$

Per sottolineare la dipendenza del prezzo di copertura dell'opzione call dal prezzo di strike viene introdotta la notazione $C_{call}(K, P) = C(f_N, P)$.
Prendendo H pari al numero di volte in cui l'azione è aumentata del fattore $(1+b)$ nel periodo di tempo che va da 1 a N, cioè, richiamando le notazioni del precedente paragrafo, $H = \sum_{k=1}^{N} \delta_k$ segue che la sua distribuzione è una binomiale di parametri N e $\widetilde{p}$, ovvero:

$$H \sim B(N, \widetilde{p}) \qquad \text{sotto} \quad \widetilde{P}.$$

Si può assumere, dunque, che all'istante N l'azione presenti il seguente valore

$$S_N = S_0(1+a)^{N-H}(1+b)^H \tag{4.26}$$

andandolo a sostituire nella (4.25) e esplicitando il valore della media per la distribuzione in esame segue che il prezzo di acquisto risulta

$$\begin{aligned} C_{call}(K, P) &= \frac{1}{(1+r)^N} \sum_{h=0}^{N} \begin{pmatrix} N \\ h \end{pmatrix} \widetilde{p}^{\,h}(1-\widetilde{p})^{N-h} \cdot \\ &\cdot \; \left(S_0(1+a)^{N-h}(1+b)^h - K\right)^+, \end{aligned} \tag{4.27}$$

se si prende h_0 come il più piccolo intero per cui è soddisfatta la disuguaglianza $S_0(1+a)^{N-h}(1+b)^h > K$ si può riscrivere la (4.27) in funzione di questo

$$\begin{aligned} C_{call}(K,P) &= S_0 \sum_{h=h_0}^{N} \binom{N}{h} \widetilde{p}^{\,h}(1-\widetilde{p})^{N-h} \left(\frac{1+a}{1+r}\right)^{N-h} \left(\frac{1+b}{1+r}\right)^{h} - \\ &- \frac{K}{(1+r)^N} \sum_{h=h_0}^{N} \binom{N}{h} \widetilde{p}^{\,h}(1-\widetilde{p})^{N-h}. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Si osserva che presa la funzione di sopravvivenza di una binomiale calcolata nel punto j ovvero

$$B(j,N,p) = \sum_{h=j}^{N} \binom{N}{h} p^{\,h}(1-p)^{N-h} \tag{4.29}$$

si ottiene

$$C_{call}(K,P) = S_0 B(h_0,N,p^*) - \frac{K}{(1+r)^N} B(h_0,N,\widetilde{p}) \tag{4.30}$$

dove si è posto

$$p^* = \frac{1+b}{1+r}\,\widetilde{p}. \tag{4.31}$$

Osservazione 4.2.1. L'h_0 cercato deve soddisfare la condizione

$$h_0 = \min\{j \,\epsilon\, \mathbb{N} : S_0(1+a)^{N-j}(1+b)^j - K > 0\}$$

per cui risolvendo si arriva a

$$h_0 = 1 + \left\lfloor \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0(1+a)^N}\right)}{\ln\left(\frac{1+b}{1+a}\right)} \right\rfloor. \tag{4.32}$$

I risultati ottenuti portano all'enunciazione del seguente teorema.

Teorema 4.2.2. *Il prezzo razionale per l'opzione Europea standard di tipo call con pay-off* $f_N = (S_N - K)^+$ *è pari a*

$$C_{call}(K, P) = S_0 B(h_0, N, p^*) - \frac{K}{(1+r)^N} B(h_0, N, \widetilde{p})$$

dove $B(h_0, N, p)$ *è definito tramite la (4.29),* p^* *attraverso la (4.31) e si è assunto* h_0 *come nella (4.32).*

Osservazione 4.2.2. Si osservi che i risultati ottenuti nel caso delle opzioni call sono facilmente estendibili a quelle put (dove $f_N = (K - S_N)^+$), infatti dall'identità

$$(K - S_N)^+ = (S_N - K)^+ - S_N + K$$

segue che il prezzo razionale di un'opzione put può essere definito dalla formula

$$\begin{aligned} C_{put}(K, P) &= \widetilde{\mathbb{E}}\left(\frac{(K - S_N)^+}{(1+r)^N}\right) \\ &= C_{call}(K, P) - \widetilde{\mathbb{E}}\frac{S_N}{(1+r)^N} + \frac{K}{(1+r)^N} \end{aligned}$$

ed essendo $\widetilde{\mathbb{E}}\left(\frac{S_N}{(1+r)^N}\right) = S_0$ si ottiene la seguente relazione

$$C_{put}(K, P) = C_{call}(K, P) - S_0 + \frac{K}{(1+r)^N}.$$

che viene detta *formula di parità per le opzioni call-put.*

Osservazione 4.2.3. Sia $f = f(x)$, con $x \geqslant 0$, una funzione non negativa, sia $f_N = f(S_N)$ il pay-off e sia, come al solito, $C(f_N, P) = B_0 \widetilde{\mathbb{E}} \frac{f(S_N)}{B_N}$ il prezzo razionale corrispondente. È possibile determinare il valore del prezzo di un'opzione generica di questo tipo usando il prezzo razionale di un'opzione call.

Si assuma f derivabile con derivata $f'(x) = f'(0) + \int_{(0,x]} \mu(dy)$, dove $\mu = \mu(dy)$ è una misura finita, non necessariamente positiva, su $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$.

Si noti che se f è derivabile due volte si ha $\mu(dy) = f''(y)dy$.

Allora è chiaro che

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \int_{(0,x]} (x-y)^+ \mu(dy),$$

quindi ponendo $x = S_N$ e cambiando notazione nell'integrale

$$f_N = f(0) + S_N f'(0) + \int_{(0,S_N]} (S_N - K)^+ \mu(dK) \quad (P \text{ q.o.}).$$

Se ora si attualizzano i valori e si considera la media rispetto la misura $\widetilde{P}$, essendo $\widetilde{\mathbb{E}}\frac{S_N}{B_N} = \widetilde{\mathbb{E}}\frac{S_0}{B_0} = \frac{S_0}{B_0}$, si ottiene

$$\widetilde{\mathbb{E}}\frac{f_N}{B_N} = \frac{f(0)}{B_N} + \frac{S_0}{B_0} f'(0) + \int_{(0,\infty)} \widetilde{\mathbb{E}}\left(\frac{(S_N - K)^+}{B_N}\right) \mu(dK),$$

da cui segue, per la (4.25), che

$$C(f_N, P) = \frac{f(0)}{(1+r)^N} + S_0 f'(0) + \int_{(0,\infty)} C_{call}(K, P)\mu(dK). \tag{4.33}$$

Si osservi che se $f_N = f(S_N) = (S_N - K_*)^+$, $K_* > 0$, allora $\mu(dK)$ è concentrata nel punto K_*, cioè $\mu_*(dK) = \delta_{\{K_*\}}(dx)$, e ciò implica $C(f_N, P) = C_{call}(K_*, P)$.

Bibliografia

[1] P. Baldi. *Equazioni Differenziali Stocastiche e Applicazioni*, Quaderni dell'Unione Matematica Italiana, 28, Pitagora Editrice, Bologna (2000).

[2] F. Black e M. Scholes. The princing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy 81*, 3: 637–659 (1973).

[3] P. Billingsley. *Probability and Measure*, 3^{rd} ed., Waley, New York (1995).

[4] R.C. Merton. Theory of Rational Option Pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4: 141–183 (1973).

[5] F. Moriconi. *Matematica Finanziaria*, Edizioni Il Mulino, Bologna (1995).

[6] N. El Karoui e M.C. Quenez. Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market. *SIAM Journal on Control and Optimization 33*, 1: 29–66 (1995).

[7] L.C.G. Rogers. Equivalent martingale measures and no-arbitrage. *Stochastics and Stochastics Reports 51*, 1+2: 41–50 (1994).

[8] W. Schachermayer. A Hilbert space proof of the fundamental theorem of asset pricing in finite discrete time. *Insurance: Matematics & Economics 11*, 4: 25–55 (1992).

[9] A.N. Shiryaev. *Essentials of Stochastic Finance. Facts, Models, Theory. Advances Series on Statistical Sciences and Applied Probability, 3*, World Scientific Publishing Co., Singapore (1999).

[10] D. Williams. *Probability with Martingales*, Cambridge University Press (1991).