CORSO DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ (1^o modulo)
- PROVA d'esame del 19/02/2003
- Laurea Quadriennale in Matematica - (Prof. Nappo)

Scrivere su ogni foglio NOME e COGNOME. Le risposte devono essere giustificate sui fogli protocollo e riportate nel foglio RISPOSTE.

ESERCIZIO 1. (prima parte)

In un'urna, che inizialmente contiene una sola pallina di colore rosso, vengono inserite un numero aleatorio N di palline bianche.

Viene estratta una pallina dall'urna così formata.

Risolvere l'esercizio in una delle due seguenti situazioni

PRIMA SITUAZIONE:

Sia N una variabile aleatoria che assume solo i valori $\{1, 2, 3\}$ e con

$$P(N = 1) = P(N = 2) = P(N = 3).$$

SECONDA SITUAZIONE :

Sia N una variabile aleatoria con legge di Poisson di media μ
(**Attenzione:** in caso di difficoltà si assuma $\mu = 1$).

a1. Determinare la probabilità p che dall'urna venga estratta la pallina rossa.
(si ponga A l'evento *viene estratta una pallina rossa dall'urna*)

a2. Determinare il valore di $E(\frac{1}{1+N})$.

a3. Sapendo che è stata estratta una pallina rossa, calcolare la probabilità che $N = k$ e stabilire per quale valore di k si ottiene il valore massimo.

ESERCIZIO 1. (seconda parte)

Si ripeta daccapo il procedimento per n urne, utilizzando per ogni urna variabili aleatorie indipendenti N_1, $N_2, ...$ tutte distribuite come N (ovvero nell'urna i ci sono 1 pallina rossa ed N_i palline bianche, e si estrae una pallina da ciascuna urna).

b1. Calcolare la probabilità p_n che da tutte le urne venga estratta la pallina rossa.
(si ponga A_i l'evento *viene estratta una pallina rossa dall'urna* i)

b2. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} p_n.$$

Sia Y_n la successione di variabili aleatorie

$$Y_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + N_i}, \qquad n = 1, 2, ..$$

c1. Calcolare il valore atteso di Y_n

c2. Utilizzando la disuguaglianza di Markov, mostrare che Y_n converge a zero in probabilità, quando n tende all'infinito.

CORSO DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ (1^o modulo)
- PROVA d'esame del 19/02/2003
- Laurea Quadriennale in Matematica - (Prof. Nappo)

Scrivere su ogni foglio NOME e COGNOME. Le risposte devono essere giustificate sui fogli protocollo e riportate nel foglio RISPOSTE.

ESERCIZIO 2.

Sia $0 < p < 1$ la probabilità che esca testa lanciando una moneta. Sia X_1 il numero delle croci prima dell'uscita della prima testa in una prima serie di lanci indipendenti. Sia X_2 il numero delle croci prima dell'uscita della prima testa in una serie di lanci indipendenti di una seconda moneta (identica alla prima). Infine, sia $U = \min(X_1, X_2)$
(**Attenzione:** in caso di difficoltà si assuma la moneta bilanciata)

a1. Determinare la legge di U

a2. Determinare il valore atteso $E(U)$.

b1. Determinare la legge di X_1 condizionata a $U = k$.

b2. Determinare se X_1 e U sono indipendenti.

c1. Calcolare $E(X_1 | U = k)$.

c2. Verificare che $E(X_1) = E(E(X_1|U))$

ESERCIZIO 3.
Sia X una variabile aleatoria con densità di probabilità

$$\begin{cases} f_X(x) = C\frac{1}{x^4} & \text{per } |x| \geq 2, \\ f_X(x) = 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a1. Determinare il valore di C.

a2. Calcolare $P(|X| \leq 4)$.

a3. Calcolare la funzione di ripartizione $F_X(x)$.

Si ponga $Y = X^3$.

b. Calcolare la densità di probabilità $f_Y(y)$ di Y.

c. Spiegare perché non ha senso considerare la legge dei grandi numeri per una successione di variabili aleatorie indipendenti Y_n, tutte con la stessa distribuzione di Y.

CORSO DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ (modulo unico)
- PROVA d'esame del 19/02/2003
- Laurea Triennale in Matematica e Quadriennale (ordinamento Salvini)-
(Prof. Nappo - Prof. Piccioni)

Scrivere su ogni foglio NOME e COGNOME. Le risposte devono essere giustificate sui fogli protocollo e riportate nel foglio RISPOSTE.

ESERCIZIO 1. (prima parte)

In un'urna, che inizialmente contiene una sola pallina di colore rosso, vengono inserite un numero aleatorio N di palline bianche.

Viene estratta una pallina dall'urna così formata.

Risolvere l'esercizio in una delle due seguenti situazioni

PRIMA SITUAZIONE:

Sia N una variabile aleatoria che assume solo i valori $\{1, 2, 3\}$ e con

$$P(N = 1) = P(N = 2) = P(N = 3).$$

SECONDA SITUAZIONE :

Sia N una variabile aleatoria con legge di Poisson di media μ
(**Attenzione:** in caso di difficoltà si assuma $\mu = 1$).

a1. Determinare la probabilità p che dall'urna venga estratta la pallina rossa.
(si ponga A l'evento *viene estratta una pallina rossa dall'urna*)

a2. Determinare il valore di $E(\frac{1}{1+N})$.

a3. Sapendo che è stata estratta una pallina rossa, calcolare la probabilità che $N = k$ e stabilire per quale valore di k si ottiene il valore massimo.

ESERCIZIO 1. (seconda parte)

Si ripeta daccapo il procedimento per n urne, utilizzando per ogni urna variabili aleatorie indipendenti N_1, $N_2, ...$ tutte distribuite come N (ovvero nell'urna i ci sono 1 pallina rossa ed N_i palline bianche, e si estrae una pallina da ciascuna urna).

b1. Calcolare la probabilità p_n che da tutte le urne venga estratta la pallina rossa.
(si ponga A_i l'evento *viene estratta una pallina rossa dall'urna* i)

b2. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} p_n.$$

Sia Y_n la successione di variabili aleatorie

$$Y_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + N_i}, \qquad n = 1, 2, ..$$

c1. Calcolare il valore atteso di Y_n

c2. Utilizzando la disuguaglianza di Markov, mostrare che Y_n converge a zero in probabilità, quando n tende all'infinito (**facoltativo**).

CORSO DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ (modulo unico)
- PROVA d'esame del 19/02/2003
- Laurea Triennale in Matematica e Quadriennale (ordinamento Salvini)-
(Prof. Nappo - Prof. Piccioni)

Scrivere su ogni foglio NOME e COGNOME. Le risposte devono essere giustificate sui fogli protocollo e riportate nel foglio RISPOSTE.

ESERCIZIO 2.

Sia $0 < p < 1$ la probabilità che esca testa lanciando una moneta. Sia X_1 il numero delle croci prima dell'uscita della prima testa in una prima serie di lanci indipendenti. Sia X_2 il numero delle croci prima dell'uscita della prima testa in una serie di lanci indipendenti di una seconda moneta (identica alla prima). Infine, sia $U = \min(X_1, X_2)$
(**Attenzione:** in caso di difficoltà si assuma la moneta bilanciata)

a1. Determinare la legge di U

a2. Determinare il valore atteso $E(U)$.

b1. Determinare la legge di X_1 condizionata a $U = k$.

b2. Determinare se X_1 e U sono indipendenti.

c1. Calcolare $E(X_1|U = k)$.

c2. Verificare che $E(X_1) = E(E(X_1|U))$

CORSO DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ (modulo unico)
- PROVA d'esame del 19/02/2003
- Laurea Triennale in Matematica e Quadriennale (ordinamento Salvini)-
(Prof. Nappo - Prof. Piccioni)

Scrivere su ogni foglio NOME e COGNOME. Le risposte devono essere giustificate sui fogli protocollo e riportate nel foglio RISPOSTE.

ESERCIZIO 3.

Ad una festa danzante partecipano n ragazzi e n ragazze. Ciascuna delle ragazze sceglie a caso[1] uno dei ragazzi, e così si formano n coppie. Alla fine del primo ballo ciascuna coppia lancia una moneta bilanciata, e si scioglie se viene testa. **Successivamente**, **le ragazze *libere*** (cioè delle coppie che si sono sciolte) **scelgono a caso**[2] **i ragazzi *liberi*** (cioè delle coppie che si sono sciolte) **e formano nuove coppie** (quindi una coppia può sciogliersi e tornare assieme). Insieme a quelle che non si sono sciolte effettuano un secondo ballo.
Si assuma $n = 3$.

a1. Quanto vale la probabilità che si sciolgano (esattamente) k coppie?

a2. Se si sono sciolte k coppie, tra quante possibilità possono scegliere le k ragazze *libere* per formare le nuove coppie? (ovvero quante coppie si possono formare?)

a3. Qual è la probabilità che le coppie del primo ballo restino tutte assieme per il secondo ballo?

b1. Qual è la probabilità α che la terza ragazza cambi partner tra il primo e il secondo ballo? (si ponga C_3 l'evento *la terza ragazza cambia partner tra il primo e il secondo ballo*)

b2. Qual è la probabilità che una specifica ragazza cambi partner tra il primo e il secondo ballo? (si ponga C_i l'evento *la ragazza $i-esima$ cambia partner tra il primo e il secondo ballo*)

b3. Posto M uguale al numero delle ragazze (o equivalentemente dei ragazzi) che cambiano partner tra il primo e secondo ballo, scrivere M in termini delle funzioni indicatrici $\mathbb{I}_{C_i}$ e trovare il valore medio di M in funzione di α.

c. Qual è la probabilità β che una fissata coppia costituita da un ragazzo e da una ragazza faccia almeno uno dei due balli assieme? (**facoltativo**)

---

[1] Si pensi ad un meccanismo del tipo: i ragazzi scrivono su un biglietto il proprio nome e mettono il biglietto in un'urna, e le ragazze una dopo l'altra estraggono i biglietti.

[2] Si pensi ad un meccanismo del tipo: i ragazzi *liberi* scrivono su un biglietto il proprio nome e mettono il biglietto in un'urna, e le ragazze *libere* una dopo l'altra estraggono i biglietti.

SOLUZIONI della PROVA d'esame del 19/02/2003
CORSO DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

ESERCIZIO 1. (prima parte)

In un'urna, che inizialmente contiene una sola pallina di colore rosso, vengono inserite un numero aleatorio N di palline bianche.

Viene estratta una pallina dall'urna così formata.

Risolvere l'esercizio in una delle due seguenti situazioni

PRIMA SITUAZIONE:
Sia N una variabile aleatoria che assume solo i valori $\{1, 2, 3\}$ e con

$$P(N = 1) = P(N = 2) = P(N = 3).$$

SECONDA SITUAZIONE :
Sia N una variabile aleatoria con legge di Poisson di media μ
*(**Attenzione:** in caso di difficoltà si assuma $\mu = 1$).*

a1. *Determinare la probabilità p che dall'urna venga estratta la pallina rossa.*
(si ponga A l'evento viene estratta una pallina rossa dall'urna*)*
RISPOSTA

$$p = P(A) = \sum_k P(N = k)P(A|\{N = k\}) = \sum_k P(N = k)\frac{1}{k+1}$$

in quanto se nell'urna ci sono k palline bianche ed 1 rossa, la probabilità che esca la pallina rossa vale $1/(k + 1)$.

Quindi **PRIMA SITUAZIONE:**

$$p = \frac{13}{36}$$

Infatti

$$p = P(A) = \sum_{k=1}^{3} P(N = k)P(A|\{N = k\}) = \sum_{k=1}^{3} P(N = k)\frac{1}{k+1} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{4} = \frac{13}{36}$$

in quanto necessariamente $P(N = k) = 1/3$ essendo $P(N = k) = cost$ e $\sum_{k=1}^{3} P(N = k) = 1$.

SECONDA SITUAZIONE :

$$p = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\mu}}{\mu}$$

Infatti, tenendo conto che per una variabile aleatoria N di Poisson di parametro λ si ha $E(N) = \lambda$, si ha

$$
\begin{aligned}
p = P(A) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(N=k)P(A|\{N=k\}) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N=k)\frac{1}{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!}\mathrm{e}^{-\mu}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{(k+1)!}\mathrm{e}^{-\mu} \\
&= \frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^{k+1}}{(k+1)!}\mathrm{e}^{-\mu} = \frac{\mathrm{e}^{-\mu}}{\mu}\left(\sum_{h=1}^{\infty}\frac{\mu^h}{h!}\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\mu}}{\mu}\left(\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\mu^h}{h!} - 1\right) = \frac{\mathrm{e}^{-\mu}}{\mu}\left(\mathrm{e}^{\mu}-1\right) = \frac{1-\mathrm{e}^{-\mu}}{\mu}
\end{aligned}
$$

a2. *Determinare il valore di* $E\left(\frac{1}{1+N}\right)$.

RISPOSTA

$$
E\left(\frac{1}{1+N}\right) = p
$$

Infatti

$$
E\left(\frac{1}{1+N}\right) = \sum_k \frac{1}{k+1}P(N=k)
$$

e quindi coincide con il calcolo di p nel punto **a1.**

a3. Sapendo che è stata estratta una pallina rossa, calcolare la probabilità che $N=k$ e stabilire per quale valore di k si ottiene il valore massimo.

RISPOSTA

Si richiede di calcolare

$$
P(N=k|A) = \frac{P(N=k)P(A|\{N=k\})}{P(A)} = \frac{P(N=k)P(A|\{N=k\})}{\sum_h P(N=h)P(A|\{N=h\})}
$$

PRIMA SITUAZIONE :

$$
\begin{aligned}
P(N=1|A) &= \frac{\frac{1}{3}\,\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\,\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\,\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\,\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{13}{12}} = \frac{6}{13} \\
P(N=2|A) &= \frac{\frac{1}{3}\,\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\,\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\,\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\,\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{13}{12}} = \frac{4}{13} \\
P(N=3|A) &= \frac{\frac{1}{3}\,\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}\,\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\,\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\,\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{13}{12}} = \frac{3}{13}
\end{aligned}
$$

$$
(o\ ALTERNATIVAMENTE)
$$

$$
P(N=3|A) = 1 - P(N=1|A) - P(N=2|A) = 1 - \frac{6}{13} - \frac{4}{13} = \frac{3}{13}
$$

ed il massimo valore risulta $k=1$.

SECONDA SITUAZIONE: per $k \geq 0$,

$$
P(N=k|A) = \frac{P(N=k)P(A|\{N=k\})}{P(A)} = \frac{\frac{\mu^k}{k!}\mathrm{e}^{-\mu}\frac{1}{k+1}}{\frac{1-\mathrm{e}^{-\mu}}{\mu}} = \frac{\mu^{k+1}}{(k+1)!}\frac{\mathrm{e}^{-\mu}}{1-\mathrm{e}^{-\mu}}.
$$

Per ottenere il valore massimo basta considerare che

$$P(N = k|A) = cost\frac{\mu^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Quindi, nel caso $\mu = 1$ il massimo è raggiunto in $k = 0$. Nel caso di μ generico si ha che

$$P(N = k-1|A) \leq P(N = k|A) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mu^k}{k!} \leq \frac{\mu^{k+1}}{(k+1)!}$$

ovvero

$$1 \leq \frac{\mu}{k+1} \quad \Leftrightarrow \quad k+1 \leq \mu \quad \Leftrightarrow \quad k \leq \mu - 1$$

In particolare il valore di k in cui viene raggiunto il massimo[3] è quello per cui $P(N = k-1|A) \leq P(N = k|A)$ e $P(N = k|A) > P(N = k+1|A)$ e quindi quello per cui $k \leq \mu - 1 < k+1$[4].

ESERCIZIO 1. (seconda parte)

Si ripeta daccapo il procedimento per n urne, utilizzando per ogni urna variabili aleatorie indipendenti N_1, N_2,... tutte distribuite come N (ovvero nell'urna i ci sono 1 pallina rossa ed N_i palline bianche, e si estrae una pallina da ciascuna urna).

b1. *Calcolare la probabilità p_n che da tutte le urne venga estratta la pallina rossa.*
(si ponga A_i l'evento viene estratta una pallina rossa dall'urna i*)*

RISPOSTA

$$p_n = p^n$$

Infatti, per l'indipendenza delle variabili aleatorie N_i, risultano indipendenti anche gli eventi A_i e quindi, tenendo conto che $P(A_i) = P(A) = p$, si ha

$$p_n = P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n) = p^n$$

b2. *Calcolare*

$$\lim_{n\to\infty} p_n.$$

RISPOSTA

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} p^n = 0$$

Sia Y_n la successione di variabili aleatorie

$$Y_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1+N_i}, \qquad n = 1, 2, ..$$

c1. *Calcolare il valore atteso di Y_n*

RISPOSTA

$$E(Y_n) = p^n$$

---

[3]In realtà è possibile che i valori in cui il massimo è raggiunto siano due: se vale il segno di uguaglianza in $k \leq \mu - 1$, ovvero se $k = \mu - 1$, allora anche $k - 1$ è punto di massimo.

[4]Quindi $k = \lfloor \mu - 1 \rfloor$ dove $\lfloor x \rfloor$ indica appunto la parte intera (inferiore) di x.

Infatti, per l'indipendenza delle variabili aleatorie N_i, anche le variabili aleatorie $\frac{1}{1+N_i}$ sono indipendenti e quindi il valore atteso del loro prodotto coincide con il prodotto dei valori attesi. Inoltre, avendo N_i ed N la stessa distribuzione si ha

$$E\left(\frac{1}{1+N_i}\right) = E\left(\frac{1}{1+N}\right) = p$$

e perciò

$$E(Y_n) = E\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1+N_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} E\left(\frac{1}{1+N_i}\right) = p^n.$$

c2. *Utilizzando la disuguaglianza di Markov, mostrare che* Y_n *converge a zero in probabilità, quando* n *tende all'infinito (**facoltativo** per gli studenti della laurea triennale).*

RISPOSTA

Si richiede di mostrare che, qualunque sia $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P(|Y_n| > \varepsilon) = 0$$

Per la disuguaglianza di Markov

$$0 \le P(|Y_n| > \varepsilon) = P(Y_n > \varepsilon) \le \frac{E(Y_n)}{\varepsilon} = \frac{p^n}{\varepsilon} \longrightarrow 0$$

Basta poi applicare il Teorema del confronto.

ESERCIZIO 2.

Sia $0 < p < 1$ *la probabilità che esca testa lanciando una moneta. Sia* X_1 *il numero delle croci prima dell'uscita della prima testa in una prima serie di lanci indipendenti. Sia* X_2 *il numero delle croci prima dell'uscita della prima testa in una serie di lanci indipendenti di una seconda moneta (identica alla prima). Infine, sia* $U = \min(X_1, X_2)$
*(**Attenzione:** in caso di difficoltà si assuma la moneta bilanciata)*

a1. *Determinare la legge di* U.

RISPOSTA La legge di U è Geometrica (a partire da 0) di parametro $p(2-p)$.

Infatti, per l'indipendenza di X_1 ed X_2, qualunque sia $h \ge 0$ si ha

$$P(U \ge h) = P(X_1 \ge h, X_2 \ge h) = P(X_1 \ge h)P(X_2 \ge h).$$

e quindi, tenendo conto che X_i hanno legge Geometrica, entrambe di parametro p,

$$P(U \ge h) = P(X_1 \ge h)P(X_2 \ge h) = \left((1-p)^h\right)^2 = \left((1-p)^2\right)^h.$$

Da questa relazione si deduce immediatamente che per il parametro θ di U vale

$$1 - \theta = (1-p)^2 \Leftrightarrow \theta = 1 - (1-p)^2 = 1 - 1 + 2p - p^2 = 2p - p^2 = p(2-p)$$

Oppure più dettagliatamente, per $h \ge 0$,

$$\begin{aligned} P(U = h) &= P(U \ge h) - P(U \ge h+1) = \left((1-p)^2\right)^h - \left((1-p)^2\right)^{h+1} \\ &= \left((1-p)^2\right)^h \left(1 - (1-p)^2\right) = \left((1-p)^2\right)^h (p(2-p)) \end{aligned}$$

ALTERNATIVAMENTE per capire che si tratta di una v.a. geometrica, basta osservare che, se le due monete vengono lanciate simultaneamente, allora U coincide con il numero di lanci (contemporanei) effettuati prima di ottenere per la prima volta che almeno una delle due monete dia testa, e quindi si tratta di prove ripetute di probabilità $p + p - p^2 = p(2-p)$ (si ricordi che la probabilità di $A \cup B$ è $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$).

a2. *Determinare il valore atteso* $E(U)$.

RISPOSTA

$$E(U) = \frac{1}{\theta} - 1 = \frac{1-\theta}{\theta}\frac{1}{p(2-p)} - 1 = \frac{(1-p)^2}{p(2-p)}$$

Basta applicare la formula del valore atteso di una Geometrica (a partire da zero) di parametro θ.

b1. *Determinare la legge di* X_1 *condizionata a* $U = k$.

RISPOSTA

$$P(X_1 = h | U = k) = \frac{P(X_1 = h, \min(X_1, X_2) = k)}{P(\min(X_1, X_2) = k}.$$

Va subito notato che se il minimo tra X_1 ed X_2 vale k, necessariamente X_1 può assumere solo valori maggiori o uguali a k. Bisogna però distinguere tra $h = k$ e $h > k$, infatti:

$$P(X_1 = k, \min(X_1, X_2) = k) = P(X_1 = k, X_2 \geq k) = P(X_1 = k)P(X_2 \geq k) = (1-p)^k p\ (1-p)^k$$

mentre, per $h > k$, si ha

$$P(X_1 = h, \min(X_1, X_2) = k) = P(X_1 = h, X_2 = k) = P(X_1 = h)P(X_2 = k) = (1-p)^h p\ (1-p)^k p.$$

e quindi, tenendo conto che $P(U = k) = (1-p)^{2k} p(2-p)$ si ha

$$P(X_1 = k | U = k) = \frac{(1-p)^k p\ (1-p)^k}{(1-p)^{2k} p(2-p)} = \frac{1}{2-p}$$

$$P(X_1 = h | U = k) = \frac{(1-p)^h p\ (1-p)^k p}{(1-p)^{2k} p(2-p)} = \frac{p}{2-p}(1-p)^{h-k} \qquad \text{per } h > k$$

Per controllo è bene verificare che

$$\sum_{h=k}^{\infty} P(X_1 = h | U = k) = 1,$$

e infatti

$$
\begin{aligned}
\sum_{h=k}^{\infty} P(X_1 = h|U = k) &= P(X_1 = k|U = k) + \sum_{h=k+1}^{\infty} P(X_1 = h|U = k) \\
&= \frac{1}{2-p} + \sum_{h=k+1}^{\infty} \frac{p}{2-p}(1-p)^{h-k} \\
&= \frac{1}{2-p}\left(1 + p\sum_{h-k=1}^{\infty}(1-p)^{h-k}\right) \\
&= \frac{1}{2-p}\left(1 + p\sum_{l=1}^{\infty}(1-p)^{l}\right) \\
&= \frac{1}{2-p}\left(1 + p(1-p)\sum_{l=0}^{\infty}(1-p)^{l}\right) = \frac{1}{2-p}\left(1 + p(1-p)\frac{1}{1-(1-p)}\right) \\
&= \frac{1}{2-p}\left(1 + (1-p)\right) = 1
\end{aligned}
$$

b2. Determinare se X_1 e U sono indipendenti.

RISPOSTA Chiaramente X_1 ed U **non sono indipendenti** in quanto $X_1 \geq U$ certamente e quindi, ad esempio,

$$P(X_1 = 0, U = 1) = 0, \text{ mentre } P(X_1 = 0)P(U = 1) > 0,$$

e quindi

$$P(X_1 = 0, U = 1) \neq (X_1 = 0)P(U = 1)$$

c1. *Calcolare* $E(X_1|U = k)$.

RISPOSTA

$$E(X_1|U = k) = k + \frac{1-p}{p(2-p)}$$

Infatti

$$
\begin{aligned}
E(X_1|U=k) &= \sum_{h=k}^{\infty} hP(X_1=h|U=k) = k\frac{1}{2-p} + \sum_{h=k+1}^{\infty} h\frac{p}{2-p}(1-p)^{h-k} \\
&= k\frac{1}{2-p} + \sum_{h=k+1}^{\infty} (h-k+k)\frac{p}{2-p}(1-p)^{h-k} \\
&= k\frac{1}{2-p} + \sum_{h=k+1}^{\infty} k\frac{p}{2-p}(1-p)^{h-k} + \sum_{h=k+1}^{\infty} (h-k)\frac{p}{2-p}(1-p)^{h-k} \\
&= k\left(\frac{1}{2-p} + \sum_{h=k+1}^{\infty} \frac{p}{2-p}(1-p)^{h-k}\right) + \sum_{h-k=1}^{\infty} (h-k)\frac{p}{2-p}(1-p)^{h-k} \\
&= k + \frac{p}{2-p}(1-p)\sum_{l=1}^{\infty} l(1-p)^{l-1} \\
&= k + \frac{p}{2-p}(1-p)\sum_{l=0}^{\infty} \frac{d}{dx}x^l\bigg|_{x=1-p} \\
&= k + \frac{p}{2-p}(1-p)\,\frac{d}{dx}\sum_{l=0}^{\infty} x^l\bigg|_{x=1-p} \\
&= k + \frac{p}{2-p}(1-p)\,\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x}\bigg|_{x=1-p} = k + \frac{p}{2-p}(1-p)\,\frac{1}{(1-x)^2}\bigg|_{x=1-p} \\
&= k + \frac{p}{2-p}(1-p)\frac{1}{(1-(1-p))^2} = k + \frac{1-p}{p(2-p)}
\end{aligned}
$$

c2. *Verificare che* $E(X_1) = E(E(X_1|U))$

RISPOSTA Si ha

$$E(X_1) = \frac{1-p}{p},$$

si tratta quindi di verificare che la variabile aleatoria $E(X_1|U) = U + \frac{1-p}{p(2-p)}$ ha lo stesso valore atteso. E infatti

$$
\begin{aligned}
E(E(X_1|U)) &= E\left(U + \frac{1-p}{p(2-p)}\right) = E(U) + \frac{1-p}{p(2-p)} \\
&= \frac{(1-p)^2}{p(2-p)} + \frac{1-p}{p(2-p)} = \frac{1-p}{p(2-p)}\,(1-p+1) \\
&= \frac{1-p}{p}.
\end{aligned}
$$

ESERCIZIO 3.

Ad una festa danzante partecipano n ragazzi e n ragazze. Ciascuna delle ragazze sceglie a caso[5] *uno dei ragazzi, e così si formano n coppie. Alla fine del primo ballo ciascuna coppia*

[5] Si pensi ad un meccanismo del tipo: i ragazzi scrivono su un biglietto il proprio nome e mettono il biglietto in un'urna, e le ragazze una dopo l'altra estraggono i biglietti

lancia una moneta bilanciata, e si scioglie se viene testa. ***Successivamente****,* ***le ragazze*** **libere** *(cioè delle coppie che si sono sciolte)* ***scelgono a caso***[6] ***i ragazzi*** **liberi** *(cioè delle coppie che si sono sciolte)* ***e formano nuove coppie*** *(quindi una coppia può sciogliersi e tornare assieme). Insieme a quelle che non si sono sciolte effettuano un secondo ballo.*
Si assuma $n = 3$*.*

a1. *Quanto vale la probabilità che si sciolgano (esattamente) k coppie?*

RISPOSTA Si tratta dell'evento *il numero delle monete che danno testa è k* coincide con $\{S_n = k\}$, dove S_n è il numero di successi in n prove ripetute (schema di Bernoulli) e quindi

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad 0 \le k \le n$$

a2. *Se si sono sciolte k coppie, tra quante possibilità possono scegliere le k ragazze* libere *per formare le nuove coppie? (ovvero quante coppie si possono formare?)*

RISPOSTA In tale caso le ragazze possono scegliere tra $k!$ possibilità, in quanto la prima ragazza *libera* può scegliere tra k ragazzi *liberi*, la seconda tra $k-1$ e così via.

a3. *Qual è la probabilità q che le coppie del primo ballo restino tutte assieme per il secondo ballo?*

RISPOSTA

$$q = \frac{17}{24}$$

Ogni volta che si sciolgono k coppie le ragazze possono scegliere tra $k!$ possibilità, mentre una sola possibilità permette a ogni coppia di ricomporsi. Quindi

$$q = \sum_{k=0}^{n} P(S_n = k) \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{1}{k!}$$

Tenendo conto che S_n conta il numero di teste uscite negli n lanci di moneta, e quindi è una variabile aleatoria $Bin(n, p)$, se p indica la probabilità di ottenere testa.

Nel caso specifico in cui $n = 3$ e $p = 1/2$

$$\begin{aligned}
q &= P(S_3 = 0) + P(S_3 = 1) + P(S_3 = 2)\frac{1}{2} + P(S_3 = 3)\frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{8} + \binom{3}{1}\frac{1}{8} + \binom{3}{2}\frac{1}{8}\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{8}\left(1 + 3 + \frac{3}{2} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{8 \cdot 6}(6 + 18 + 9 + 1) \\
&= \frac{17}{24}
\end{aligned}$$

Infatti nel caso in cui nessuna coppia si sciolga o si sciolga una sola coppia sicuramente le coppie si ricompongono, mentre se due coppie si sciolgono solo in un caso su due si ricompongono le coppie iniziali e se si sciolgono tre coppie allora solo in un caso su sei ($= 3!$) si ricompongono tutte le coppie iniziali.

[6] Si pensi ad un meccanismo del tipo: i ragazzi *liberi* scrivono su un biglietto il proprio nome e mettono il biglietto in un'urna, e le ragazze *libere* una dopo l'altra estraggono i biglietti.

b1. *Qual è la probabilità α che la terza ragazza cambi partner tra il primo e il secondo ballo? (si ponga C_3 l'evento* la terza ragazza cambia partner tra il primo e il secondo ballo*)*

RISPOSTA

$$\alpha = \frac{5}{24}$$

In generale la ragazza $n - sima$ cambia partner solo se esce testa al suo lancio e poi se nella scelta tra i ragazzi *liberi* non le capita il suo compagno. Nel caso in cui ci siano esattamente h ragazze *libere* tra le altre $n-1$ ragazze, allora tale probabilità vale $h/(h+1)$. Quindi

$$\alpha = p\sum_{h=0}^{n-1} P(S_{n-1} = h)\frac{h}{h+1}$$

Nel caso specifico in cui $n = 3$ e $p = 1/2$ si procede così

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(P(S_2 = 0)\frac{0}{1} + P(S_2 = 1)\frac{1}{2} + P(S_2 = 2)\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\,0 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\,\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{8}\left(1 + \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{24}$$

Alternativamente, nel caso generale, si può calcolare la probabilità del complementare

$$\alpha = P(C_n) = 1 - P(C_n^c),$$

che si calcola tenendo conto che
- se non esce testa al lancio della propria moneta,
  allora sicuramente mantiene lo stesso partner
- se invece esce testa, e se ci sono esattamente h ragazze *libere* tra le altre $n-1$ ragazze,
  allora la probabilità di mantenere lo stesso partner vale $1/(h+1)$,

$$\begin{aligned}
P(C_n^c) &= (1-p) + p\sum_{h=0}^{n-1} P(S_{n-1} = h)\frac{1}{h+1} \\
&= (1-p) + p\sum_{h=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{h!(n-1-h)!}p^h(1-p)^{n-1-h}\frac{1}{h+1} \\
&= (1-p) + \sum_{h=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(h+1)!(n-(h+1)!}p^{h+1}(1-p)^{n-(h+1)} \\
&= (1-p) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= (1-p) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= (1-p) + \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} - (1-p)^n\right) \\
&= (1-p) + \frac{1-(1-p)^n}{n}
\end{aligned}$$

e quindi

$$\boxed{\alpha = P(C_n) = 1 - P(C_n^c) = 1 - (1-p) - \frac{1-(1-p)^n}{n} = p - \frac{1-(1-p)^n}{n}}$$

b2. *Qual è la probabilità che una specifica ragazza cambi partner tra il primo e il secondo ballo?* (si ponga C_i l'evento *la ragazza* $i-esima$ *cambia partner tra il primo e il secondo ballo*)

RISPOSTA

$$P(C_i) = \alpha = \frac{5}{24}$$

La probabilità è la stessa per tutte le ragazze per motivi di simmetria e quindi vale

$$P(C_i) = \alpha.$$

b3. *Posto* M *uguale al numero delle ragazze (o equivalentemente dei ragazzi) che cambiano partner tra il primo e secondo ballo, scrivere* M *in termini delle funzioni indicatrici* $\mathbb{I}_{C_i}$ *e trovare il valore medio di* M *in funzione di* α.

RISPOSTA

$$E(M) = \frac{5}{8}$$

Poiché M conta il numero delle ragazze che cambiano partner e $\mathbb{I}_{C_i} = 1$ se e solo se l'$i-sima$ ragazza cambia partner si ha

$$M = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{C_i}$$

e quindi

$$E(M) = \sum_{k=1}^{n} E(\mathbb{I}_{C_i}) = \sum_{k=1}^{n} P(C_i) = n\alpha = n\left(p - \frac{1-(1-p)^n}{n}\right) = np - 1 + (1-p)^n$$

Nel caso $n = 3$ e $p = 1/2$ si ha

$$M = \mathbb{I}_{C_1} + \mathbb{I}_{C_2} + \mathbb{I}_{C_3}$$

e

$$E(M) = E(\mathbb{I}_{C_1}) + E(\mathbb{I}_{C_2}) + E(\mathbb{I}_{C_3}) = 3\alpha = 3\frac{5}{24} = \frac{5}{8}$$

c. *Qual è la probabilità* β *che una fissata coppia costituita da un ragazzo e da una ragazza faccia almeno uno dei due balli assieme?(**facoltativo**)*

RISPOSTA

$$\beta = \frac{29}{72}$$

La probabilità cercata si calcola tenendo conto che la coppia prefissata balla almeno una volta insieme
- o se ballano insieme il primo ballo (con probabilità $\frac{1}{n} = \frac{(n-1)!}{n!}$)
- o, se non ballano insieme il primo ballo (con probabilità $1 - \frac{1}{n}$, quando sia la ragazza che il ragazzo diventano *liberi* per il secondo ballo (con probabilità p^2), e poi, se ci sono ancora h ragazze *libere* tra le altre $n-2$ coppie, alla ragazza tocca in sorte il ragazzo (con probabilità $\frac{1}{h+2}$).

Quindi la probabilità cercata vale

$$\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}p^2\sum_{h=0}^{n-2}P(S_{n-2}=h)\frac{1}{h+2}$$

e nel caso $n=3$ e $p=1/2$ viene

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\,\frac{1}{4}\left(P(S_1=0)\frac{1}{2}+P(S_1=1)\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\,\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{3}\right)\\&=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\,\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{4}\,\frac{5}{6}\right)=\frac{1}{3}\,\frac{29}{24}=\frac{29}{72}\end{aligned}$$

Nel caso generale, tenendo conto che

$$\begin{aligned}&p^2\sum_{h=0}^{n-2}P(S_{n-2}=h)\frac{1}{h+2}=p^2\sum_{h=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{h!(n-2-h)!}p^h(1-p)^{n-2-h}\frac{h+1}{(h+1)(h+2)}\\&=\sum_{h=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{(h+2)!(n-(h+2))!}p^{h+2}(1-p)^{n-(h+2)}(h+1)\\&=\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}(k-1)\\&=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=2}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}(k-1)\\&=\frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}(k-1)-\sum_{k=0}^{1}\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}(k-1)\right)\\&=\frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{k=0}^{n}P(S_n=k)(k-1)-(1-p)^n(0-1)-n\;p(1-p)^{n-1}(1-1)\right)\\&=\frac{1}{n(n-1)}\left(E(S_n-1)+(1-p)^n\right)=\frac{1}{n(n-1)}\left(np-1+(1-p)^n\right)\end{aligned}$$

si ottiene che

$$\begin{aligned}\beta&=\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}p^2\sum_{h=0}^{n-2}P(S_{n-2}=h)\frac{1}{h+2}\\&=\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}\frac{1}{n(n-1)}\left(np-1+(1-p)^n\right)=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\left(p-\frac{1-(1-p)^n}{n}\right)\\&=\frac{1}{n}\left(1+p-\frac{1-(1-p)^n}{n}\right)=\frac{1}{n}\left(1+\alpha\right)\end{aligned}$$