

Corso di Laurea in Matematica  
Corso di CALCOLO DELLE PROBABILITA'  
(Docente Prof. F. Spizzichino)  
Prova scritta (22/9/1995)

Soluzione degli esercizi proposti

**Esercizio 1** Nel trasferire un messaggio da una sorgente ad un destinatario, si ha una probabilita' di successo pari a  $r$  o pari ad  $s$  (con  $0 < s < r < 1$ ) a seconda che sia verificata o meno una certa condizione  $C$ . Per aumentare le probabilita' che il messaggio venga ricevuto dal destinatario, esso viene inviato due volte, sotto la stessa condizione  $C$  o  $\bar{C} = C^c$ ; non e' noto quale sia tale condizione e si assegna  $P(C) = p$ .

Poniamo

$E_1 \equiv \{\text{il messaggio viene ricevuto dal destinatario la 1}^\circ \text{ volta che viene inviato}\}$

$E_2 \equiv \{\text{il messaggio viene ricevuto dal destinatario la 2}^\circ \text{ volta che viene inviato}\}$

cosicche'

$$P(E_1|C) = P(E_2|C) = r, \quad P(E_1|\bar{C}) = P(E_2|\bar{C}) = s.$$

Assumiamo inoltre la seguente condizione di indipendenza condizionata:

$$P(E_1 \cap E_2|C) = P(E_1|C)P(E_2|C) = r^2,$$

$$P(E_1 \cap E_2|\bar{C}) = P(E_1|\bar{C})P(E_2|\bar{C}) = s^2$$

i) Verificare che gli eventi  $E_1$  ed  $E_2$  sono positivamente correlati. (**N.B.** questo quesito non era nell'esercizio originario)

ii) Supponiamo ora di sapere che almeno una delle due volte il messaggio viene ricevuto dal destinatario.

**Condizionatamente a tale evento calcolare**

a) la probabilita' dell'evento  $C$ ;

b) la probabilita' dell'evento  $E_1$

## Soluzione dell'Esercizio 1

i) Gli eventi  $E_1$  ed  $E_2$  sono positivamente correlati se e solo se

$$P(E_1 \cap E_2) \geq P(E_1)P(E_2).$$

Si ha che

$$P(E_i) = P(E_i|C)P(C) + P(E_i|\bar{C})P(\bar{C}) = rp + s(1-p) \quad \text{per } i = 1, 2$$

e che

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1 \cap E_2|C)P(C) + P(E_1 \cap E_2|\bar{C})P(\bar{C}) = r^2p + s^2(1-p);$$

Quindi la positiva correlazione equivale a

$$r^2p + s^2(1-p) \geq (rp + s(1-p))^2$$

che e' valida perche' la funzione  $\phi : x \mapsto \phi(x) = x^2$  e' una funzione convessa, e  $rp + s(1-p)$  e' una combinazione convessa di  $r$  ed  $s$ . Ovvero la relazione precedente si puo' riscrivere come

$$\phi(rp + s(1-p)) \leq \phi(r)p + \phi(s)(1-p),$$

che e' sempre vera. Il segno di uguaglianza si ha solo se  $s = r$  (nel qual caso entrambi i membri della disuguaglianza coincidono con  $r^2$ ).

**ii-a)** Si deve calcolare  $P(C|E_1 \cup E_2)$ . Applicando la formula di Bayes

$$\begin{aligned} P(C|E_1 \cup E_2) &= \frac{P(C)P(E_1 \cup E_2|C)}{P(E_1 \cup E_2)} = \\ &= \frac{P(C)P(E_1 \cup E_2|C)}{P(C)P(E_1 \cup E_2|C) + P(\bar{C})P(E_1 \cup E_2|\bar{C})} \end{aligned}$$

Dai dati del problema:

$$P(C) = p, \quad P(E_1 \cup E_2|C) = 2r - r^2, \quad P(E_1 \cup E_2|\bar{C}) = 2s - s^2$$

da cui

$$P(C|E_1 \cup E_2) = \frac{p(2r - r^2)}{p(2r - r^2) + (1-p)(2s - s^2)}$$

**ii-b)** Si deve calcolare  $P(E_1|E_1 \cup E_2)$ .

Ovviamente

$$\begin{aligned} P(E_1|E_1 \cup E_2) &= \frac{P(E_1)}{P(E_1 \cup E_2)} \\ &= \frac{P(E_1|C)P(C) + P(E_1|\bar{C})P(\bar{C})}{P(E_1 \cup E_2|C)P(C) + P(E_1 \cup E_2|\bar{C})P(\bar{C})} = \frac{rp + s(1-p)}{p(2r - r^2) + (1-p)(2s - s^2)} \end{aligned}$$