

Corso di Laurea Triennale in Matematica
Corso di Calcolo delle Probabilità 1
A. A. 2004/2005
prova scritta (11/07/2005)(docenti G. Nappo, F. Spizzichino)

La prova scritta consiste nello svolgimento dei punti non facoltativi dei seguenti Esercizi. Inoltre, a scelta dallo studente, va svolto almeno uno fra i rimanenti punti facoltativi. (tempo a disposizione: 3 ore)

Scrivere su ogni foglio NOME e COGNOME.

Le risposte devono essere giustificate sui fogli protocollo e riportate nel foglio RISPOSTE.

Esercizio 1. In un torneo di scacchi, Alfredo deve giocare sei partite. L'insieme dei partecipanti è costituito da giocatori di tre livelli: principianti, senior ed esperti. Supponiamo che la probabilità che Alfredo vinca ciascuna singola partita contro un principiante sia uguale al 70%, mentre le analoghe probabilità di vittoria contro giocatori senior ed esperti siano uguali al 50% e al 30%, rispettivamente.

Supponiamo ora che gli avversari di Alfredo siano estratti a caso nell'insieme dei partecipanti e che tale insieme sia costituito da un 60% di principianti, da un 25% di senior, e da un 15% di esperti.

- a) Calcolare la probabilità che Alfredo vinca la prima partita.
- b) Come debbono essere valutate le probabilità che il primo avversario sia rispettivamente un principiante, un senior, e un esperto, sapendo che Alfredo ha vinto la prima partita?
- c) (**facoltativo**) Tenendo presente che le estrazioni per determinare gli avversari nelle sei partite avvengono **con reinserimento**, calcolare la probabilità che nelle 6 partite Alfredo incontri esattamente due principianti ed esattamente due esperti.

Esercizio 2. All'interno del torneo di scacchi dell'Esercizio 1, Alfredo deve giocare altre partite tutte contro **Benedetto, che è un giocatore esperto**. Si supponga inoltre che vi sia indipendenza stocastica fra ciascuna partita.

- a) Calcolare la probabilità che Alfredo vinca Benedetto esattamente 2 volte nelle prime sei partite.
- b) Calcolare la probabilità che Alfredo vinca Benedetto almeno 2 volte nelle prime sei partite.
- c) Calcolare approssimativamente la probabilità che Alfredo vinca Benedetto in almeno un terzo delle prime 84 partite.

Esercizio 3. Da un'urna che contiene 10 palline di cui 3 rosse e le rimanenti 7 verdi, si estraggono **senza reinserimento** 4 palline. Sia R il numero delle palline rosse estratte.

a) Individuare il tipo di distribuzione di R e mostrare che il valore atteso $E(R)$ vale $\frac{6}{5}$.

Si supponga ora che le palline rosse siano 2 carminio e una porpora, e siano R_c ed R_p le variabili aleatorie che contano il numero di palline rosso carminio e rosso porpora rispettivamente.

Accade che la distribuzione congiunta di R ed R_c sia data dalla seguente tabella:

$R \backslash R_c$	0	1	2
0	$\frac{15}{90}$	0	0
1	$\frac{15}{90}$	$\frac{30}{90}$	0
2	0	$\frac{18}{90}$	$\frac{9}{90}$
3	0	0	$\frac{3}{90}$

b) Mostrare che $P(R = 3, R_c = 2) = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$

c) Le variabili aleatorie R ed R_c sono indipendenti?

d) Trovare la distribuzione congiunta di R_c e di R_p , utilizzando la tabella della distribuzione congiunta di R ed R_c ed il fatto che $R_p = R - R_c$.

e) (**facoltativo**) Dimostrare il fatto che la distribuzione congiunta di R ed R_c è individuata dalla tabella precedente.

Esercizio 4. X è una variabile aleatoria con funzione di densità data da

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot \cos x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

a) Calcolare il valore della costante k

b) Calcolare $P(X > \frac{\pi}{4})$

c) (**facoltativo**) Calcolare il valore atteso di X (**suggerimento:** utilizzare la formula di integrazione per parti)

d) (**facoltativo**) Calcolare la densità di $Y = 2X + \pi$

Calcolo delle Probabilità 1

prova scritta di lunedì 11 luglio 2005 - FOGLIO RISPOSTE

NOME E COGNOME

docente

G. Nappo

F. Spizzichino

Esercizio 1.

- a) Probabilità che Alfredo vinca la prima partita
- b) Sapendo che Alfredo ha vinto la prima partita, la probabilità che il primo avversario sia un principiante=.....; che sia un senior=.....; che sia un esperto=.....
- c) (**facoltativo**) Probabilità che nelle 6 partite Alfredo incontri esattamente due principianti ed esattamente due esperti=.....

Esercizio 2.

- a) Probabilità che Alfredo vinca esattamente 2 delle prime sei partite=.....
- b) Probabilità che Alfredo vinca almeno 2 delle prime sei partite =.....
- c) Probabilità che Alfredo vinca almeno un terzo delle prime 84 partite \simeq

Esercizio 3.

- a) La distribuzione di R è $E(R) = \frac{6}{5}$ mostrato non mostrato
- b) $P(R = 3, R_c = 2) = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$ mostrato non mostrato
- c) Le variabili aleatorie R ed R_c sono indipendenti NON sono indipendenti

d) Distribuzione congiunta di R_c e di R_p ,

$R_p \backslash R_c$	0	1	2
0			
1			

- e) (**facoltativo**) Distribuzione congiunta di R ed R_c mostrato non mostrato

Esercizio 4.

- a) $k=$
- b) $P(X > \frac{\pi}{4})=$
- c) (**facoltativo**) Valore atteso di $X=$
- d) (**facoltativo**)

Densità di $Y = 2X + \pi$ $f_Y(y) = \left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$

Soluzioni della prova scritta del 11 luglio 2005 (docenti G. Nappo, F. Spizzichino)

Esercizio 1. *In un torneo di scacchi, Alfredo deve giocare sei partite. L'insieme dei partecipanti è costituito da giocatori di tre livelli: principianti, senior ed esperti. Supponiamo che la probabilità che Alfredo vinca ciascuna singola partita contro un principiante sia uguale al 70%, mentre le analoghe probabilità di vittoria contro giocatori senior ed esperti siano uguali al 50% e al 30%, rispettivamente.*

Supponiamo ora che gli avversari di Alfredo siano estratti a caso nell'insieme dei partecipanti e che tale insieme sia costituito da un 60% di principianti, da un 25% di senior, e da un 15% di esperti.

a) *Calcolare la probabilità che Alfredo vinca la prima partita.*

Soluzione:

Infatti, posto

$$A_1 = \{\text{Alfredo vince la prima partita}\},$$

$H_i = \{\text{il primo avversario di Alfredo è di livello } i\}$, per $i = p, s, e$ ($p = \text{principiante}$, $s = \text{senior}$, $e = \text{esperto}$), dai dati del problema si evince che

$$\begin{aligned} P(A_1|H_p) &= \frac{70}{100} = \frac{7}{10} & P(A_1|H_s) &= \frac{50}{100} = \frac{5}{10} & P(A_1|H_e) &= \frac{30}{100} = \frac{3}{10} \\ P(H_p) &= \frac{60}{100} & P(H_s) &= \frac{25}{100} & P(H_e) &= \frac{15}{100} \end{aligned}$$

e quindi si ha

$$\begin{aligned} P(A_1) &= P(A_1|H_p)P(H_p) + P(A_1|H_s)P(H_s) + P(A_1|H_e)P(H_e) \\ &= \frac{7}{10} \frac{60}{100} + \frac{5}{10} \frac{25}{100} + \frac{3}{10} \frac{15}{100} = \frac{420 + 125 + 45}{1000} = \frac{590}{1000} = \frac{59}{100} \end{aligned}$$

b) *Come debbono essere valutate le probabilità che il primo avversario sia rispettivamente un principiante, un senior, e un esperto, sapendo che Alfredo ha vinto la prima partita?*

Soluzione: Le probabilità cercate valgono rispettivamente $\frac{420}{590}$, $\frac{125}{590}$, $\frac{45}{590}$

Infatti si tratta di valutare $P(H_i|A_1)$, per $i = p, s, e$:

$$\begin{aligned} P(H_p|A_1) &= \frac{P(A_1|H_p)P(H_p)}{P(A_1|H_p)P(H_p) + P(A_1|H_s)P(H_s) + P(A_1|H_e)P(H_e)} = \frac{\frac{7}{10} \frac{60}{100}}{\frac{7}{10} \frac{60}{100} + \frac{5}{10} \frac{25}{100} + \frac{3}{10} \frac{15}{100}} \\ &= \frac{7 \cdot 60}{7 \cdot 60 + 5 \cdot 25 + 3 \cdot 15} = \frac{420}{590} = \frac{42}{59} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(H_s|A_1) &= \frac{P(A_1|H_s)P(H_s)}{P(A_1|H_p)P(H_p) + P(A_1|H_s)P(H_s) + P(A_1|H_e)P(H_e)} = \frac{\frac{5}{10} \frac{25}{100}}{\frac{7}{10} \frac{60}{100} + \frac{5}{10} \frac{25}{100} + \frac{3}{10} \frac{15}{100}} \\ &= \frac{5 \cdot 25}{7 \cdot 60 + 5 \cdot 25 + 3 \cdot 15} = \frac{125}{590} \end{aligned}$$

Per $P(H_e|A_1)$ basta osservare che, essendo $E \rightarrow P(E|A_1)$ una probabilità, ed essendo $H_e = \overline{(H_p \cup H_s)}$ deve essere

$$P(H_e|A_1) = 1 - P(H_p|A_1) - P(H_s|A_1) = 1 - \frac{420}{590} - \frac{125}{590} = \frac{45}{590}.$$

Come verifica si può ripetere il conto

$$\begin{aligned} P(H_e|A_1) &= \frac{P(A_1|H_e)P(H_e)}{P(A_1|H_p)P(H_p) + P(A_1|H_s)P(H_s) + P(A_1|H_e)P(H_e)} = \frac{\frac{3}{10} \frac{15}{100}}{\frac{7}{10} \frac{60}{100} + \frac{5}{10} \frac{25}{100} + \frac{3}{10} \frac{15}{100}} \\ &= \frac{7 \cdot 60}{7 \cdot 60 + 5 \cdot 25 + 3 \cdot 15} = \frac{45}{590} \end{aligned}$$

c) (facoltativo) **Tenendo presente che le estrazioni per determinare gli avversari nelle sei partite avvengono con reinserimento, calcolare la probabilità che nelle 6 partite Alfredo incontri esattamente due principianti ed esattamente due esperti.**

Soluzione: La probabilità cercata vale $\frac{6!}{2!2!2!} \left(\frac{60}{100}\right)^2 \left(\frac{25}{100}\right)^2 \left(\frac{15}{100}\right)^2$

Infatti, posto $H_i^{(\ell)} = \{\text{l'avversario numero } \ell \text{ di Alfredo è di livello } i\}$, per $i = p, s, e$ (così $H_i = H_i^{(1)}$), la situazione corrisponde alla situazione di 6 prove ripetute ($\ell = 1, 2, \dots, 6$) con 3 esiti possibili (p, s, e). Di conseguenza si usa il modello multinomiale, con X_p, X_s ed X_e che corrispondono rispettivamente al numero di avversari principianti, senior ed esperti incontrati da Alfredo nelle 6 partite: essendo $X_p + X_s + X_e = 6$,

$$P(X_p = 2, X_e = 2) = P(X_p = 2, X_s = 2, X_e = 2) = \frac{6!}{2!2!2!} \left(\frac{60}{100}\right)^2 \left(\frac{25}{100}\right)^2 \left(\frac{15}{100}\right)^2$$

Esercizio 2. *All'interno del torneo di scacchi dell'Esercizio 1, Alfredo deve giocare altre partite tutte contro Benedetto, che è un giocatore esperto. Si supponga inoltre che vi sia indipendenza stocastica fra ciascuna partita.*

a) **Calcolare la probabilità che Alfredo vinca Benedetto esattamente 2 volte nelle prime sei partite.**

Soluzione: La probabilità cercata vale $\frac{15 \cdot 3^2 \cdot 7^4}{10^6} \left(= \frac{3^3 \cdot 5 \cdot 7^4}{10^6}\right)$.

Infatti basta osservare che si tratta di 6 prove ripetute (ovvero di uno schema di Bernoulli) con probabilità di successo $\theta = \frac{3}{10}$, in quanto Benedetto è un giocatore esperto, e, posto S_n il numero di successi (=vittorie di Alfredo) su n prove (=partite), la probabilità cercata coincide con

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} \theta^k (1 - \theta)^{n-k} = \binom{6}{2} \left(\frac{3}{10}\right)^2 \left(1 - \frac{3}{10}\right)^4 = \frac{15 \cdot 3^2 \cdot 7^4}{10^6} \left(= \frac{3^3 \cdot 5 \cdot 7^4}{10^6}\right)$$

b) **Calcolare la probabilità che Alfredo vinca Benedetto almeno 2 volte nelle prime sei partite.**

Soluzione: La probabilità cercata vale $1 - \left(\frac{7}{10}\right)^6 - 6 \frac{3}{10} \left(\frac{7}{10}\right)^5$.

Infatti, con la stessa notazione del punto precedente, si cerca

$$P(S_n \geq k) = \sum_{h \geq k} \binom{n}{h} \theta^h (1 - \theta)^{n-h} = 1 - P(S_n < k) = 1 - \sum_{h < k} \binom{n}{h} \theta^h (1 - \theta)^{n-h},$$

e nel nostro caso

$$\begin{aligned}
 P(S_6 \geq 2) &= \sum_{2 \leq k} \binom{6}{k} \left(\frac{3}{10}\right)^k \left(\frac{7}{10}\right)^{6-k} = 1 - P(S_6 < 2) = 1 - P(S_6 = 0) - P(S_6 = 1) \\
 &= 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^6 - 6 \frac{3}{10} \left(\frac{7}{10}\right)^5 \\
 &\quad \left(= 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^5 \left[\frac{7}{10} + \frac{3 \cdot 6}{10}\right] = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^5 \frac{25}{10}\right)
 \end{aligned}$$

c) Calcolare approssimativamente la probabilità che Alfredo vinca Benedetto in almeno un terzo delle prime 84 partite.

Soluzione:

Infatti si tratta di calcolare

$$P(S_n \geq \frac{n}{3}) = P\left(\frac{S_n - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \geq \frac{\frac{n}{3} - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}\right) = P(S_n^* \geq \frac{\frac{n}{3} - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}})$$

dove si è posto S_n^* la standardizzata di S_n . Per l'approssimazione normale, che deriva dal Teorema Centrale del Limite si ha che¹

$$P(S_n^* \geq \frac{\frac{n}{3} - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}) \simeq P(Z \geq \frac{\frac{n}{3} - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}) = 1 - \Phi\left(\frac{\frac{n}{3} - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}\right).$$

Nel nostro caso $\theta = \frac{3}{10}$ ed $n = 84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$, da cui la probabilità cercata si può approssimare con

$$1 - \Phi\left(\frac{\frac{n}{3} - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2^2 \cdot 3 \cdot 7 \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{10}\right)}{\sqrt{2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10}}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2^2 \cdot 3 \cdot 7 \left(\frac{10}{30} - \frac{9}{30}\right)}{\frac{2 \cdot 3 \cdot 7}{10}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2}{3}\right) \simeq 1 - \Phi(0,66) \simeq 1 - 0,7454 = 0,2546$$

Esercizio 3. Da un'urna che contiene 10 palline di cui 3 rosse e le rimanenti 7 verdi, si estraggono senza reinserimento 4 palline. Sia R il numero delle palline rosse estratte.

a) Individuare il tipo di distribuzione di R e mostrare che il valore atteso $E(R) = \frac{6}{5}$.

Soluzione: La distribuzione di R è di tipo ipergeometrico, e precisamente

$$P(R = i) = \frac{\binom{3}{i} \cdot \binom{7}{4-i}}{\binom{10}{4}}, \quad \text{per } i = 0, 1, 2, 3$$

¹Ovviamente si poteva anche notare che

$$P(S_n \geq \frac{n}{3}) = 1 - P(S_n < \frac{n}{3}) = 1 - P(S_n \leq \frac{n}{3} - 1) = 1 - P(S_n^* \leq \frac{\frac{n}{3} - 1 - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}})$$

In questo modo, per ottenere l'approssimazione, si sarebbe arrivati invece al calcolo di

$$1 - \Phi\left(\frac{2^2 \cdot 3 \cdot 7 \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{10}\right) - 1}{\sqrt{2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10}}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2^2 \cdot 3 \cdot 7 \left(\frac{10}{30} - \frac{9}{30}\right) - 1}{\frac{2 \cdot 3 \cdot 7}{10}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2}{3} - \frac{10}{42}\right) \simeq 1 - \Phi(0,43) \simeq 1 - 0,6664 = 0,3336$$

Il motivo della differenza sta nel fatto che $n = 84$ è un numero relativamente piccolo, per cui la differenza di $\sqrt{\frac{1}{n\theta(1-\theta)}} = \frac{10}{42}$ tra i due calcoli è abbastanza grande. Chiaramente al crescere di n la differenza tra $\frac{\frac{n}{3} - 1 - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}$ e $\frac{\frac{n}{3} - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}$, diviene trascurabile. In realtà dal punto di vista numerico sarebbe meglio, nel caso dell'approssimazione normale delle variabili aleatorie binomiali, come in questo caso, sarebbe bene osservare che

$$P(S_n < k) = P(S_n \leq k - \frac{1}{2})$$

e quindi, nel nostro caso, calcolare Φ in $\frac{\frac{n}{3} - \frac{1}{2} - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} = \frac{2}{3} - \frac{10}{84} \simeq 0,547$

per cui

$$P(R = 0) = \frac{\binom{3}{0} \cdot \binom{7}{4}}{\binom{10}{4}} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4!} \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{15}{90} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

$$P(R = 1) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{7}{3}}{\binom{10}{4}} = 3 \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{45}{90} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

$$P(R = 2) = \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{7}{2}}{\binom{10}{4}} = 3 \frac{7 \cdot 6}{2} \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{27}{90} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

e

$$P(R = 3) = \frac{\binom{3}{3} \cdot \binom{7}{1}}{\binom{10}{4}} = 7 \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$$

Si supponga ora che le palline rosse siano 2 carminio e una porpora, e siano R_c ed R_p le variabili aleatorie che contano il numero di palline rosso carminio e rosso porpora rispettivamente.

Accade che la distribuzione congiunta di R ed R_c sia data dalla seguente tabella:

$R \backslash R_c$	0	1	2
0	$\frac{15}{90}$	0	0
1	$\frac{15}{90}$	$\frac{30}{90}$	0
2	0	$\frac{18}{90}$	$\frac{9}{90}$
3	0	0	$\frac{3}{90}$

b) Mostrare che $P(R = 3, R_c = 2) = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$

Soluzione: Basta notare che se sono uscite tutte e tre le palline rosse, allora ovviamente sono uscite anche tutte e due le palline carminio e quindi

$$P(R = 3, R_c = 2) = P(R = 3) = \frac{\binom{3}{3} \cdot \binom{7}{1}}{\binom{10}{4}} = 7 \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$$

c) Le variabili aleatorie R ed R_c sono indipendenti?

Soluzione: R ed R_c NON sono indipendenti.

Infatti, ad esempio

$$0 = P(R = 0, R_c = 2) \neq P(R = 0) P(R_c = 2) (> 0).$$

d) Trovare la distribuzione congiunta di R_c e di R_p , utilizzando la tabella della distribuzione congiunta di R ed R_c ed il fatto che $R_p = R - R_c$.

Soluzione:

Infatti, considerando che

$R \backslash R_c$	0	1	2
0	$(R_c, R_p) = (0, 0)$	*	*
1	$(R_c, R_p) = (0, 1)$	$(R_c, R_p) = (1, 0)$	*
2	*	$(R_c, R_p) = (1, 1)$	$(R_c, R_p) = (2, 0)$
3	*	*	$(R_c, R_p) = (2, 1)$

$R_p \backslash R_c$	0	1	2
0	$\frac{15}{90}$	$\frac{30}{90}$	$\frac{3}{90}$
1	$\frac{15}{90}$	$\frac{18}{90}$	$\frac{9}{90}$

si ottiene che

e) (facoltativo) **Dimostrare il fatto che la distribuzione congiunta di R ed R_c è individuata dalla tabella precedente.**

Soluzione:

Infatti si tratta in realtà solo di notare che, posto V il numero di palline verdi estratte si ha

$$P(R = 0, R_c = 0) = P(R_c = 0, R_p = 0) = P(R_c = 0, R_p = 0, V = 4) = \frac{\binom{2}{0} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{7}{4}}{\binom{10}{4}} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4!} \frac{4!}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{15}{90}$$

$$P(R = 1, R_c = 0) = P(R_c = 0, R_p = 1) = P(R_c = 0, R_p = 1, V = 3) = \frac{\binom{2}{0} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{7}{3}}{\binom{10}{4}} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} \frac{4!}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{15}{90}$$

$$P(R = 1, R_c = 1) = P(R_c = 1, R_p = 0) = P(R_c = 1, R_p = 0, V = 3) = \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{1}{0} \cdot \binom{7}{3}}{\binom{10}{4}} = 2 \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} \frac{4!}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{30}{90}$$

$$P(R = 2, R_c = 1) = P(R_c = 1, R_p = 1) = P(R_c = 1, R_p = 1, V = 2) = \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{7}{2}}{\binom{10}{4}} = 2 \frac{7 \cdot 6}{2!} \frac{4!}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{18}{90}$$

$$P(R = 2, R_c = 2) = P(R_c = 2, R_p = 0) = P(R_c = 2, R_p = 0, V = 2) = \frac{\binom{2}{2} \cdot \binom{1}{0} \cdot \binom{7}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{7 \cdot 6}{2!} \frac{4!}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{9}{90}$$

$$P(R = 3, R_c = 2) = P(R_c = 2, R_p = 1) = P(R_c = 2, R_p = 1, V = 1) = \frac{\binom{2}{2} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{7}{1}}{\binom{10}{4}} = 7 \frac{4!}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{3}{90}$$

e che gli eventi rimanenti sono impossibili.

Esercizio 4. X è una variabile aleatoria con funzione di densità data da

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot \cos x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

a) **Calcolare il valore della costante k**

Soluzione: $k = 1$.

Infatti

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

b) **Calcolare $P(X > \frac{\pi}{4})$**

Soluzione: $P(X > \frac{\pi}{4}) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

Infatti

$$P(X > \frac{\pi}{4}) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = [\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 1 - 0,7071 = 0,2929$$

c) (facoltativo) **Calcolare il valore atteso di X (suggerimento: utilizzare la formula di integrazione per parti)**

Soluzione: $E(X) = \frac{\pi}{2} - 1$

Infatti, tenendo conto che $\cos x dx = d \sin x$ e che $-\sin x dx = d \cos x$

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d \sin x = [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\ &= \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} + (\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0) = \frac{\pi}{2} - 1 \simeq 0,5707 \end{aligned}$$

d) (facoltativo) Calcolare la densità di $Y = 2X + \pi$

Soluzione: $f_Y(y) = \frac{1}{2} \cos(\frac{y-\pi}{2})$ per $\pi \leq y \leq 2\pi$, e $f_Y(y) = 0$ altrimenti.

Infatti

$$F_Y(y) = P(2X + \pi \leq y) = P(X \leq \frac{y-\pi}{2}) = F_X(\frac{y-\pi}{2})$$

quindi poiché $f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$ si ha che

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X(\frac{y-\pi}{2}) = F'_X(\frac{y-\pi}{2}) \frac{d}{dy} \frac{y-\pi}{2} = \frac{1}{2} f_X(\frac{y-\pi}{2})$$

Di conseguenza

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos(\frac{y-\pi}{2}) & 0 \leq \frac{y-\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \pi \leq y \leq 2\pi \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$