

Corso di Laurea Triennale in Matematica
Calcolo delle Probabilità I (docenti G. Nappo, F. Spizzichino)

Prima prova in itinere, Mercoledì 20 Aprile 2005 (tempo a disposizione: 3 ore).

Scrivere su ogni foglio **NOME** e **COGNOME**. Le risposte devono essere giustificate sui fogli protocollo e riportate nel foglio **RISPOSTE**.

Esercizio 1. Un test clinico dà risultato "positivo" con probabilità 0.9 se è effettuato su una persona che ha contratto un certo tipo di infezione; il test dà invece risultato "positivo" con probabilità 0.15 se è effettuato su una persona "sana" (cioè che non ha contratto quel tipo di infezione).

I PARTE Tizio si sottopone al test (una sola volta). Non è noto se Tizio sia sano o infetto e queste due diverse ipotesi alternative hanno rispettivamente probabilità del 60% e del 40%.

I.a) Calcolare la probabilità dell'evento

$$B = \{ \textit{Tizio ottiene risultato "positivo"} \}.$$

I.b) Quanto vale la probabilità condizionata dell'ipotesi che Tizio sia sano **dato che** è stato osservato il risultato B ?

II PARTE Se una stessa persona ripete il test più volte (restando ovviamente invariato il suo stato di salute, cioè rimanendo sempre infetto o sempre sano), allora i risultati ottenuti sono stocasticamente indipendenti fra di loro e con probabilità date come sopra, **a seconda che** sia infetta o sana. Caio si sottopone al test **4 volte consecutive**.

II.a) Calcolare la probabilità dell'evento

$$E = \{ \textit{Caio ottiene due volte risultato "positivo" e due volte risultato "negativo"} \}$$

nelle tre seguenti diverse situazioni:

a1) Caio è sano

a2) Caio è infetto

a3) Non è certo se Caio sia sano o infetto e queste due diverse ipotesi alternative hanno rispettivamente probabilità del 60% e del 40%.

II.b) Nella situazione **a3)**, quanto vale la probabilità condizionata dell'ipotesi che Caio sia sano **dato che** è stato osservato il risultato E ?

Esercizio 2. Ogni Ferragosto, al paese di Fabio e Gianna si organizza una lotteria. La lotteria prevede $r = 3$ biglietti vincenti su $n = 10$ venduti¹, ciascuno con vincita $c = 1$. Fabio e Gianna comprano rispettivamente $\ell = 2$ ed $m = 2$ biglietti di questa lotteria. Siano X ed Y le variabili aleatorie che descrivono rispettivamente la vincita di Fabio e quella di Gianna, per il prossimo Ferragosto.

a1) Calcolare (svolgendo esplicitamente i calcoli) la distribuzione di probabilità di X .

a2) Che potete dire sulla distribuzione di Y ?

¹Si ricordi che in una lotteria ci sono n biglietti numerati da 1 ad n , e vengono estratti r numeri tra 1 ed n . I biglietti corrispondenti ai numeri estratti ricevono il premio.

- a3) Come cambierebbero le distribuzioni di probabilità di X e di Y se invece fosse $c = 2$?
- b1) Sia $A = \{\text{Fabio vince qualcosa}\}$. Esprimere l'evento A in termini della variabile aleatoria X e calcolarne la probabilità.
- b2) Sia $B = \{\text{sia Fabio che Gianna non vincono nulla}\}$.
Calcolare la probabilità di B ed esprimere tale evento in termini di X e Y .
- c) Siano, per $i, j = 1, 2, 3$,
 $F_i = \{\text{l}'i\text{-esimo numero estratto corrisponde ad un biglietto di Fabio}\}$
 $G_j = \{\text{il } j\text{-esimo numero estratto corrisponde ad un biglietto di Gianna}\}$.
- c1) Calcolare la probabilità dell'evento $F_1 \cap F_2 \cap \overline{G_3}$.
- c2) Esprimere l'evento $\{X = 2, Y = 0\}$ in termini degli eventi F_i ed G_j (e/o dei loro complementari), e calcolarne la probabilità (siamo sempre nel caso $c = 1$).
- c3) Le variabili aleatorie X ed Y sono indipendenti?
- c4) (Facoltativo) Calcolare la distribuzione di probabilità congiunta di X ed Y .
- d) Calcolare la distribuzione condizionata di Y dato $\{X = 2\}$.
- e) Individuare la distribuzione di probabilità di Z , la variabile aleatoria che rappresenta la vincita complessiva dei due giocatori.
- f) (Facoltativo) Calcolare il valore atteso di X , di Y e di Z .
- g) (Facoltativo) Sempre con $c = 1$, svolgere l'esercizio con n, r, ℓ ed m generici.

Esercizio 3. X ed Y sono due variabili aleatorie la cui distribuzione di probabilità congiunta è indicata nella seguente tabella (per X l'insieme dei valori possibili è costituito da $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, mentre per Y l'insieme dei valori possibili è costituito da $\{-1, 0, 1\}$):

$Y \backslash X$	-2	-1	0	1	2
-1	0.1	0.1	0.2	0	0
0	0	0.2	θ	θ	0
1	0	0	θ	0.2	θ

- a) Calcolare il valore della costante θ .
- b) Calcolare la distribuzione marginale di Y .
- c) Calcolare la distribuzione condizionata di X , dato $\{Y = 0\}$.
- d) $\{X = 0\}$ ed $\{Y = 0\}$ sono stocasticamente indipendenti, correlati positivamente o correlati negativamente?
- e) X ed Y sono stocasticamente indipendenti?
- f) Calcolare la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria $Z = X + Y$.
- g) (facoltativo) Calcolare il valore atteso della variabile aleatoria Z .

FOGLIO RISPOSTE della prima prova in itinere, Mercoledì 21 Aprile 2004

NOME e COGNOME

canale NAPPO

canale SPIZZICHINO

Esercizio 1. -----

I.a) $P(B) = \dots\dots\dots$

I.b) La probabilità che Tizio sia sano dato che è stato osservato il risultato B vale

II.a1) (se sano) $p_1 = \dots\dots\dots$ II.a2) (se infetto) $p_2 = \dots\dots\dots$ II.a3) $p = \dots\dots\dots$

I.b) La probabilità che Caio sia sano dato E vale

Esercizio 2. -----

a1)

k			
$P(X = k)$			

a2) $P(Y = k) = \dots\dots\dots$

a3)

$(c=2) h$			
$P_2(X = h)$			

b1) $P(A) = P(X \dots\dots) = \dots\dots\dots$

b2) $P(B) = P(X \dots\dots, Y \dots\dots) = \dots\dots\dots$

c1) $P(F_1 \cap F_2 \cap \overline{G_3}) = \dots\dots\dots$

c2) $\{X = 2, Y = 0\} = \dots\dots\dots$ $P(X = 2, Y = 0) = \dots\dots\dots$

c3) X ed Y sono stocasticamente indipendenti SI NO

c4) (facoltativo) svolto SI NO

d) la distribuzione condizionata di Y , dato $\{X = 2\}$ è individuata da

y	0	1	2
$P(Y = y X = 2)$			

e) la distribuzione di probabilità di Z è del tipo

$P(Z = k) = \dots\dots\dots$ per $k = \dots\dots\dots$

f) (facoltativo) (valori attesi di X, Y e Z) svolto SI NO

g) (facoltativo) (n, r, ℓ, m generici) svolto SI NO

Esercizio 3. -----

a) il valore della costante θ è

b) la distribuzione marginale di Y è individuata da

y	-1	0	1
$P(Y = y)$			

c) la distribuzione condizionata di X , dato $\{Y = 0\}$ è individuata da

x	-2	-1	0	1	2
$P(X = x Y = 0)$					

d) $\{X = 0\}$ ed $\{Y = 0\}$ sono

stocasticamente indipendenti correlati positivamente correlati negativamente

e) X ed Y sono stocasticamente indipendenti SI NO

f) la distribuzione di probabilità di $Z = X + Y$ è individuata da

z							
$P(Z = z)$							

g) (facoltativo) il valore atteso della variabile aleatoria Z vale