

La prova scritta consiste nello svolgimento dei punti non facoltativi dei diversi Esercizi. Inoltre, a scelta dallo studente, va svolto almeno uno fra tutti i punti indicati come facoltativi.

Scrivere su ogni foglio NOME e COGNOME.

Le risposte devono essere giustificate sui fogli protocollo e riportate nel foglio RISPOSTE.

Esercizio 1. Caio gioca al seguente gioco del lotto semplificato: da un'urna che contiene 10 palline numerate da 1 a 10, si estraggono **senza reinserimento** 4 palline. Caio punta sulla coppia di numeri $\{5, 10\}$. Sia X la variabile aleatoria che conta quanti numeri indovina Caio, ossia quanti fra i numeri $\{5, 10\}$ vengono estratti.

- a) Individuare il tipo di distribuzione di X , e mostrare che il valore atteso $E(X)$ vale $\frac{4}{5}$.
- b) Mostrare che la varianza di X vale $\frac{32}{75}$.

Anche Tizio e Sempronio giocano insieme a Caio. Tizio punta sulla terna di numeri $\{1, 5, 10\}$, e sia Y la variabile aleatoria che conta i numeri indovinati da Tizio. Invece Sempronio lancia una moneta ben equilibrata: se esce testa punta sulla coppia $\{5, 10\}$, mentre se esce croce punta sulla terna di numeri $\{1, 5, 10\}$. Sia Z la variabile aleatoria che conta quanti sono i numeri indovinati da Sempronio.

c) Scrivere in termini degli eventi $T = \{\text{esce testa}\}$ e $C = \{\text{esce croce}\}$ e delle variabili aleatorie X e Y , i seguenti eventi E , F , G ed A , e calcolarne le probabilità:

$$E = \{\text{Caio non indovina neanche un numero}\}$$

$$F = \{\text{Tizio non indovina neanche un numero}\}$$

$$G = \{\text{Sempronio non indovina neanche un numero}\}$$

$$A = \{\text{sia Caio che Sempronio non indovinano neanche un numero}\}$$

d) **Sapendo che** Sempronio non ha indovinato neanche un numero, calcolare la probabilità che sia uscita testa e la probabilità che sia uscita croce.

Esercizio 2. X ed Y sono due variabili aleatorie che assumono valore negli insiemi $\{1, 2, 3, 4\}$ e $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$, rispettivamente. La loro distribuzione di probabilità congiunta è individuata dalla seguente tabella

$X \backslash Y$	0	$\frac{1}{2}$	1
1	c	$2c$	$3c$
2	0	c	0
3	c	0	c
4	0	c	0

- Determinare il valore della costante c .
- Calcolare la distribuzione marginale di Y .
- Determinare la distribuzione condizionata di Y dato $\{X = 1\}$.
- Le variabili aleatorie X ed Y sono indipendenti?
- Determinare la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria $Z = X + Y$.
- (facoltativo)** Calcolare il valore atteso della variabile aleatoria $Z = X + Y$.

Esercizio 3. X è una variabile aleatoria tale che, per un'opportuna costante $K > 0$, ammette una densità della forma

$$f(x) = \begin{cases} K \cdot 3x^2 & \text{per } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Determinare il valore di K
- Determinare la funzione di distribuzione di X , e disegnarne il grafico.
- (facoltativo)** Calcolare la varianza di X .

Esercizio 4. Una moneta equilibrata viene lanciata n volte. Per ogni $k \leq n$ poniamo $X_k = 1$ se il k -esimo lancio ha dato testa e $X_k = 0$ se ha dato croce. Indichiamo con $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ la proporzione di teste negli n lanci.

- Usando la disuguaglianza di Chebyshev, trovare una minorazione per $P(|\bar{X}_n - \frac{1}{2}| \leq 0.1)$, per $n = 900$;
- Usando l'approssimazione normale, calcolare approssimativamente $P(\bar{X}_n \geq 0.51)$, per $n = 900$;
- (facoltativo)** Usando l'approssimazione normale, calcolare approssimativamente

$$P(|\bar{X}_n - \frac{1}{2}| \leq 0.01), \quad \text{per } n = 900;$$

- (facoltativo)** stimare quanto deve essere grande n perché sia

$$P(|\bar{X}_n - \frac{1}{2}| \leq 0.01) \geq 0.95.$$

Calcolo delle Probabilità 1

prova scritta di lunedì 20 giugno 2005 - FOGLIO RISPOSTE

NOME E COGNOME

Esercizio 1 a) La distribuzione di X è di tipo

Dimostrazione dell'identità $E(X) = \frac{4}{5}$ svolta non svolta

b) Dimostrazione dell'identità $Var(X) = \frac{32}{75}$ svolta non svolta

c) $E = \dots\dots\dots$ $F = \dots\dots\dots$ $G = \dots\dots\dots$

$P(E) = \dots\dots\dots$ $P(F) = \dots\dots\dots$ $P(G) = \dots\dots\dots$

$A = \dots\dots\dots$ $P(A) = \dots\dots\dots$

d) $P(T|G) = \dots\dots\dots$ $P(C|G) = \dots\dots\dots$

Esercizio 2 a) $c = \dots\dots\dots$

b) la distribuzione marginale di Y è data da

y	0	$\frac{1}{2}$	1
$P(Y = y)$

c) la distrib. condizionata di Y dato $\{X = 1\}$ è data da

y	0	$\frac{1}{2}$	1
.....

d) X e Y sono stocasticamente indipendenti? SI NO

.....

e) la distribuzione di Z è data da

.....

.....

.....

f) (facoltativo) $\mathbb{E}(Z) = \dots\dots\dots$

Esercizio 3 a) $K = \dots\dots\dots$

b) grafico F SI NO ; $F(x) = \left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$

c) (facoltativo) $Var(X) = \dots\dots\dots$

Esercizio 4 a) Con la disuguaglianza Chebyshev si ottiene $P\{|\bar{X}_{900} - \frac{1}{2}| \leq 0.1\} \dots\dots\dots$

b) Con l'approssimazione normale si ottiene $P\{\bar{X}_{900} \geq 0.51\} \simeq \dots\dots\dots$

c) (facoltativo) Con l'approssimazione normale si ottiene $P\{|\bar{X}_{900} - \frac{1}{2}| \leq 0.01\} \simeq \dots\dots\dots$

d) (facoltativo) $n \geq \dots\dots\dots$

Esercizio 1. *Caio gioca al seguente gioco del lotto semplificato: da un'urna che contiene 10 palline numerate da 1 a 10, si estraggono senza reinserimento 4 palline. Caio punta sulla coppia di numeri $\{5, 10\}$. Sia X la variabile aleatoria che conta quanti numeri indovina Caio, ossia quanti fra i numeri $\{5, 10\}$ vengono estratti.*

a) *Individuare il tipo di distribuzione di X , e mostrare che il valore atteso $E(X)$ vale $\frac{4}{5}$.*

Soluzione: La variabile aleatoria X ha distribuzione ipergeometrica di parametri $M = 10$, $m_1 = 2$ ed $n = 4$, infatti possiamo considerare che si tratta di $n = 4$ estrazioni senza reinserimento da un'urna che contiene $M = 10$ palline, di cui di tipo A le due palline contraddistinte da 5, e 10.

Per mostrare che il valore atteso di X vale $\frac{4}{5}$, si può procedere in due modi:

I MODO: considerando che $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$, dove X_j è la variabile aleatoria binaria che vale 1 se si verifica l'evento $C_j = \{\text{la } j\text{-sima pallina estratta è di tipo } A\}$, e 0 altrimenti, per cui

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) = 4P(C_1) = 4 \frac{2}{10} = \frac{4}{5}$$

II MODO: calcolando esplicitamente la densità discreta: la variabile aleatoria X assume solo i valori 0, 1 e 2, e con probabilità

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \frac{\binom{2}{0} \binom{8}{4}}{\binom{10}{4}} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{6 \cdot 5}{10 \cdot 9} = \frac{5}{15} \\ P(X = 1) &= \frac{\binom{2}{1} \binom{8}{3}}{\binom{10}{4}} = \frac{2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 4}{10 \cdot 9} = \frac{8}{15} \\ P(X = 2) &= \frac{\binom{2}{2} \binom{8}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 7}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{4 \cdot 3}{10 \cdot 9} = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

da cui

$$E(X) = 0P(X = 0) + 1P(X = 1) + 2P(X = 2) = \frac{8}{15} + 2 \frac{2}{15} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

b) *Mostrare che la varianza di X vale $\frac{32}{75}$.*

Soluzione: si può procedere in due modi:

I MODO: considerando che la varianza di una ipergeometrica di parametri M , m_1 ed n vale, posto $p = \frac{m_1}{M}$,

$$Var(X) = np(1-p) \left(1 - \frac{n-1}{M-1} \right) = 4 \frac{2}{10} \frac{8}{10} \left(1 - \frac{3}{9} \right) = \frac{16}{25} \frac{2}{3} = \frac{32}{75}$$

I MODO bis: considerando che $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$, dove X_j è la variabile aleatoria binaria che vale 1 se si verifica l'evento $C_j = \{\text{la } j\text{-sima pallina estratta è di tipo } A\}$, e 0 altrimenti, per

cui

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X) &= \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \text{Var}(X_3) + \text{Var}(X_4) \\
 &+ 2 \text{Cov}(X_1, X_2) + 2 \text{Cov}(X_1, X_3) + 2 \text{Cov}(X_1, X_4) \\
 &+ 2 \text{Cov}(X_2, X_3) + 2 \text{Cov}(X_2, X_4) + 2 \text{Cov}(X_3, X_4) \\
 &= 4 P(C_1)(1 - P(C_1)) + 12 \left(P(C_1 \cap C_2) - P(C_1) \cdot P(C_2) \right) \\
 &= 4 \frac{2}{10} \frac{8}{10} + 12 \left(\frac{2}{10} \frac{1}{9} - \frac{2}{10} \frac{2}{10} \right) = 4 \frac{2}{10} \left[\frac{8}{10} + 3 \left(\frac{1}{9} - \frac{2}{10} \right) \right] \\
 &= \frac{4}{5} \left[\frac{4}{5} + 3 \left(\frac{5-9}{45} \right) \right] = \frac{4}{5} \left[\frac{4}{5} - \frac{4}{15} \right] = \left(\frac{4}{5} \right)^2 \frac{2}{3} = \frac{32}{75}
 \end{aligned}$$

Il MODO: Utilizzando il fatto che $\text{Var}(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2$ e calcolando direttamente che

$$E(X^2) = 0 P(X = 0) + 1^2 P(X = 1) + 2^2 P(X = 2) = \frac{8}{15} + 4 \frac{2}{15} = \frac{16}{15}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{16}{15} - \frac{16}{25} = \frac{16 \cdot 5 - 16 \cdot 3}{75} = \frac{16 \cdot (5 - 3)}{75} = \frac{32}{75}$$

Anche Tizio e Sempronio giocano insieme a Caio. Tizio punta sulla terna di numeri $\{1, 5, 10\}$, e sia Y la variabile aleatoria che conta i numeri indovinati da Tizio. Invece Sempronio lancia una moneta ben equilibrata: se esce testa punta sulla coppia $\{5, 10\}$, mentre se esce croce punta sulla terna di numeri $\{1, 5, 10\}$. Sia Z la variabile aleatoria che conta quanti sono i numeri indovinati da Sempronio.

c) Scrivere in termini degli eventi $T = \{\text{esce testa}\}$ e $C = \{\text{esce croce}\}$ e delle variabili aleatorie X e Y , i seguenti eventi E, F, G ed A , e calcolarne le probabilità:

$$E = \{\text{Caio non indovina neanche un numero}\} \quad F = \{\text{Tizio non indovina neanche un numero}\}$$

$$G = \{\text{Sempronio non indovina neanche un numero}\}$$

$$A = \{\text{sia Caio che Sempronio non indovinano neanche un numero}\}$$

Soluzione:

$$E = \{X = 0\} \quad F = \{Y = 0\} \quad G = (T \cap \{X = 0\}) \cup (C \cap \{Y = 0\}), \quad A = G.$$

Si noti che l'uguaglianza $A = G$ deriva immediatamente dal fatto che

$$A = E \cap G = \{X = 0\} \cap \left((T \cap \{X = 0\}) \cup (C \cap \{Y = 0\}) \right) = (T \cap \{X = 0\}) \cup (C \cap \{Y = 0\}),$$

in quanto $\{X = 0\} \cap \{Y = 0\} = \{X = 0\}$. Dalle precedenti relazioni segue immediatamente che

$$P(E) = P(X = 0) = \frac{1}{3} \quad P(F) = P(Y = 0) = \frac{\binom{3}{0} \binom{7}{4}}{\binom{10}{4}} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{6}$$

$$P(G) = P(A) = P((T \cap \{X = 0\}) \cup (C \cap \{Y = 0\})) = \frac{1}{2} \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$$

d) Sapendo che Sempronio non ha indovinato neanche un numero, calcolare la probabilità che sia uscita testa e la probabilità che sia uscita croce.

Soluzione: $P(T|G) = \frac{2}{3}$ e $P(C|G) = \frac{1}{3}$.

Infatti si tratta di calcolare $P(T|G)$ e $P(C|G) = 1 - P(T|G)$. Per cui basta mostrare che $P(T|G) = \frac{2}{3}$ che automaticamente si ha il valore di $P(C|G)$.

$$P(T|G) = \frac{P(T \cap G)}{P(G)} = \frac{P(T \cap \{X = 0\})}{P((T \cap \{X = 0\}) + P(C \cap \{Y = 0\}))} = \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{2}{3}$$

Esercizio 2. X ed Y sono due variabili aleatorie che assumono valore negli insiemi $\{1, 2, 3, 4\}$ e $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$, rispettivamente. La loro distribuzione di probabilità congiunta è individuata dalla seguente tabella

$X \backslash Y$	0	$\frac{1}{2}$	1
1	c	$2c$	$3c$
2	0	c	0
3	c	0	c
4	0	c	0

a) Determinare il valore della costante c .

Soluzione: $c = \frac{1}{10} = 0.1$

Infatti

$$\sum_i \sum_j P(X = x_i, Y = y_j) = (c + 2c + 3c) + c + (c + c) + c = 10c = 1 \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{1}{10}.$$

b) Calcolare la distribuzione marginale di Y .

Soluzione:

y	0	$\frac{1}{2}$	1
$P(Y = y)$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{4}{10}$

come è immediato notando che

$$P(Y = 0) = c + c = 2c, \quad P(Y = \frac{1}{2}) = 2c + c + c = 4c, \quad P(Y = 1) = 3c + c = 4c.$$

c) Determinare la distribuzione condizionata di Y dato $\{X = 1\}$.

Soluzione:

y	0	$\frac{1}{2}$	1
$P(Y = y X = 1) = \frac{P(X=1, Y=y)}{P(X=1)}$	$\frac{c}{6c} = \frac{1}{6}$	$\frac{2c}{6c} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{3c}{6c} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Infatti si tratta solo di osservare che

$$P(X = 1) = P(X = 1, Y = 0) + P(X = 1, Y = \frac{1}{2}) + P(X = 1, Y = 1) = c + 2c + 3c = 6c.$$

d) Le variabili aleatorie X ed Y sono indipendenti?

Soluzione: X ed Y non sono indipendenti, infatti ad esempio $P(X = 2, Y = 0) = 0$ mentre $P(X = 2)P(Y = 0) > 0$ (se invece fossero indipendenti, per ogni $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e per ogni $y \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ si dovrebbe avere $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$).

e) **Determinare la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria $Z = X + Y$.**

Soluzione:

z	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	5
$P(Z = z)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0

Infatti, a priori, la variabile aleatoria Z , essendo somma di due variabili aleatorie a valori in $1, 2, 3, 4$ e $0, \frac{1}{2}, 1$, può assumere i valori $1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, 5$. Alcuni di questi valori hanno tuttavia probabilità nulla di essere assunti, infatti vale

$$P(Z = 1) = P(X = 1, Y = 0) = c = 0.1, \quad P(Z = \frac{3}{2}) = P(X = 1, Y = \frac{1}{2}) = 2c = 0.2,$$

$$P(Z = 2) = P(X = 1, Y = 1) + P(X = 2, Y = 0) = 3c + 0 = 0.3$$

$$P(Z = \frac{5}{2}) = P(X = 2, Y = \frac{1}{2}) = c = 0.1,$$

$$P(Z = 3) = P(X = 2, Y = 1) + P(X = 3, Y = 0) = 0 + c = 0.1,$$

$$P(Z = \frac{7}{2}) = P(X = 3, Y = \frac{1}{2}) = 0$$

$$P(Z = 4) = P(X = 4, Y = 0) + P(X = 3, Y = 1) = 0 + c = 0.1,$$

$$P(Z = \frac{9}{2}) = P(X = 2, Y = 1) + P(X = 3, Y = 0) = 0 + c = 0.1$$

ed infine

$$P(Z = 5) = P(X = 4, Y = 1) = 0$$

f)(facoltativo) Calcolare il valore atteso della variabile aleatoria $Z = X + Y$.

Soluzione: Il valore atteso di Z vale 2.4

Infatti

$$\begin{aligned} E(Z) &= (1 + 0)c + (1 + \frac{1}{2})2c + (1 + 1)3c + (2 + \frac{1}{2})c + (3 + 0)c + (3 + 1)c + (4 + \frac{1}{2})c \\ &= (1 + 3 + 6 + 2.5 + 3 + 4 + 4.5)c = 24c = 2.4 \end{aligned}$$

Esercizio 3. X è una variabile aleatoria tale che, per un'opportuna costante $K > 0$, ammette una densità della forma

$$f(x) = \begin{cases} K \cdot 3x^2 & \text{per } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Determinare il valore di K **Soluzione:** La costante K vale $\frac{1}{8}$.

Infatti, la condizione

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

diviene

$$\int_0^2 K 3x^2 dx = K [x^3]_0^2 = K 8 = 1 \quad \Leftrightarrow K = \frac{1}{8}.$$

b) *Determinare la funzione di distribuzione di X , e disegnarne il grafico.*

Soluzione:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ \frac{x^3}{8} & \text{per } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{per } x \geq 2 \end{cases}$$

c) *(facoltativo) Calcolare la varianza di X .*

Soluzione: $Var(X) = \frac{3}{20}$. Infatti

$$E(X) = \int_0^2 x \frac{1}{8} 3x^2 dx = \frac{3}{8} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \frac{3}{8} \frac{2^4}{4} = \frac{3}{2}$$

$$E(X^2) = \int_0^2 x^2 \frac{1}{8} 3x^2 dx = \frac{3}{8} \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \frac{3}{8} \frac{2^5}{5} = \frac{12}{5}$$

da cui

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{12}{5} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{12}{5} - \frac{9}{4} = \frac{48-45}{20} = \frac{3}{20}$$

Esercizio 4. *Una moneta equilibrata viene lanciata n volte. Per ogni $k \leq n$ poniamo $X_k = 1$ se il k -esimo lancio ha dato testa e $X_k = 0$ se ha dato croce. Indichiamo con $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ la proporzione di teste negli n lanci.*

a) *Usando la disuguaglianza di Chebyshev, trovare una minorazione per*

$$P(|\bar{X}_n - \frac{1}{2}| \leq 0.1), \quad \text{per } n = 900;$$

Soluzione: $P(|\bar{X}_{900} - \frac{1}{2}| \leq 0.1) \geq \frac{35}{36}$.

Infatti

$$P(|\bar{X}_n - \frac{1}{2}| \leq 0.1) = 1 - P(|\bar{X}_n - \frac{1}{2}| > 0.1)$$

e, tenendo conto che $E(\bar{X}_n) = \frac{1}{2}$ e $Var(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} \frac{1}{4}$, per la disuguaglianza di Chebyshev,

$$P(|\bar{X}_n - \frac{1}{2}| > 0.1) \leq \frac{1}{n} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\frac{1}{10}} \right)^2 = \frac{10^2}{4 \cdot 900} = \frac{1}{36} \quad \text{per } n = 900$$

b) *Usando l'approssimazione normale, calcolare approssimativamente*

$$P(\bar{X}_{900} \geq 0.51), \quad \text{per } n = 900;$$

Soluzione: $P(\bar{X}_n \geq 0.51) \simeq 0.2743$.

Infatti

$$P(\bar{X}_n \geq 0.51) = 1 - P(\bar{X}_n < 0.51) \simeq 1 - P\left(\frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{Var(\bar{X}_n)}} < \frac{0.51 - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{Var(\bar{X}_n)}}\right)$$

per cui, essendo $E(\bar{X}_n) = \frac{n}{2} = 0.5$ e $Var(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} n \frac{1}{4}$ si ha

$$= 1 - P\left(\frac{\bar{X}_n - 0.5}{\sqrt{\frac{1}{4n}}} < \frac{0.51 - 0.5}{\sqrt{\frac{1}{4n}}}\right)$$

da cui, per $n = 900$

$$\begin{aligned} P(\bar{X}_n \geq 0.51) &\simeq 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{4 \cdot 900}}{100}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{60}{100}\right) \\ &= 1 - \Phi(0.6) \simeq 1 - 0.7257 = 0.2743 \end{aligned}$$

c) (facoltativo) Usando l'approssimazione normale, calcolare approssimativamente

$$P(|\bar{X}_n - \frac{1}{2}| \leq 0.01), \quad \text{per } n = 900;$$

Soluzione: $P(|\bar{X}_{900} - \frac{1}{2}| \leq 0.01) \simeq 0.4514$

Infatti

$$P(|\bar{X}_n - \frac{1}{2}| \leq 0.01) = P\left(-\frac{0.51 - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{Var(\bar{X}_n)}} \leq \frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{Var(\bar{X}_n)}} \leq \frac{0.51 - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{Var(\bar{X}_n)}}\right)$$

da cui, per $n = 900$

$$P(|\bar{X}_{900} - \frac{1}{2}| \leq 0.01) \simeq \Phi(0,6) - \Phi(-0,6) = 2 \Phi(0,6) - 1 = 2 \cdot 0.7257 - 1 = 0.4514$$

d) (facoltativo) stimare quanto deve essere grande n perché sia

$$P(|\bar{X}_n - \frac{1}{2}| \leq 0.01) \geq 0.95.$$

Soluzione:

I MODO Con la disuguaglianza di Chebyshev: Basta prendere $n \geq 50 \cdot 000$ (tuttavia questo valore di n è eccessivamente grande, si veda il secondo modo)

Infatti per la disuguaglianza di Chebyshev

$$P(|\bar{X}_n - \frac{1}{2}| \leq 0.01) \geq 1 - \frac{Var(\bar{X}_n)}{\left(\frac{1}{100}\right)^2} = 1 - \frac{100^2}{4n}$$

e quindi affinché risulti $P(|\bar{X}_n - \frac{1}{2}| \leq 0.01) \geq 0.95$, è sufficiente che

$$1 - \frac{100^2}{4n} \geq 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad 0.5 \geq \frac{100^2}{4n} \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \frac{100^3}{20} = 50 \cdot 000$$

II MODO Con l'approssimazione normale: Basta prendere $n \geq 9604$.

Infatti come abbiamo visto al punto precedente

$$P(|\bar{X}_n - \frac{1}{2}| \leq 0.01) = P\left(-\frac{0.51 - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{Var(\bar{X}_n)}} \leq \frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{Var(\bar{X}_n)}} \leq \frac{0.51 - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{Var(\bar{X}_n)}}\right)$$

da cui tenendo conto che $\frac{0.51 - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{\text{Var}(\bar{X}_n)}} = \frac{\sqrt{4n}}{100}$,

$$P(|\bar{X}_n - \frac{1}{2}| \leq 0.01) \simeq \Phi\left(\frac{\sqrt{4n}}{100}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{4n}}{100}\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{4n}}{100}\right) - 1$$

basta trovare n tale che

$$2\Phi\left(\frac{\sqrt{4n}}{100}\right) - 1 \geq 0.95,$$

ossia tale che

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{4n}}{100}\right) \geq \frac{1.95}{2} = 0.975.$$

Poiché la funzione Φ è crescente e $\Phi(1.96) = 0.975$, ciò equivale a richiedere che

$$\frac{\sqrt{4n}}{100} = \frac{\sqrt{n}}{50} \geq 1.96 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq (50 \cdot 1.96)^2 = 98^2 = (100 - 2)^2 = 10000 - 400 + 4 = 9604$$