

**Calcolo delle Probabilità 1 2004/05 - Laurea triennale**  
**Foglio esercizi n.9 — Soluzioni**

**Esercizio 5.** Sia  $X$  una variabile aleatoria con densità di probabilità data da

$$f_X(x) = \begin{cases} kx & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \\ k(2-x) & \text{per } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

a) Imponiamo la condizione di normalizzazione

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = k \int_0^1 x dx + k \int_1^2 (2-x) dx = \\ &= k \left( \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 - \left[ \frac{(2-x)^2}{2} \right]_1^2 \right) = k \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = k \end{aligned}$$

b) La funzione di distribuzione è data da

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - \frac{(2-x)^2}{2} & \text{per } 1 < x \leq 2 \\ 1 & \text{per } x > 2 \end{cases}$$

c) La funzione di densità di  $Y = -X + 1$  è data da  $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-X + 1 \leq y) = P(1 - y \leq X) = 1 - P(X \leq 1 - y) = 1 - F_X(1 - y)$ . Esplicitamente

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } y < -1 \\ \frac{(1+y)^2}{2} & \text{per } -1 \leq y \leq 0 \\ 1 - \frac{(1-y)^2}{2} & \text{per } 0 < y \leq 1 \\ 1 & \text{per } 1 < y \end{cases}$$

d) La densità di probabilità di  $Y$  è data da

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} (1 - F_X(1 - y)) = f_X(1 - y) = \begin{cases} 1 + y & \text{per } -1 \leq y \leq 0 \\ 1 - y & \text{per } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

e quindi il valore atteso di  $Y$  è dato da

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy = \int_{-1}^0 y(1+y) dy + \int_0^1 y(1-y) dy = \\ &= \int_{-1}^0 y dy + \int_{-1}^0 y^2 dy + \int_0^1 y dy - \int_0^1 y^2 dy = \\ &= - \int_0^1 y dy + \int_0^1 y^2 dy + \int_0^1 y dy - \int_0^1 y^2 dy = 0. \end{aligned}$$

In alternativa si osservi che la densità di probabilità è simmetrica rispetto a  $x = 1$  e quindi  $E(X) = 1$ . Di conseguenza  $E(Y) = -E(X) + 1 = -1 + 1 = 0$ .

**Esercizio 6.** Si trova facilmente (vedi esercizio 1 del foglio 7) che  $\mu = \frac{21}{20}$  e  $\sigma^2 = \frac{89}{400}$ . Quindi

$$\begin{aligned} P\left(\left\{\mu - \frac{1}{10} \leq Y_{100} \leq \mu + \frac{1}{10}\right\}\right) &\simeq 2\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{\sigma^2}}\epsilon\right) - 1 = 2\Phi\left(\sqrt{100 \frac{400}{89}} \frac{1}{10}\right) - 1 = \\ &= 2\Phi\left(\sqrt{\frac{400}{89}}\right) - 1 \simeq 2\Phi(2,1199) - 1 \simeq 2 \cdot 0,9826 - 1 = 0,9652 \end{aligned}$$