

La prova scritta consiste nello svolgimento degli Esercizi 1 e 2 e di uno, a scelta dallo studente, fra gli esercizi 3 e 4. (tempo a disposizione: 3 ore)

Scrivere su ogni foglio NOME e COGNOME.

Le risposte devono essere giustificate sui fogli protocollo e riportate nel foglio RISPOSTE.

Esercizio 1. X è una variabile aleatoria tale che, per un'opportuna costante $\alpha > 0$, ammette una densità della forma

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{\alpha} & \text{per } -\alpha \leq x \leq 0 \\ \frac{x}{\alpha} & \text{per } 0 \leq x \leq \alpha \\ 0 & \text{per } |x| > \alpha \end{cases}$$

- Determinare il valore di α .
- Calcolare il valore atteso e la varianza di X .
- Calcolare $P\{|X| > \frac{\alpha}{2}\}$.

Esercizio 2. Un ristorante (in cui è obbligatoria la prenotazione) propone i tre "menù" $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$ al costo di 14 Euro, 21 Euro e 24 Euro, rispettivamente.

Si suppone che ciascun cliente scelga fra $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ e \mathcal{M}_3 con probabilità $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ ed $\frac{1}{6}$, rispettivamente; si suppone inoltre che vi sia indipendenza stocastica fra le scelte dei diversi clienti.

Per la serata sono prenotati 200 clienti ed indichiamo con S_{200} l'incasso in Euro che verrà realizzato complessivamente dal ristorante nella serata.

- Determinare il valore atteso e la varianza di S_{200}
- Calcolare l'approssimazione normale per le probabilità
 - $P\{3500 \leq S_{200} \leq 3700\}$
 - $P\{S_{200} > 3800\}$.

Esercizio 3. Riprendendo le posizioni del precedente Esercizio 2, indichiamo con X_j il numero di clienti che scelgono il menù \mathcal{M}_j (per $j = 1, 2, 3$).

Scrivere le formule per il calcolo delle seguenti probabilità

- $P(X_1 = 150, X_2 = 40, X_3 = 10)$
- $P(X_1 = 150)$
- $P(X_2 = 40 | X_1 = 150)$.

Esercizio 4. Consideriamo un gioco d'azzardo eseguito con due monete non perfette: una moneta dà risultato testa con probabilità 0,4 e l'altra dà risultato testa con probabilità 0,6.

Viene scelta una moneta, e poi la moneta scelta (sempre la stessa) viene lanciata tre volte consecutivamente .

Si vincono 10 Euro se si presentano almeno due risultati testa consecutivi;

si vincono 5 Euro se si presentano esattamente due risultati testa non consecutivi;

non si vince nulla negli altri casi.

a1) Calcolare la probabilità di vincere 10 Euro **nel caso in cui** si scelga la moneta più favorevole

b1) Calcolare il valore atteso della vincita, ancora **nel caso in cui** si scelga la moneta più favorevole.

a2) Calcolare la probabilità di vincere 10 Euro **nel caso in cui** la moneta viene **scelta a caso** fra le due.

b2) Calcolare il valore atteso della vincita, ancora **nel caso in cui** la moneta viene **scelta a caso** fra le due.

c) (**facoltativo**) **Sempre nel caso in cui** la moneta sia stata **scelta a caso** fra le due, si calcoli la probabilità che esca testa al secondo lancio, **sapendo che** il risultato del primo lancio è stato testa.

Seconda prova in itinere, mercoledì 8 giugno 2005 - FOGLIO RISPOSTE

NOME E COGNOME

docente

G. Nappo

F. Spizzichino

Esercizio 1.

a) $\alpha = \dots\dots\dots$

b) $E(X) = \dots\dots\dots$ $Var(X) = \dots\dots\dots$

c) $P\{|X| > \frac{\alpha}{2}\} = \dots\dots\dots$

Esercizio 2.

a) $E(S_{200}) = \dots\dots\dots$ $Var(S_{200}) = \dots\dots\dots$

b1) $P\{3500 \leq S_{200} \leq 3700\} \simeq \dots\dots\dots$

b2) $P\{S_{200} > 3800\} \simeq \dots\dots\dots$

Esercizio 3.

a) $P(X_1 = 150, X_2 = 40, X_3 = 10) = \dots\dots\dots$

b) $P(X_1 = 150) = \dots\dots\dots$

c) $P(X_2 = 40 | X_1 = 150) = \dots\dots\dots$

Esercizio 4.

a1) Probabilità di vincere 10 Euro =(scelta la moneta più favorevole)

b1) Valore atteso della vincita = (scelta la moneta più favorevole)

a2) Probabilità di vincere 10 Euro =(scelta a caso delle monete)

b2) Valore atteso della vincita = (scelta a caso delle monete)

c) (facoltativo) $p_c = \dots\dots\dots$

Esercizio 1. X è una variabile aleatoria tale che, per un'opportuna costante $\alpha > 0$, ammette una densità della forma

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{\alpha} & \text{per } -\alpha \leq x \leq 0 \\ \frac{x}{\alpha} & \text{per } 0 \leq x \leq \alpha \\ 0 & \text{per } |x| > \alpha \end{cases}$$

a) Determinare il valore di α .

Soluzione: $\alpha = 1$

Infatti α va determinato in modo che f sia una densità di probabilità, ossia in modo che

i) $f(x) \geq 0$ per ogni x (e questo è automaticamente soddisfatto), e che

ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$, ossia, nel nostro caso

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{1}{\alpha} |x| dx = 2 \int_0^{+\alpha} \frac{1}{\alpha} x dx = \frac{1}{\alpha} x^2 \Big|_0^{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \alpha^2 = \alpha = 1$$

b) Calcolare il valore atteso e la varianza di X .

Soluzione: $E(X) = 0$ e $Var(X) = \frac{1}{2}$

Infatti $E(X) = 0$ in quanto la densità è simmetrica rispetto all'origine e X ammette sicuramente valore atteso finito, in quanto $|X| \leq 1$. Alternativamente

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-1}^{+1} x|x| dx = \int_{-1}^0 (-x^2) dx + \int_0^1 x^2 dx = -\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \\ &= -\left(0 - \frac{(-1)^3}{3}\right) + \left(\frac{1^3}{3} - 0\right) = -\frac{1^3}{3} + \frac{1^3}{3} = 0 \end{aligned}$$

Di conseguenza $Var(X) = E(X^2)$ e quindi

$$\begin{aligned} Var(X) = E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-1}^{+1} x^2|x| dx = 2 \int_0^1 x^3 dx = 2 \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 \\ &= 2 \left(\frac{1^4}{4} - 0\right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

c) Calcolare $P\{|X| > \frac{\alpha}{2}\}$.

Soluzione: $P\{|X| > \frac{\alpha}{2}\} = P\{|X| > \frac{1}{2}\} = \frac{3}{4}$

Infatti

$$P\{|X| > \frac{1}{2}\} = 1 - P\{|X| \leq \frac{1}{2}\} = 1 - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |x| dx = 1 - 2 \int_0^{\frac{1}{2}} x dx = 1 - \left[x^2\right]_0^{\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

Esercizio 2. Un ristorante (in cui è obbligatoria la prenotazione) propone i tre "menù" $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$ al costo di 14 Euro, 21 Euro e 24 Euro, rispettivamente.

Si suppone che ciascun cliente scelga fra $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ e \mathcal{M}_3 con probabilità $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ ed $\frac{1}{6}$, rispettivamente; si suppone inoltre che vi sia indipendenza stocastica fra le scelte dei diversi clienti.

Per la serata sono prenotati 200 clienti ed indichiamo con S_{200} l'incasso in Euro che verrà realizzato complessivamente dal ristorante nella serata.

a) Determinare il valore atteso e la varianza di S_{200}

Soluzione: $E(S_{200}) = 3600$ e $Var(S_{200}) = 3400$

Infatti per iniziare si noti che S_{200} si può pensare come la somma di duecento variabili aleatorie V_i , dove V_i rappresenta il prezzo del menù scelto dal cliente i -simo. Dai dati del problema si ha che V_i può assumere i valori 14, 21 e 24, con

$$P(V_i = 14) = \frac{1}{2}, \quad P(V_i = 21) = \frac{1}{3}, \quad P(V_i = 24) = \frac{1}{6},$$

per cui

$$\begin{aligned} E(S_{200}) &= E(V_1 + \dots + V_{200}) = E(V_1) + \dots + E(V_{200}) = 200 E(V_1) \\ &= 200 \left(14 \frac{1}{2} + 21 \frac{1}{3} + 24 \frac{1}{6} \right) = 200(7 + 7 + 4) = 200 \cdot 18 = 3600. \end{aligned}$$

Inoltre, sempre dai dati del problema sappiamo che le variabili V_i sono indipendenti e quindi

$$\begin{aligned} Var(S_{200}) &= Var(V_1 + \dots + V_{200}) = Var(V_1) + \dots + Var(V_{200}) = 200 Var(V_1) \\ &= 200 \left(E(V_1^2) - (E(V_1))^2 \right) \\ &= 200 \left(\left(14^2 \frac{1}{2} + 21^2 \frac{1}{3} + 24^2 \frac{1}{6} \right) - 18^2 \right) = 200 \left((14 \cdot 7 + 21 \cdot 7 + 24 \cdot 4) - 18^2 \right) \\ &= 200 \left(35 \cdot 7 + 96 - 81 \cdot 4 \right) = 200 (5 \cdot 49 + 96 - 324) = 200(245 + 96 - 324) = 200(341 - 324) \\ &= 200 \cdot 17 = 3400 \end{aligned}$$

b) Calcolare l'approssimazione normale per le probabilità

b1) $P\{3500 \leq S_{200} \leq 3700\}$ **b2)** $P\{S_{200} > 3800\}$.

Soluzione: $P\{3500 \leq S_{200} \leq 3700\} \simeq 0,9128$ e $P\{S_{200} > 3800\} \simeq 0,0003$.

Infatti

$$\begin{aligned} P\{3500 \leq S_{200} \leq 3700\} &= P\left\{ \frac{3500-3600}{\sqrt{3400}} \leq \frac{S_{200}-3600}{\sqrt{3400}} \leq \frac{3700-3600}{\sqrt{3400}} \right\} \\ &= P\left\{ -\frac{10}{\sqrt{34}} \leq \frac{S_{200}-3600}{\sqrt{3400}} \leq \frac{10}{\sqrt{34}} \right\} \\ &\simeq \Phi\left(\frac{10}{5,83}\right) - \Phi\left(-\frac{10}{5,83}\right) = 2\Phi\left(\frac{10}{5,83}\right) - 1 \\ &\simeq 2\Phi(1,71) - 1 = 2 \cdot 0,9564 - 1 = 0,9128 \end{aligned}$$

Invece

$$\begin{aligned} P\{S_{200} > 3800\} &= P\left\{\frac{S_{200}-3600}{\sqrt{3400}} > \frac{3800-3600}{\sqrt{3400}}\right\} \\ &= 1 - P\left\{\frac{S_{200}-3600}{\sqrt{3400}} \leq \frac{20}{\sqrt{34}}\right\} \\ &\simeq 1 - \Phi\left(\frac{20}{5,83}\right) \simeq 1 - \Phi(3,43) = 1 - 0,9997 = 0,0003 \end{aligned}$$

Esercizio 3. Riprendendo le posizioni del precedente Esercizio 2, indichiamo con X_j il numero di clienti che scelgono il menù \mathcal{M}_j (per $j = 1, 2, 3$).

Scrivere le formule per il calcolo delle seguenti probabilità

a) $P(X_1 = 150, X_2 = 40, X_3 = 10)$

Soluzione: Si tratta di 200 prove indipendenti a tre esiti: quindi la distribuzione congiunta di (X_1, X_2, X_3) è una distribuzione multinomiale e

$$P(X_1 = 150, X_2 = 40, X_3 = 10) = \frac{200!}{150! 40! 10!} \left(\frac{1}{2}\right)^{150} \left(\frac{1}{3}\right)^{40} \left(\frac{1}{6}\right)^{10}.$$

b) $P(X_1 = 200)$

Soluzione: Si tratta di 200 prove indipendenti a due esiti menù da 14 Euro (con probabilità $\frac{1}{2}$) o no: quindi la variabile X_1 ha distribuzione binomiale di parametri $n = 200$ e $p = \frac{1}{2}$, così

$$P(X_1 = 150) = \binom{200}{150} \left(\frac{1}{2}\right)^{200} = \frac{200!}{150! 50!} \left(\frac{1}{2}\right)^{200}$$

c) $P(X_2 = 40 | X_1 = 150)$.

Soluzione: $P(X_2 = 40 | X_1 = 150) = \frac{50!}{40! 10!} \left(\frac{2}{3}\right)^{40} \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$.

Infatti

$$\begin{aligned} P(X_2 = 40 | X_1 = 150) &= \frac{P(X_1 = 150, X_2 = 40)}{P(X_1 = 150)} = \frac{P(X_1 = 150, X_2 = 40, X_3 = 10)}{P(X_1 = 150)} \\ &= \frac{\frac{200!}{150! 40! 10!} \left(\frac{1}{2}\right)^{150} \left(\frac{1}{3}\right)^{40} \left(\frac{1}{6}\right)^{10}}{\frac{200!}{150! 50!} \left(\frac{1}{2}\right)^{200}} = \frac{50!}{40! 10!} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{40} \left(\frac{1}{6}\right)^{10}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{50}} = \frac{50!}{40! 10!} \left(\frac{2}{3}\right)^{40} \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \end{aligned}$$

Esercizio 4. Consideriamo un gioco d'azzardo eseguito con due monete non perfette: una moneta dà risultato testa con probabilità 0,4 e l'altra dà risultato testa con probabilità 0,6.

Viene scelta una moneta, e poi la moneta scelta (sempre la stessa) viene lanciata tre volte consecutivamente.

Si vincono 10 Euro se si presentano almeno due risultati testa consecutivi;

si vincono 5 Euro se si presentano esattamente due risultati testa non consecutivi;

non si vince nulla negli altri casi.

a1) Calcolare la probabilità di vincere 10 Euro nel caso in cui si scelga la moneta più favorevole Soluzione: La probabilità cercata vale 0.504.

Infatti, posto X la variabile aleatoria che rappresenta la vincita, $T_i = \{\text{esce testa all}'i\text{-simo lancio}\}$, per $i = 1, 2, 3$, ed infine posta P_1 la probabilità nel caso in cui venga scelta la moneta più favorevole

$$\begin{aligned} P_1(X = 10) &= P_1(T_1 \cap T_2 \cap \bar{T}_3) + P_1(\bar{T}_1 \cap T_2 \cap T_3) + P_1(T_1 \cap T_2 \cap T_3) \\ &= P_1(T_1)P_1(T_2)P_1(\bar{T}_3) + P_1(\bar{T}_1)P_1(T_2)P_1(T_3) + P_1(T_1)P_1(T_2)P_1(T_3) \\ &= (0.6)^2 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot (0.6)^2 + (0.6)^3 = (0.6)^2(0.4 + 0.4 + 0.6) \\ &= 0.36 \cdot 1.4 = 0.504 \end{aligned}$$

b1) Calcolare il valore atteso della vincita, ancora nel caso in cui si scelga la moneta più favorevole. Soluzione: Il valore atteso cercato vale 5.76.

Infatti in modo analogo si ha che¹

$$\begin{aligned} P_1(X = 5) &= P_1(T_1 \cap \bar{T}_2 \cap T_3) = P_1(T_1)P_1(\bar{T}_2)P_1(T_3) \\ &= 0.6 \cdot 0.4 \cdot 0.6 = (0.6)^2 \cdot 0.4 = 0.36 \cdot 0.4 = 0.144 \end{aligned}$$

e quindi

$$E_1(X) = 0 P_1(X = 0) + 5 P_1(X = 5) + 10 P_1(X = 10) = 5 \cdot 0.144 + 10 \cdot 0.504 = 0.720 + 5.04 = 5.76$$

a2) Calcolare la probabilità di vincere 10 Euro nel caso in cui la moneta viene scelta a caso fra le due. Soluzione: La probabilità cercata vale 0.38.

Infatti posto

$A_1 = \{\text{viene scelta la moneta più favorevole}\}$ e $A_2 = \{\text{viene scelta la moneta meno favorevole}\}$ si ha

$$P(X = 10) = P(A_1) P(X = 10|A_1) + P(A_2) P(X = 10|A_2),$$

¹In modo analogo si può calcolare anche $P_1(X = 0)$:

$$\begin{aligned} P_1(X = 0) &= P_1(T_1 \cap \bar{T}_2 \cap \bar{T}_3) + P_1(\bar{T}_1 \cap T_2 \cap \bar{T}_3) + P_1(\bar{T}_1 \cap \bar{T}_2 \cap T_3) + P_1(\bar{T}_1 \cap \bar{T}_2 \cap \bar{T}_3) \\ &= P_1(T_1)P_1(\bar{T}_2)P_1(\bar{T}_3) + P_1(\bar{T}_1)P_1(T_2)P_1(\bar{T}_3) + P_1(\bar{T}_1)P_1(\bar{T}_2)P_1(T_3) + P_1(\bar{T}_1)P_1(\bar{T}_2)P_1(\bar{T}_3) \\ &= 3 \cdot (0.4)^2 \cdot 0.6 + (0.4)^3 = (0.4)^2(3 \cdot 0.6 + 0.4) = 0.16 \cdot 2.2 = 0.352 \end{aligned}$$

Tuttavia va notato che questo calcolo non è necessario per due motivi: prima di tutto perché il valore di $P_1(X = 0)$ non interviene nel calcolo per ottenere il valore atteso di X , e poi perché comunque il valore di $P_1(X = 0)$ si può ottenere

$$P_1(X = 0) = 1 - P_1(X = 5) - P_1(X = 10) = 1 - 0.144 - 0.504 = 1 - 0.648 = 0.352$$

con $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$ e con

$$\begin{aligned} P(X = 10|A_1) &= P(T_1 \cap T_2 \cap \bar{T}_3|A_1) + P(\bar{T}_1 \cap T_2 \cap T_3|A_1) + P(T_1 \cap T_2 \cap T_3|A_1) \\ &= P(T_1|A_1)P(T_2|A_1)P(\bar{T}_3|A_1) + P(\bar{T}_1|A_1)P(T_2|A_1)P(T_3|A_1) + P(T_1|A_1)P(T_2|A_1)P(T_3|A_1) \\ &= (0.6)^2 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot (0.6)^2 + (0.6)^3 = (0.6)^2(0.4 + 0.4 + 0.6) = 0.36 \cdot 1.4 \\ &= 0.504 \end{aligned}$$

(del resto $P(X = 10|A_1) = P_1(X = 10)$), mentre

$$\begin{aligned} P(X = 10|A_2) &= P(T_1 \cap T_2 \cap \bar{T}_3|A_2) + P(\bar{T}_1 \cap T_2 \cap T_3|A_2) + P(T_1 \cap T_2 \cap T_3|A_2) \\ &= P(T_1|A_2)P(T_2|A_2)P(\bar{T}_3|A_2) + P(\bar{T}_1|A_2)P(T_2|A_2)P(T_3|A_2) + P(T_1|A_2)P(T_2|A_2)P(T_3|A_2) \\ &= (0.4)^2 \cdot 0.6 + 0.6 \cdot (0.4)^2 + (0.4)^3 = (0.4)^2(0.6 + 0.6 + 0.4) = 0.16 \cdot 1.6 \\ &= 0.256 \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} P(X = 10) &= P(A_1)P(X = 10|A_1) + P(A_2)P(X = 10|A_2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0.504 + \frac{1}{2} \cdot 0.256 = \frac{1}{2} \cdot 0.760 = 0.380 \end{aligned}$$

b2) Calcolare il valore atteso della vincita, ancora nel caso in cui la moneta viene scelta a caso fra le due. Soluzione: Il valore atteso cercato vale 4.4.

Infatti si deve calcolare

$$E(X) = 0P(X = 0) + 5P(X = 5) + 10P(X = 10) = 5 \cdot 0.12 + 10 \cdot 0.38 = 0.6 + 3.8 = 4.4$$

in quanto

$$\begin{aligned} P(X = 5) &= P(A_1)P(X = 5|A_1) + P(A_2)P(X = 5|A_2) \\ &= \frac{1}{2}P(T_1 \cap \bar{T}_2 \cap T_3|A_1) + \frac{1}{2}P(T_1 \cap \bar{T}_2 \cap T_3|A_2) \\ &= \frac{1}{2}P(T_1|A_1)P(\bar{T}_2|A_1)P(T_3|A_1) + \frac{1}{2}P(T_1|A_2)P(\bar{T}_2|A_2)P(T_3|A_2) \\ &= \frac{1}{2}(0.6)^2 \cdot 0.4 + \frac{1}{2}(0.4)^2 \cdot 0.6 = \frac{1}{2} \cdot 0.4 \cdot 0.6(0.6 + 0.4) = \frac{1}{2} \cdot 0.24 \\ &= 0.12 \end{aligned}$$

c) (facoltativo) Sempre nel caso in cui la moneta sia stata scelta a caso fra le due, si calcoli la probabilità che esca testa al secondo lancio, sapendo che il risultato del primo lancio è stato testa.

Soluzione: La probabilità cercata vale 0.52.

Infatti

$$\begin{aligned} P(T_2|T_1) &= \frac{P(T_2 \cap T_1)}{P(T_1)} = \frac{P(A_1)P(T_1 \cap T_2|A_1) + P(A_2)P(T_1 \cap T_2|A_2)}{P(A_1)P(T_1|A_1) + P(A_2)P(T_1|A_2)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot (0.6)^2 + \frac{1}{2} \cdot (0.4)^2}{\frac{1}{2} \cdot 0.6 + \frac{1}{2} \cdot 0.4} = 0.36 + 0.16 = 0.52 \end{aligned}$$