Corso di Laurea Triennale in Matematica
Calcolo delle Probabilità I (docenti G. Nappo, F. Spizzichino)

Prova di mercoledì 22 Settembre 2004 (tempo a disposizione: 2 ore e 40 minuti).
consegna compiti e inizio orale venerdì 24 ore 9

Scrivere su ogni foglio NOME e COGNOME. Le risposte devono essere giustificate sui fogli protocollo e riportate nel foglio RISPOSTE.

Esercizio 1. Paolo è candidato in un esame di concorso per entrare a lavorare in un centro di ricerca; tale esame prevede tre prove: una prova scritta, una prova orale e una prova pratica. Poniamo
$A \equiv\{$*Paolo supera la prova scritta*$\}$,
$B \equiv\{$*Paolo supera la prova orale*$\}$,
$C \equiv\{$*Paolo supera la prova pratica*$\}$.
Assumiamo che gli eventi A, B e C siano stocasticamente indipendenti e che risulti

$$p_A = P(A) = 0.7, \quad p_B = P(B) = 0.6, \quad p_C = P(C) = 0.8.$$

a) Qual è la probabilità che *Paolo superi tutte e tre le prove*? E quella che *Paolo fallisca almeno una delle tre prove*?

b) Qual è la probabilità che *Paolo fallisca esattamente una delle tre prove*?

c) Sapendo che Paolo ha fallito esattamente una delle tre prove, qual è la probabilità che *Paolo abbia fallito la prova pratica*?

d) Consideriamo ora 10 diversi candidati, in cui ciascuno ha le stesse probabilità di successo come Paolo e che si comportano ciascuno indipendentemente dall'altro. Poniamo

$$X_A = \textit{numero candidati che superano la prova scritta.}$$

Trovare la distribuzione di probabilità ed il valore atteso di X_A.

e) Nella stessa situazione del punto d), trovare il valore atteso e la varianza del numero Y dei candidati che superano tutte le tre prove.

f) (facoltativo) Siano ora $X^{(i)}$ il numero dei candidati che superano esattamente i prove, per $i = 0, 1, 2, 3$. Scrivere l'espressione per calcolare

$$\mathbb{P}(X^{(1)} = 3, X^{(2)} = 2, X^{(3)} = 3).$$

Esercizio 2. Sia X una variabile aleatoria con funzione di densità di probabilità data da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < -2 \\ k\,(x+2) & \text{per } -2 \le x < 0 \\ k(2-x) & \text{per } 0 \le x < 2 \\ 0 & \text{per } x \ge 2 \end{cases}$$

a) Calcolare il valore di k.

b) Calcolare $P(1 \le X \le 2)$.

c) Mostrare che $\mathbb{E}(X) = 0$.

d) Mostrare che $Var(X) = \frac{2}{3}$

e) Siano X_n, per $n = 1, \ldots, 100$, variabili aleatorie indipendenti e con la stessa legge di X. Calcolare approssimativamente

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{100}\sum_{n=1}^{100} X_n\right| > \frac{1}{\sqrt{600}}\right).$$

FOGLIO RISPOSTE della prova di Mercoledì 22 settembre 2004

NOME e COGNOME ....

canale NAPPO ☐ **canale SPIZZICHINO** ☐

Esercizio 1.

a) P(*Paolo superi tutte e tre le prove*)= ....

P(*Paolo fallisca almeno una delle tre prove*)= ....

b) P(*Paolo fallisca esattamente una delle tre prove*)= ....

c) probabilità che *Paolo abbia fallito la prova pratica* **sapendo che** ha fallito esattamente una delle tre prove ....

d) $P(X_A = k) =$ .... per $k =$ ....

$\mathbb{E}(X_A) =$ ....

e) $\mathbb{E}(Y) =$ .... $Var(Y) =$ ....

f) (facoltativo)

$\mathbb{P}(X^{(1)} = 3,\ X^{(2)=2},\ X^{(3)} = 3) =$ ....

Esercizio 2.

a) $k =$ ....

b) $P(1 \leq X \leq 2) =$ ....

c) svolto ....☐ non svolto .... ☐

d) svolto ....☐ non svolto .... ☐

e) $\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{100}\sum_{n=1}^{100} X_n\right| > \frac{1}{\sqrt{600}}\right)$ ....

RISPOSTE della prova di Mercoledì 22 settembre 2004

Esercizio 1.

a) P(*Paolo superi tutte e tre le prove*)$= 0,336$

P(*Paolo fallisca almeno una delle tre prove*)$= 0,664$

b) P(*Paolo fallisca esattamente una delle tre prove*)$= 0,452$

c) probabilità che *Paolo abbia fallito la prova pratica* **sapendo che** ha fallito esattamente una delle tre prove $= \frac{21}{113} \simeq 0,1858$

d) $P(X_A = k) = \binom{10}{k}(0,7)^k\,(0,3)^{10-k}$ per $k = 0, 1, ...10,$ $\mathbb{E}(X_A) = 7$

e) $\mathbb{E}(Y) = 3,36$ $Var(Y) = 2,23104$

f) (facoltativo)

$\mathbb{P}(X^{(1)} = 3,\, X^{(2)=2},\, X^{(3)} = 3) = \frac{10!}{2!\,3!\,2!\,3!}(0,024)^2(0,188)^3(0,452)^2(0,336)^3$

Esercizio 2.

a) $k = \frac{1}{4}$

b) $P(1 \leq X \leq 2) = \frac{1}{8}$

c) (vedi soluzioni) $\square$

d) (vedi soluzioni) $\square$

e) $\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{100}\sum_{n=1}^{100} X_n\right| > \frac{1}{\sqrt{600}}\right) \simeq 0,6170$

Corso di Laurea Triennale in Matematica
Calcolo delle Probabilità I (docenti G. Nappo, F. Spizzichino)

SOLUZIONI della prova di mercoledì 22 Settembre 2004
Esercizio 1. Paolo è candidato in un esame di concorso per entrare a lavorare in un centro di ricerca; tale esame prevede tre prove: una prova scritta, una prova orale e una prova pratica. Poniamo
$A \equiv$**{*Paolo supera la prova scritta*},**
$B \equiv$**{*Paolo supera la prova orale*},**
$C \equiv$**{*Paolo supera la prova pratica*}.**
Assumiamo che gli eventi A, B e C siano stocasticamente indipendenti e che risulti

$$p_A = P(A) = 0.7, \quad p_B = P(B) = 0.6, \quad p_C = P(C) = 0.8.$$

a) Qual è la probabilità che *Paolo superi tutte e tre le prove*? E quella che *Paolo fallisca almeno una delle tre prove*?
soluzione di a): Le probabilità cercate valgono $0,336$ e $0,664$ rispettivamente.
Infatti il primo evento, ovvero l'evento che *Paolo superi tutte e tre le prove* corrisponde agli eventi $A \cap B \cap C$ e quindi, per l'indipendenza di A, B e C si ha

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P(B)\, P(C) = p_A\, p_B\, p_C = 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,8 = 0,336.$$

Il secondo evento è il complementare del primo e quindi la sua probabilità è data da $1 - 0,336 = 0,664$.

b) Qual è la probabilità che *Paolo fallisca esattamente una delle tre prove*?
soluzione di b): La probabilità cercata vale $0,452$.
Infatti l'evento che *Paolo fallisca esattamente una delle tre prove* corrisponde all'evento

$$E = (\overline{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C}),$$

i tre eventi $\overline{A} \cap B \cap C$, $A \cap (\overline{B} \cap C$ e $A \cap B \cap \overline{C}$ sono incompatibili (ovvero disgiunti, perciò, tenendo conto anche dell'indipendenza di A, B e C, la probabilità cercata vale

$$\begin{aligned}
P(E) &= P(\overline{A} \cap B \cap C) + P(A \cap \overline{B} \cap C) + P(A \cap B \cap \overline{C}) \\
&= P(\overline{A})P(B)P(C) + P(A)P(\overline{B})P(C) + P(A)P(B)P(\overline{C}) \\
&= (1 - p_A) \cdot p_B \cdot p_C + p_A \cdot (1 - p_B) \cdot p_C + p_A \cdot p_B \cdot (1 - p_C) \\
&= 0,3 \cdot 0,6 \cdot 0,8 + 0,7 \cdot 0,4 \cdot 0.8 + 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,2 \\
&= 0,144 + 0,224 + 0,084 = 0,452.
\end{aligned}$$

c) Sapendo che Paolo ha fallito esattamente una delle tre prove, qual è la probabilità che *Paolo abbia fallito la prova pratica*?
soluzione di c): La probabilità cercata vale $\frac{21}{113} \simeq 0,1858$.
Infatti si tratta di calcolare la probabilità dell'evento $\overline{C}$ condizionata all'evento

$$E = (\overline{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C}),$$

ovvero si tratta di calcolare

$$P(\overline{C}|E) = \frac{P(\overline{C} \cap E)}{P(E)}.$$

Tenendo conto del fatto che

$$\begin{aligned}\overline{C}\cap E &= \overline{C}\cap\Big((\overline{A}\cap B\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(A\cap B\cap\overline{C})\Big)\\ &= \Big(\overline{C}\cap(\overline{A}\cap B\cap C)\Big)\cup\Big(\overline{C}\cap(A\cap\overline{B}\cap C)\Big)\cup\Big(\overline{C}\cap(A\cap B\cap\overline{C})\Big)\\ &= \emptyset\cup\emptyset\cup(A\cap B\cap\overline{C})\end{aligned}$$

si ottiene

$$P(\overline{C}|E)=\frac{P(\overline{C}\cap E)}{P(E)}=\frac{P(A\cap B\cap\overline{C})}{P(E)}=\frac{0,084}{0,452}=\frac{84}{452}=\frac{21}{113}\simeq 0,1858.$$

d) Consideriamo ora 10 diversi candidati, in cui ciascuno ha le stesse probabilità di successo come Paolo e che si comportano ciascuno indipendentemente dall'altro. Poniamo

$$X_A = \textit{numero candidati che superano la prova scritta.}$$

Trovare la distribuzione di probabilità ed il valore atteso di X_A.
soluzione di d): La variabile aleatoria X_A ha distribuzione di probabilità binomiale di parametri $n = 10$ e $\theta = 0,7$ e quindi il valore atteso vale 7.
Infatti si tratta del numero di successi (successo= superamento della prova scritta) su 10 prove (prova $i-esima$= candidato $i-esimo$) e la probabilità di successo vale p_A come per Paolo, inoltre, per ipotesi, si tratta di prove indipendenti, in quanto i candidati si comportano indipendentemente gli uni dagli altri. Quindi $P(X_A = k) = \binom{10}{k}(0,7)^k(0,3)^{10-k}$, per $k = 0,1,...10$, ed il valore atteso vale $n\theta = 10\cdot 0,7 = 7$.

e) Nella stessa situazione del punto d), trovare il valore atteso e la varianza del numero Y dei candidati che superano tutte le tre prove.
soluzione di a): $\mathbb{E}(Y) = 3,36$ e $Var(Y) = 2,23104$.
Infatti si tratta ancora di una variabile aleatoria binomiale di parametri $n = 10$, ma questa volta con $\theta = 0,336$, come si è calcolato al punto a). Basta quindi applicare la formula $\mathbb{E}(Y) = n\theta = 10\cdot 0,336 = 3,36$ e $Var(Y) = n\theta(1-\theta) = 10\cdot 0,336\cdot 0,664 = 2,23104$

f) (facoltativo) Siano ora $X^{(i)}$ il numero dei candidati che superano i prove, per $i = 0,\ 1,\ 2,\ 3$. Scrivere l'espressione per calcolare

$$\mathbb{P}(X^{(1)} = 3,\ X^{(2)} = 2,\ X^{(3)} = 3).$$

soluzione di f): La probabilità cercata vale $\frac{10!}{2!\,3!\,2!\,3!}(0,024)^2(0,188)^3(0,452)^2(0,336)^3$.
Infatti per cominciare,

$$\mathbb{P}(X^{(1)} = 3,\ X^{(2)} = 2,\ X^{(3)} = 3) = \mathbb{P}(X^{(0)} = 2,\ X^{(1)} = 3,\ X^{(2)} = 2,\ X^{(3)} = 3).$$

Inoltre si tratta di 10 prove (sempre i 10 candidati) a 4 esiti:

esito 0	il candidato non supera nessuna prova
esito 1	il candidato supera una sola prova
esito 2	il candidato supera esattamente due prove
esito 3	il candidato supera tutte e tre le prove

Per ipotesi le probabilità dell'esito i sono le stesse per ciascuna prova. Si tratta quindi di utilizzare il modello multinomiale (prove indipendenti a più esiti), per cui, posto p_i la probabilità di esito i, si ha

$$\mathbb{P}(X^{(0)} = 2,\ X^{(1)} = 3,\ X^{(2)} = 2,\ X^{(3)} = 3) = \frac{10!}{2!\,3!\,2!\,3!}(p_0)^2(p_1)^3(p_2)^2(p_3)^3.$$

Infine si calcola facilmente che

$$p_0 = (1 - p_A) \cdot (1 - p_B) \cdot (1 - p_C) = 0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,2 = 0,024,$$

$$p_1 = p_A \cdot (1 - p_B) \cdot (1 - p_C) + (1 - p_A) \cdot p_B \cdot (1 - p_C) + (1 - p_A) \cdot (1 - p_B) \cdot p_C = 0,188,$$

$$p_2 = p_A \cdot p_B \cdot (1 - p_C) + p_A \cdot (1 - p_B) \cdot_C + (1 - p_A) \cdot p_B \cdot p_C = 0,452,$$

$$p_3 = p_A \cdot p_B \cdot p_C = 0,336.$$

si noti che
- p_2 è già stata calcolata nel punto **b)**: corrisponde all'esito di fallire esattamente una prova,
- p_3 è stata calcolata nel punto **a)**,
- $p_1 = 1 - (p_0 + p_2 + p_3) = 1 - (0,024 + 0,452 + 0,336) = 0,188$

Esercizio 2. Sia X una variabile aleatoria con funzione di densità di probabilità data da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < -2 \\ k\,(x+2) & \text{per } -2 \le x < 0 \\ k(2-x) & \text{per } 0 \le x < 2 \\ 0 & \text{per } x \ge 2 \end{cases}$$

a) Calcolare il valore di k.
soluzione di a): La costante k vale $\frac{1}{4}$.
Infatti affinché $f(x)$ sia una densità di probabilità è necessario che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

ovvero, considerando che $f(x)$ vale zero per $|x| > 2$, e per la sua simmetria (ovvero[1] che $f(-x) = f(x)$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-2}^{+2} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{+2} k\,(2-x)\,dx = 2k\Big(\big(2x - \frac{x^2}{2}\big)\Big|_0^2\Big) = 2k\big(4-2\big) = 4\,k = 1$$

e quindi $k = 1/4$.

b) Calcolare $P(1 \le X \le 2)$.
soluzione di b): La probabilità cercata vale $\frac{1}{8}$.
Infatti

$$P(1 \le X \le 2) = \int_{1}^{+2} f(x)\,dx = \int_{1}^{+2} \frac{1}{4}\,(2-x)\,dx = \frac{1}{4}\Big(\big(2x - \frac{x^2}{2}\big)\Big|_1^2\Big) = \frac{1}{4}\,\big((4-2) - (2 - \frac{1}{2})\big) = \frac{1}{8}$$

[1] $f(-x) = f(x)$ è ovvio per $x > 2$, mentre $f(-x) = k\big((-x) + 2\big) = k(-x+2) = f(x)$ per $0 \le x \le 2$

c) Mostrare che $\mathbb{E}(X) = 0$.
soluzione di c): svolgimento
Il fatto che il valore atteso sia nullo è ovvio per simmetria, infatti se $f(-x) = f(x)$ allora la funzione $h(x) = xf(x)$ gode della proprietà[2] che $h(-x) = -h(x)$ e quindi

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \int_{-2}^{+2} xf(x)\,dx = \int_{-2}^{0} h(x)\,dx + \int_{0}^{+2} h(x)\,dx = 0.$$

Infatti, cambiando variabile di integrazione nel primo integrale (tra -2 e 0) e ponendo $y = -x$ si ha che quest'ultimo vale

$$\int_{-2}^{0} h(x)\,dx = \int_{+2}^{0} h(-y)\,(-1)dy = \int_{0}^{+2} h(-y)\,dy = \int_{0}^{+2} \big(-h(y)\big)\,dy = -\int_{0}^{+2} h(x)\,dx.$$

Alternativamente si possono effettuare i calcoli direttamente sulla funzione data, con gli stessi risultati.

d) Mostrare che $Var(X) = \frac{2}{3}$
soluzione di d): svolgimento
Infatti $Var(X) = \mathbb{E}\big[(X-\mu)^2\big] = \mathbb{E}\big[X^2\big]$, in quanto $\mu = \mathbb{E}\big[X\big] = 0$, e quindi, sempre per simmetria (questa volta di $x^2\,f(x)$)

$$Var(X) = \int_{-2}^{+2} x^2\,f(x)\,dx = 2\int_{0}^{+2} x^2\,f(x)\,dx = 2\int_{0}^{+2} x^2\,\frac{1}{4}\,(2-x)\,dx,$$

da cui

$$Var(X) = \frac{1}{2}\Big(\int_{0}^{+2} (2x^2 - x^3)\,dx\Big) = \frac{1}{2}\Big((2\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4})\Big|_{0}^{+2}\Big) = \frac{8}{3} - \frac{16}{8} = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}.$$

e) Siano X_n, per $n = 1, \ldots, 100$, variabili aleatorie indipendenti e con la stessa legge di X. Calcolare approssimativamente $\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{100}\sum_{n=1}^{100} X_n\right| > \frac{1}{\sqrt{600}}\right)$.
soluzione di e): La probabilità cercata vale approssimativamente $0,6170$.
Infatti, dal teorema centrale del limite sappiamo che, se $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, dove $\{X_k\}_{\{k\geq 1\}}$ è una successione di v.a. indipendenti identicamente distribuite, con valore atteso e varianza finite, e posto $Y_n = \frac{S_n}{n}$, si ha che

$$P\big(|\frac{S_n - n\mu}{n}| \leq \varepsilon\big) = P(\{|Y_n - \mu| \leq \varepsilon\}) \simeq 2\Phi\left(\sqrt{\tfrac{n}{\sigma^2}}\cdot\varepsilon\right) - 1$$

e quindi

$$P\big(|\tfrac{S_n-n\mu}{n}| > \varepsilon\big) = 1 - P\big(|\tfrac{S_n-n\mu}{n}| \leq \varepsilon\big) \simeq 1 - \big(2\Phi\left(\sqrt{\tfrac{n}{\sigma^2}}\cdot\varepsilon\right) - 1\big) = 2\Big(1 - \Phi\left(\sqrt{\tfrac{n}{\sigma^2}}\cdot\varepsilon\right)\Big).$$

Nel nostro caso $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{600}}$, $n = 100$ e $\sigma^2 = \frac{2}{3}$, per cui si ha $\sqrt{\frac{n}{\sigma^2}}\cdot\varepsilon = \sqrt{\frac{100}{(2/3)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{600}} = \sqrt{\frac{100\cdot 3}{2\cdot 600}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 0.5$. Di conseguenza

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{100}\sum_{n=1}^{100} X_n\right| > \frac{1}{\sqrt{600}}\right) \simeq 2\Big(1 - \Phi\big(\tfrac{1}{\sqrt{600}}\sqrt{\tfrac{100}{(2/3)}}\big)\Big) = 2\big(1 - \Phi(0.5)\big) = 2\,(1 - 0,6915) = 0,6170.$$

[2] $h(-x) = -xf(-x) = -xf(x) = -h(x)$