

Corso di Laurea Triennale in Matematica
Calcolo delle Probabilità I (docenti G. Nappo, F. Spizzichino)

Prova di martedì 20 luglio 2004 (tempo a disposizione: 3 ore).

Scrivere su ogni foglio **NOME** e **COGNOME**. Le risposte devono essere giustificate sui fogli protocollo e riportate nel foglio **RISPOSTE**.

ATTENZIONE: concentrare l'attenzione sugli **Esercizi 1 e 2**, e dedicare il tempo rimasto a risolvere uno degli altri due.

Esercizio 1. Ricordiamo che una "giornata" del gioco del lotto prevede 10 diversi gruppi indipendenti di 5 estrazioni (ciascun gruppo di estrazioni corrisponde ad una "ruota", che prende il nome dalla città in cui viene effettuata l'estrazione); le 5 estrazioni su ciascuna ruota sono effettuate in modo casuale, senza reinserimento, da un'urna contenente i numeri $\{1, 2, \dots, 90\}$.

a) Si fissi una giornata e una ruota (ad esempio la giornata del 21 luglio 2004 e la ruota di Roma). Calcolare la probabilità che

(i) $\{\text{il numero } 16 \text{ venga estratto sulla ruota fissata e nella giornata fissata}\}$

(ad esempio $\{\text{il numero } 16 \text{ venga estratto sulla ruota di Roma il } 21 \text{ luglio } 2004\}$).

(ii) $\{\text{i numeri } 16 \text{ e } 39 \text{ vengano estratti sulla ruota fissata e nella giornata fissata}\}$.

(iii) $\{\text{almeno uno tra i numeri } 16 \text{ e } 39 \text{ venga estratto sulla ruota fissata e nella giornata fissata}\}$.

b) Si fissi ora solo la giornata. Calcolare l'espressione della probabilità β che $\{\text{il numero } 16 \text{ venga estratto su almeno una delle } 10 \text{ ruote nella giornata fissata}\}$.

Si consideri ora una serie di n diverse giornate e, per $j = 1, 2, \dots, n$, si ponga $E_j \equiv \{\text{il numero } 16 \text{ viene estratto sulla ruota di Roma nella giornata } j\}$, $X_j = \mathbf{1}_{E_j}$ le variabili aleatorie binarie indicatrici dell'evento E_j , ed infine

$$S_n \equiv \sum_{j=1}^n X_j.$$

c) Individuare la distribuzione di S_n e scrivere la formula per la densità discreta $P(S_n = k)$ di S_n , **specificando** l'insieme dei valori k che S_n può assumere).

d) Utilizzando la disuguaglianza di Chebyshev, trovare un valore di n per cui risulti

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{18}\right| \leq 0.1\right) \geq 0.9.$$

e) Calcolare la probabilità condizionata $P(S_5 = 3 | S_{10} = 6)$.

Esercizio 2. Consideriamo un gioco in cui si lancia prima una moneta ben equilibrata e poi si lanciano due dadi ben equilibrati. Il punteggio realizzato dipende, oltre che dai valori ottenuti con i dadi, anche dal risultato del lancio della moneta secondo il seguente schema: se esce testa il punteggio è pari al valore del primo dado, se esce croce il punteggio è pari al minimo dei valori dei due dadi.

Si ponga T l'evento $\{\text{esce testa}\}$, C l'evento $\{\text{esce croce}\}$ ed A l'evento $\{\text{si ottiene un punteggio maggiore o uguale a } 5\}$

a) Calcolare la probabilità di A .

b) (i) Sapendo che si è verificato l'evento A , calcolare la probabilità che sia uscita testa.

(ii) Sapendo che si è verificato l'evento A , calcolare la probabilità che sia uscita croce.

c) Posto X il punteggio ottenuto, calcolare la distribuzione di X .

d) Calcolare il valore atteso di X .

Esercizio 3. Siano A e B due eventi indipendenti con probabilità p_A e p_B rispettivamente.

a) Calcolare $P(A|A \cup B)$.

Si considerino le variabili aleatorie binarie $X_A = \mathbf{1}_A$ e $X_B = \mathbf{1}_B$, indicatrici di A e B rispettivamente. Sia infine

$$W = X_A + X_B = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B.$$

b) Esprimere gli eventi $\{W = 0\}$, $\{W = 1\}$, $\{W = 2\}$ e $\{W \geq 1\}$ attraverso gli eventi A , \bar{A} , B , \bar{B} e calcolare la distribuzione di W .

c) Calcolare la distribuzione congiunta di X_A e W .

d) Calcolare (i) $P(X_A = 1|W \geq 1)$, (ii) $P(X_A = 1|W = 1)$.

e) Calcolare approssimativamente $p_A = P(A)$, $p_B = P(B)$, nel caso in cui $A = \{X > 1.88\}$ e $B = \{Y \leq 0\}$, dove X ed Y sono due variabili aleatorie indipendenti, con X gaussiana di valore atteso $\mu = 1$ e varianza $\sigma^2 = 4$ ed Y gaussiana standard.

f) Spiegare il motivo per cui $A = \{X > 1.88\}$ e $B = \{Y \leq 0\}$ sono indipendenti e calcolare approssimativamente $P(X_A = 1|W \geq 1)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < -1 \\ c(1+x^3) & \text{per } -1 \leq x < 0 \\ c(1-x^3) & \text{per } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Trovare il valore di c e disegnare il grafico di f_X .

b) Calcolare $P(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2})$.

c) Calcolare $\mathbb{E}(X)$ (**attenzione:** è possibile trovarlo senza fare calcoli?).

FOGLIO RISPOSTE della prova di Martedì 20 luglio 2004

NOME e COGNOME

canale NAPPO

canale SPIZZICHINO

ORALE: 22 luglio ...

dopo il 26 luglio ...

dopo il 22 settembre ...

Esercizio 1.

a)(i)..... a)(ii)..... a)(iii).....

b) $\beta =$

c) $P(S_n = k) =$ $k =$

d) $n =$ e) $P(S_5 = 3 | S_{10} = 6) =$

Esercizio 2.

a) $P(A) =$ b) (i) b) (ii)

c) (distribuzione di X)

X	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$						

d) $E(X) =$

Esercizio 3.

a) $P(A|A \cup B) =$

b) $\{W = 0\} =$, $\{W = 1\} =$

$\{W = 2\} =$, $\{W \geq 1\} =$

W	0	1	2
$P(W = h)$			
$X \setminus W$	0	1	2
0			
1			

d)(i) $P(X_A = 1 | W \geq 1) =$, d)(ii) $P(X_A = 1 | W = 1) =$

e) $p_A = P(X > 1.88) \simeq$ $p_B = P(Y \leq 0) =$

f) **indipendenza:** svolto non svolto $P(X_A = 1 | W = 1) \simeq$

Esercizio 4.

a) $c =$ grafico di f_X : svolto non svolto

b) $P(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}) =$ c) $E(X) =$

RISPOSTE della prova di Martedì 20 luglio 2004

Esercizio 1.

- a) (i)..... $\frac{1}{18}$ a) (ii)..... $\frac{2}{801}$ a) (iii)..... $\frac{87}{801}$
- b) $\beta = \dots\dots\dots 1 - \left(\frac{17}{18}\right)^1 0$
- c) $P(S_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{18}\right)^k \left(\frac{17}{18}\right)^{n-k} \dots\dots\dots$ $k = 0, 1, \dots, n - 1, n$
- d) $n = 53$ e) $P(S_5 = 3 | S_{10} = 6) = \frac{10}{21}$.

Esercizio 2.

- a) $P(A) = \frac{2}{9}$. b) (i) $\frac{3}{4}$ b) (ii) $\frac{1}{4}$

c) (distribuzione di X)

X	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	$\frac{17}{72}$	$\frac{15}{72}$	$\frac{13}{72}$	$\frac{11}{72}$	$\frac{9}{72}$	$\frac{7}{72}$

d) $E(X) = \frac{217}{72} = 3 + \frac{1}{72} \simeq 3.01388$

Esercizio 3.

a) $P(A|A \cup B) = \frac{p_A}{p_A + p_B - p_A \cdot p_B}$

b) $\{W = 0\} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\{W = 1\} = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$,

$\{W = 2\} = A \cap B$, $\{W \geq 1\} = A \cup B$

W	0	1	2
$P(W = h)$	$(1 - p_A)(1 - p_B)$	$p_A(1 - p_B) + (1 - p_A)p_B$	$p_A p_B$

c)

$X \setminus W$	0	1	2
0	$(1 - p_A)(1 - p_B)$	$(1 - p_A)p_B$	0
1	0	$p_A(1 - p_B)$	$p_A p_B$

d)(i) $P(X_A = 1 | W \geq 1) = \frac{p_A}{p_A + p_B - p_A \cdot p_B}$, d)(ii) $P(X_A = 1 | W = 1) = \frac{p_A(1 - p_B)}{p_A(1 - p_B) + (1 - p_A)p_B}$

e) $p_A = P(X > 1.88) \simeq 0.33$ $p_B = P(Y \leq 0) = 0.5$

f) **indipendenza:** svolto non svolto $P(X_A = 1 | W = 1) \simeq \frac{66}{133}$

Esercizio 4.

a) $c = \frac{2}{3}$ **grafico di f_X :** svolto non svolto

b) $P(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}) = \frac{31}{48}$ c) $E(X) = 0$

SOLUZIONI della prova di Martedì 20 luglio 2004 (tempo a disposizione: 3 ore).

Esercizio 1. Ricordiamo che una "giornata" del gioco del lotto prevede 10 diversi gruppi indipendenti di 5 estrazioni (ciascun gruppo di estrazioni corrisponde ad una "ruota", che prende il nome dalla città in cui viene effettuata l'estrazione); le 5 estrazioni su ciascuna ruota sono effettuate in modo casuale, senza reinserimento, da un'urna contenente i numeri $\{1, 2, \dots, 90\}$.

a) Si fissi una giornata e una ruota (ad esempio la giornata del 21 luglio 2004 e la ruota di Roma). Calcolare la probabilità che

(i) {il numero 16 venga estratto sulla ruota fissata e nella giornata fissata}

(ad esempio {il numero 16 venga estratto sulla ruota di Roma il 21 luglio 2004}).

(ii) {i numeri 16 e 39 vengano estratti sulla ruota fissata e nella giornata fissata}.

(iii) {almeno uno tra i numeri 16 e 39 venga estratto sulla ruota fissata e nella giornata fissata}.

soluzione di a) (i): La probabilità cercata vale $\frac{1}{18}$.

Infatti si tratta di estrarre 5 palline da un'urna che contiene 90 palline di cui 1 bianca (quella con il numero 16) e le rimanenti 89 rosse, e posto $A_1 = \{\text{il numero 16 viene estratto sulla ruota fissata e nella giornata fissata}\}$, si ha che $A_1 = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5$, dove $B_i = \{\text{l}'i\text{-esima pallina estratta è bianca}\} (= \{\text{il 16 esce alla } i\text{-esima estrazione}\})$ e quindi¹

$$P(A_1) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4) + P(B_5) = \frac{1}{90} + \dots + \frac{1}{90} = \frac{5}{90}$$

Alternativamente, poiché ai fini dell'evento A_1 si può pensare che si tratti di estrazioni in blocco (si vince qualunque sia l'ordine di estrazione del numero 16), si può anche ottenere il risultato con il seguente metodo

$$P(A_1) = \frac{\binom{1}{1} \cdot \binom{89}{4}}{\binom{90}{5}} = \frac{89!}{4! \cdot 85!} = \frac{89! \cdot 5!}{90! \cdot 4!} = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$$

soluzione di a) (ii): La probabilità cercata vale $\frac{2}{9 \cdot 89} = \frac{2}{801} \simeq 0,00249$.

Infatti si tratta di estrarre 5 palline da un'urna che contiene 90 palline di cui 2 bianche (quella con il numero 16 e quella con il numero 39) e le rimanenti 88 rosse, e posto $A_2 = \{\text{i numeri 16 e 39 vengano estratti sulla ruota fissata e nella giornata fissata}\}$, si ha che $A_2 = (B_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap B_3) \cup \dots \cup (B_4 \cap B_5) = \bigcup_{\{i,j\} \subset \{1,2,3,4,5\}} (B_i \cap B_j)$, dove $B_i = \{\text{l}'i\text{-esima pallina estratta è bianca}\}$ e quindi² si ha

$$P(A_2) = P(B_1 \cap B_2) + P(B_2 \cap B_3) + \dots + P(B_4 \cap B_5)$$

¹Si ricordi che $P(B_k) = P(B_1) = \frac{1}{90}$ per $k = 1, 2, 3, 4, 5$: infatti $\Omega = \{(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5), \text{ con } i_h \text{ tutti distinti, } i_h \in \{1, 2, \dots, 90\}\}$ e $|\Omega| = 90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86$, inoltre, ad esempio, $B_2 = \{(i_1, 16, i_3, i_4, i_5), \text{ con } i_h \text{ tutti distinti, } i_h \in \{1, 2, \dots, 15, 17, \dots, 90\}\}$ e $|B_2| = 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86$, da cui immediatamente $P(B_2) = \frac{|B_2|}{|\Omega|} = \frac{1}{90}$. Alternativamente

$$P(B_2) = P(B_1)P(B_2|B_1) + P(\bar{B}_1)P(B_2|\bar{B}_1) = \frac{1}{90} \cdot 0 + \frac{89}{90} \cdot \frac{1}{89} = \frac{1}{90}.$$

²Si tenga conto che

$$P(B_i \cap B_j) = P(B_i)P(B_j|B_i) = \frac{2}{90} \cdot \frac{1}{89}$$

e che i sottoinsiemi $\{i, j\}$ di cardinalità 2 di $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, sono tanti quanti le combinazioni di 5 elementi di classe 2, ovvero $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1)} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$

$$= \frac{2}{90} \cdot \frac{1}{89} + \dots + \frac{2}{90} \cdot \frac{1}{89} = \binom{5}{2} \cdot \frac{2}{90} \cdot \frac{1}{89} = \frac{2}{9 \cdot 89} = \frac{2}{801}$$

Alternativamente, poiché ai fini dell'evento A_1 si può pensare che si tratti di estrazioni in blocco (si vince qualunque sia l'ordine di estrazione dei numeri 16 e 39), si può anche ottenere il risultato con il seguente metodo

$$P(A_2) = \frac{\binom{2}{2} \cdot \binom{88}{3}}{\binom{90}{5}} = \frac{\frac{88!}{3! \cdot 85!}}{\frac{90!}{5! \cdot 85!}} = \frac{88! \cdot 5!}{90! \cdot 3!} = \frac{10}{90 \cdot 89} = \frac{2}{801}$$

soluzione di a) (iii): La probabilità cercata vale $2 \frac{1}{18} - \frac{2}{801}$ ($= \frac{87}{801} \simeq 0,10861$).

Infatti, posto $C_1 = \{\text{il numero 39 viene estratto sulla ruota fissata e nella giornata fissata}\}$, tenendo conto del principio di esclusione/inclusione, la probabilità cercata è

$$P(A_1 \cup C_1) = P(A_1) + P(C_1) - P(A_1 \cap C_1) = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} - \frac{2}{9 \cdot 801} = \frac{1}{9} - \frac{2}{9 \cdot 89} = \frac{89 - 2}{9 \cdot 89} = \frac{87}{801}$$

in quanto $P(C_1) = P(A_1)$ e $A_1 \cap C_1 = A_2$.

b) Si fissi ora solo la giornata. Calcolare l'espressione della probabilità β che {il numero 16 venga estratto su almeno una delle 10 ruote nella giornata fissata}.

soluzione di b) la probabilità cercata vale $\beta = 1 - \left(\frac{17}{18}\right)^{10}$ ($\simeq 0,56463$)

Infatti, posto $D = \{\text{il numero 16 non esce su nessuna delle 10 ruote nella giornata fissata}\}$ si tratta di calcolare la probabilità dell'evento complementare \bar{D} , e quindi

$$\beta = P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - P(\bar{R}_1 \cap \bar{R}_2 \cap \dots \cap \bar{R}_{10}) = 1 - P(\bar{R}_1) \cdot P(\bar{R}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{R}_{10}) = 1 - \left(\frac{17}{18}\right)^{10},$$

dove $R_i = \{\text{il numero 16 esce sulla ruota } i\text{-esima, nella giornata fissata}\}$, per $i = 1, \dots, 10$, cosicché $P(\bar{R}_i) = 1 - P(R_i) = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}$.

Si consideri ora una serie di n diverse giornate e, per $j = 1, 2, \dots, n$, si ponga $E_j \equiv \{\text{il numero 16 viene estratto sulla ruota di Roma nella giornata } j\}$, $X_j = 1_{E_j}$ le variabili aleatorie binarie indicatrici dell'evento E_j , ed infine

$$S_n \equiv \sum_{j=1}^n X_j.$$

c) Individuare la distribuzione di S_n e scrivere la formula per la densità discreta $P(S_n = k)$ di S_n , specificando l'insieme dei valori k che S_n può assumere).

soluzione di c): La distribuzione di S_n è binomiale di parametri n e $\theta = \frac{1}{18}$, ovvero

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} \theta^k (1 - \theta)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{18}\right)^k \left(\frac{17}{18}\right)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Infatti basta considerare che gli eventi E_j sono relativi a giornate distinte e formano una famiglia di eventi completamente (o globalmente) indipendenti ed S_n conta il numero dei successi in n giornate, dove successo alla j -esima prova significa {esce il 16 sulla ruota di Roma, nella giornata j }.

d) Utilizzando la disuguaglianza di Chebyshev, trovare un valore di n per cui risulti

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{18}\right| \leq 0.1\right) \geq 0.9.$$

soluzione di d): Basta prendere $n \geq 53$

Infatti,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \theta\right| \leq 0.1\right) \geq 0.9$$

se e solo se

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \theta\right| > 0.1\right) \leq 1 - 0.9 = 0.1 = \frac{1}{10}.$$

Inoltre, per la disuguaglianza di Chebyshev,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \theta\right| > 0.1\right) \leq \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2 \cdot (0.1)^2} = \frac{n\theta(1-\theta)}{n^2 \cdot \frac{1}{100}} = \frac{100\theta(1-\theta)}{n} \leq \frac{100}{4n},$$

dove l'ultima disuguaglianza vale in quanto $0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ per ogni $x \in [0, 1]$. Basta prendere n in modo che valga

$$\frac{100\theta(1-\theta)}{n} = \frac{100 \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{17}{18}}{n} \leq \frac{1}{10},$$

ovvero

$$1000\theta(1-\theta) = 1000 \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{17}{18} = \frac{17000}{324} = 52,4691 \leq n,$$

e quindi basta prendere $n \geq 53$.

Si osservi che in questo caso conosciamo esattamente θ e quindi **non conviene utilizzare la seconda maggiorazione**, ovvero non conviene procedere richiedendo che

$$\frac{100}{4n} \leq \frac{1}{10}, \quad \text{ovvero} \quad \frac{1000}{4} (= 2500) \leq n,$$

In questo modo infatti si ottiene un valore di n molto più grande del necessario.

e) Calcolare la probabilità condizionata $P(S_5 = 3 | S_{10} = 6)$.

soluzione di e): La probabilità cercata vale $\frac{10}{21}$.

Infatti, per la formula di Bayes

$$P(S_5 = 3 | S_{10} = 6) = \frac{P(S_5 = 3)P(S_{10} = 6 | S_5 = 3)}{P(S_{10} = 6)} = \frac{\binom{5}{3}\theta^3(1-\theta)^2 \cdot \binom{5}{3}\theta^3(1-\theta)^2}{\binom{10}{6}\theta^6(1-\theta)^4},$$

in quanto, sapendo che nelle prime 5 giornate si sono avuti 3 successi, il calcolo della probabilità dell'evento $\{S_{10} = 6\}$ si riduce a calcolare la probabilità che sulle successive 5 giornate si ottengano (altri) 3 successi, ovvero $P(S_{10} = 6 | S_5 = 3) = \binom{5}{3}\theta^3(1-\theta)^2$. Di conseguenza

$$P(S_5 = 3 | S_{10} = 6) = \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{5}{3}}{\binom{10}{6}} = \frac{10 \cdot 10}{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{10}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}.$$

Alternativamente, posto $S'_5 = S_{10} - S_5$, il numero di successi ottenuti nelle cinque giornate dalla sesta alla decima incluse, si ha che S'_5 ed S_5 sono indipendenti e con la stessa distribuzione, inoltre

$$\{S_5 = 3\} \cap \{S_{10} = 6\} = \{S_5 = 3\} \cap \{S'_5 = 3\}$$

e quindi

$$\begin{aligned} P(S_5 = 3 | S_{10} = 6) &= \frac{P(\{S_5 = 3\} \cap \{S_{10} = 6\})}{P(S_{10} = 6)} = \frac{P(\{S_5 = 3\} \cap \{S'_5 = 3\})}{P(S_{10} = 6)} \\ &= \frac{P(\{S_5 = 3\}) \cdot P(\{S'_5 = 3\})}{P(S_{10} = 6)} = \frac{\binom{5}{3}\theta^3(1-\theta)^2 \cdot \binom{5}{3}\theta^3(1-\theta)^2}{\binom{10}{6}\theta^6(1-\theta)^4} \end{aligned}$$

$$= \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{5}{3}}{\binom{10}{6}} = \frac{10 \cdot 10}{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{10}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$$

Esercizio 2. Consideriamo un gioco in cui si lancia prima una moneta ben equilibrata e poi si lanciano due dadi ben equilibrati. Il punteggio realizzato dipende, oltre che dai valori ottenuti con i dadi, anche dal risultato del lancio della moneta secondo il seguente schema: se esce testa il punteggio è pari al valore del primo dado, se esce croce il punteggio è pari al minimo dei valori dei due dadi.

Si ponga T l'evento $\{\text{esce testa}\}$, C l'evento $\{\text{esce croce}\}$ ed A l'evento $\{\text{si ottiene un punteggio maggiore o uguale a } 5\}$

a) Calcolare la probabilità di A .

soluzione di a): $P(A) = \frac{2}{9}$

Infatti, gli eventi T e C formano una partizione dell'evento certo, e quindi, per la formula delle probabilità totali si ha

$$\begin{aligned} P(A) &= P(T)P(A|T) + P(C)P(A|C) = \frac{1}{2}P(X_1 \geq 5) + \frac{1}{2}P(\min(X_1, X_2) \geq 5) \\ &= \frac{1}{2}P(X_1 \geq 5) + \frac{1}{2}P(X_1 \geq 5, X_2 \geq 5) = \frac{1}{2}P(X_1 \geq 5) + \frac{1}{2}P(X_1 \geq 5)P(X_2 \geq 5) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{9}, \end{aligned}$$

dove si è posto X_i il valore del dado i , per $i = 1, 2$.

b) (i) Sapendo che si è verificato l'evento A , calcolare la probabilità che sia uscita testa.

(ii) Sapendo che si è verificato l'evento A , calcolare la probabilità che sia uscita croce.

soluzione di b): (i) $P(T|A) = \frac{3}{4}$ (ii) $P(C|A) = \frac{1}{4}$

Infatti per la formula di Bayes

$$\begin{aligned} P(T|A) &= \frac{P(T)P(A|T)}{P(T)P(A|T) + P(C)P(A|C)} = \frac{\frac{1}{2}P(X_1 \geq 5)}{\frac{1}{2}P(X_1 \geq 5) + \frac{1}{2}P(\min(X_1, X_2) \geq 5)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Infine $P(C|A) = 1 - P(T|A) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

c) Posto X il punteggio ottenuto, calcolare la distribuzione di X .

soluzione di c):

X	1	2	3	4	5	6
$\mathbf{P(X = k)}$	$\frac{17}{72}$	$\frac{15}{72}$	$\frac{13}{72}$	$\frac{11}{72}$	$\frac{9}{72}$	$\frac{7}{72}$

Infatti X assume solo i valori interi da 1 a 6 e

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(T)P(X = k|T) + P(C)P(X = k|C) = \frac{1}{2}P(X_1 = k) + \frac{1}{2}P(\min(X_1, X_2) = k) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(P(X_1 = k, X_2 > k) + P(X_1 > k, X_2 = k) + P(X_1 = k, X_2 = k)) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(P(X_1 = k)P(X_2 > k) + P(X_1 > k)P(X_2 = k) + P(X_1 = k)P(X_2 = k)) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{6-k}{6} + \frac{6-k}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \right) \\ &= \frac{1}{12} \left(1 + 2 \frac{6-k}{6} + \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{12} \cdot \frac{19-2k}{6} = \frac{19-2k}{72}. \end{aligned}$$

(come verifica si noti che $\sum_{k=1}^6 \frac{19-2k}{72} = \frac{1}{72}(17 + 15 + 13 + 11 + 9 + 7) = \frac{1}{72}3 \cdot 24 = 1$)

Inoltre va sottolineato che $P(\min(X_1, X_2) = k) = P(X_1 = k, X_2 \geq k) + P(X_1 \geq k, X_2 = k) - P(X_1 = k, X_2 = k)$, oppure con la formula $P(\min(X_1, X_2) = k) = P(X_1 \geq k, X_2 \geq k) - P(X_1 \geq k+1, X_2 \geq k+1)$.

d) Calcolare il valore atteso di X .

soluzione di d): $\mathbb{E}(X) = \frac{217}{72} = 3 + \frac{1}{72}$

Infatti

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^6 kP(X = k) = \sum_{k=1}^6 k \frac{19-2k}{72} = \frac{1}{72}(1 \cdot 17 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 13 + 4 \cdot 11 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 7) \\ &= \frac{1}{72}(17 + 30 + 39 + 44 + 45 + 42) = \frac{217}{72} = 3 + \frac{1}{72} \simeq 3,01388 \end{aligned}$$

Esercizio 3. Siano A e B due eventi indipendenti con probabilità p_A e p_B rispettivamente.

a) Calcolare $P(A|A \cup B)$.

soluzione di a): $P(A|A \cup B) = \frac{p_A}{p_A + p_B - p_A \cdot p_B}$

Infatti

$$P(A|A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

ed essendo A e B indipendenti si ha

$$P(A|A \cup B) = \frac{P(A)}{P(A) + P(B) - P(A)P(B)} = \frac{p_A}{p_A + p_B - p_A \cdot p_B}$$

Si considerino le variabili aleatorie binarie $X_A = \mathbf{1}_A$ e $X_B = \mathbf{1}_B$, funzioni indicatrici di A e B rispettivamente. Sia infine

$$W = X_A + X_B = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B.$$

b) Esprimere gli eventi $\{W = 0\}$, $\{W = 1\}$, $\{W = 2\}$ e $\{W \geq 1\}$ attraverso gli eventi A , \bar{A} , B , \bar{B} e calcolare la distribuzione di W .

soluzione di b): $\{W = 0\} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\{W = 1\} = (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$, $\{W = 2\} = A \cap B$ e $\{W \geq 1\} = A \cup B$ e di conseguenza

$$P(W = 0) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = (1 - p_A)(1 - p_B) = 1 - p_A - p_B + p_A p_B$$

$$P(W = 1) = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = (1 - p_A)p_B + p_A(1 - p_B) = p_A + p_B - 2p_A p_B$$

$$P(W = 2) = 1 - (P(W = 0) + P(W = 1)) = P(A \cap B) = p_A p_B$$

(verifica: $P(W = 0) + P(W = 1) + P(W = 2) = (1 - p_A)(1 - p_B) + (1 - p_A)p_B + p_A(1 - p_B) + p_A p_B = 1 - p_B - p_A(1 - p_B) + (1 - p_A)p_B + p_A(1 - p_B) + p_A p_B = 1 - p_B + p_B - p_A p_B + p_A p_B = 1$)

c) Calcolare la distribuzione congiunta di X_A e W .

$X \setminus W$	0	1	2
0	$(1 - p_A)(1 - p_B)$	$(1 - p_A)p_B$	0
1	0	$p_A(1 - p_B)$	$p_A p_B$

soluzione di c):

Infatti

$$\begin{aligned}
 P(X_A = 0, W = 0) &= P(\bar{A} \cap (\bar{A} \cap \bar{B})) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = (1 - p_A)(1 - p_B); \\
 P(X_A = 0, W = 1) &= P(\bar{A} \cap [(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B})]) = P(\bar{A} \cap B) = (1 - p_A)p_B; \\
 P(X_A = 0, W = 2) &= P(\bar{A} \cap (A \cap B)) = P(\emptyset) = 0; \\
 \\
 P(X_A = 1, W = 0) &= P(A \cap (\bar{A} \cap \bar{B})) = P(\emptyset) = 0; \\
 P(X_A = 1, W = 1) &= P(A \cap [(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B})]) = P(A \cap \bar{B}) = p_A(1 - p_B); \\
 P(X_A = 1, W = 2) &= P(A \cap (A \cap B)) = P(A \cap B) = p_A p_B;
 \end{aligned}$$

d) Calcolare (i) $P(X_A = 1|W \geq 1)$, (ii) $P(X_A = 1|W = 1)$.
soluzione di d): (i) $P(X_A = 1|W \geq 1) = P(A|A \cup B) = \frac{p_A}{p_A + p_B - p_A \cdot p_B}$ (ii)

$$P(X_A = 1|W = 1) = \frac{p_A(1-p_B)}{p_A(1-p_B) + (1-p_A)p_B} = \frac{p_A - p_A p_B}{p_A + p_B - 2p_A p_B}$$

e) Calcolare approssimativamente $p_A = P(A)$, $p_B = P(B)$, nel caso in cui $A = \{X > 1.88\}$ e $B = \{Y \leq 0\}$, dove X ed Y sono due variabili aleatorie indipendenti, con X gaussiana di valore atteso $\mu = 1$ e varianza $\sigma^2 = 4$ ed Y gaussiana standard.

soluzione di e): $P(A) \simeq 0.33$ $P(B) = 0.5$

Infatti, essendo X una variabile aleatoria di legge gaussiana con valore atteso $\mu = 1$ e varianza $\sigma^2 = 4 = 2^2$, la variabile aleatoria $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-1}{2}$ ha legge gaussiana standard, e quindi

$$P(A) = P(X > 1.88) = P\left(\frac{X-1}{2} > \frac{1.88-1}{2}\right) = P(Z > 0.44) \simeq 1 - 0.67 = 0.33.$$

Invece il calcolo di $P(Y \geq 0) = \frac{1}{2}$ è un calcolo esatto, in quanto Y è una gaussiana standard e

$$P(Y \geq 0) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{2}.$$

f) Spiegare il motivo per cui $A = \{X > 1.88\}$ e $B = \{Y \leq 0\}$ sono indipendenti e calcolare approssimativamente $P(X_A = 1|W \geq 1)$.

soluzione di f): Gli eventi A e B si possono scrivere come $A = \{X > 1.88\} = \{X \in I\}$ e $B = \{Y \geq 0\} = \{Y \in J\}$, per gli intervalli (non limitati) $I = (1.88, \infty)$ e $J = [0, \infty)$, le variabili aleatorie X ed Y sono indipendenti, e quindi $P(X \in I, Y \in J) = P(X \in I)P(Y \in J)$, ovvero A e B sono indipendenti. Inoltre dal precedente punto d) sappiamo che

$$P(X_A = 1|W \geq 1) = P(A|A \cup B) = \frac{p_A}{p_A + p_B - p_A \cdot p_B} \simeq \frac{\frac{33}{100}}{\frac{33}{100} + \frac{1}{2} - \frac{33}{100} \cdot \frac{1}{2}}$$

$$P(X_A = 1|W \geq 1) \simeq \frac{\frac{33}{100}}{\frac{33}{100} + \frac{50}{100} - \frac{33}{200}} = \frac{\frac{66}{200}}{\frac{66}{200} + \frac{100}{200} - \frac{33}{200}} = \frac{66}{66 + 100 - 33} = \frac{66}{133} \simeq 0.49624$$

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < -1 \\ c(1+x^3) & \text{per } -1 \leq x < 0 \\ c(1-x^3) & \text{per } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Trovare il valore di c e disegnare il grafico di f_X .

soluzione di a): $c = \frac{2}{3}$

Infatti

$$\begin{aligned}
 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_{-1}^0 f_X(x) dx + \int_0^1 f_X(x) dx \\
 &= c \left(\int_{-1}^0 (1+x^3) dx + \int_0^1 (1-x^3) dx \right) = c \left(\left[x + \frac{x^4}{4} \right]_{x=-1}^{x=0} + \left[x - \frac{x^4}{4} \right]_{x=0}^{x=1} \right) \\
 &= c \left(0 - (-1) - \frac{(-1)^4}{4} + 1 - \frac{1^4}{4} - 0 \right) = c \left(1 - \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{4} \right) \\
 &= c 2 \frac{3}{4} = c \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

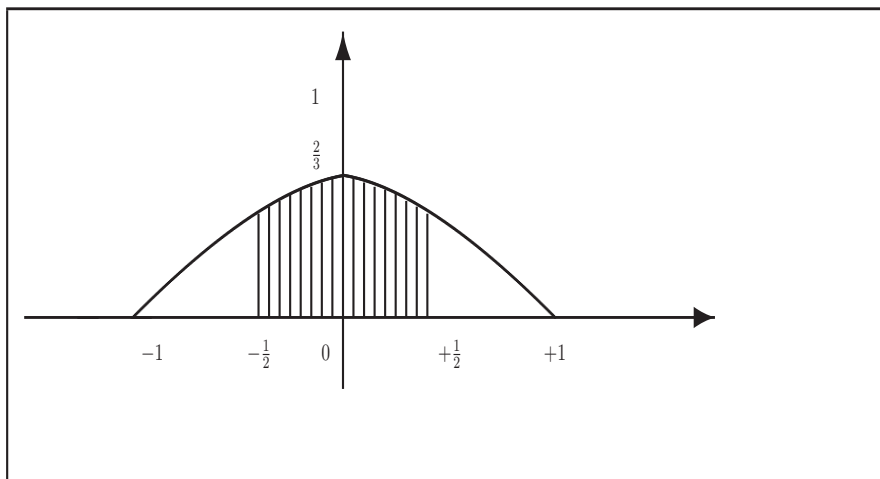


Figura 1: Grafico di $f_X(x)$. L'area tratteggiata rappresenta $P(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2})$.

Alternativamente, il grafico di f_X deve essere del tipo in figura 2.

Si vede immediatamente (e si può verificare anche analiticamente) che la funzione f_X è simmetrica rispetto all'asse $x = 0$, ovvero che $f_X(-x) = f_X(x)$, e quindi

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx &= 2 \int_0^1 f_X(x) dx \\
 &= 2c \int_0^1 (1-x^3) dx = 2c \left[x - \frac{x^4}{4} \right]_{x=0}^{x=1} \\
 &= 2c \left(1 - \frac{1^4}{4} - 0 \right) = 2c \left(1 - \frac{1}{4} \right) \\
 &= 2c \frac{3}{4} = c \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

b) Calcolare $P(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2})$.

soluzione di b): $P(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}) = \frac{31}{48} \simeq 0.64583$.

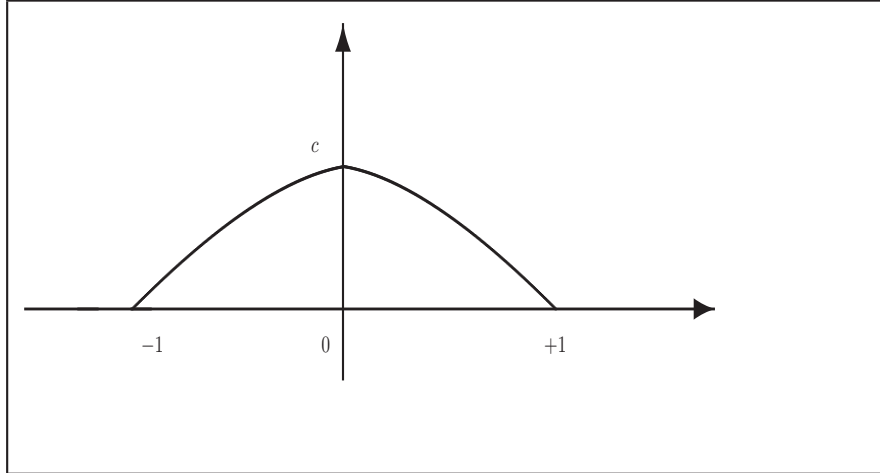


Figura 2: Grafico di $f_X(x)$, prima di calcolare il valore di c

Infatti in generale se X ammette densità di probabilità $f_X(x)$ allora

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x) dx,$$

quindi

$$\begin{aligned} P\left(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}\right) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_X(x) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^0 f_X(x) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} f_X(x) dx \\ &= c \left(\int_{-\frac{1}{2}}^0 (1+x^3) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^3) dx \right) = c \left(\left[x + \frac{x^4}{4} \right]_{x=-\frac{1}{2}}^{x=0} + \left[x - \frac{x^4}{4} \right]_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} \right) \\ &= c \left(0 - \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^4}{4} + \frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4} - 0 \right) = c \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{64} + \frac{1}{2} - \frac{1}{64} \right) \\ &= c \frac{31}{32} = \frac{2}{3} \cdot \frac{31}{32} = \frac{31}{48} \simeq 0.64583. \end{aligned}$$

Alternativamente, anche qui, sfruttando la simmetria di f_X si possono semplificare i calcoli:

$$\begin{aligned} P\left(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}\right) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_X(x) dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f_X(x) dx \\ &= 2c \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^3) dx = c \left[x - \frac{x^4}{4} \right]_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} \\ &= 2c \left(\frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4} - 0 \right) = 2c \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{64} \right) \\ &= 2c \frac{31}{64} = \frac{2}{3} \cdot \frac{31}{32} = \frac{31}{48} \simeq 0.64583. \end{aligned}$$

**c) Calcolare $\mathbb{E}(X)$ (attenzione: è possibile trovarlo senza fare calcoli?).
soluzione di c): $\mathbb{E}(X) = 0$**

Infatti

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_{-1}^0 x f_X(x) dx + \int_0^1 x f_X(x) dx \\ &= c \left(\int_{-1}^0 x(1+x^3) dx + \int_0^1 x(1-x^3) dx \right) = c \left(\left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{5} \right]_{x=-1}^{x=0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_{x=0}^{x=1} \right) \\ &= c \left(0 - \frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^5}{5} + \frac{1^2}{2} - \left(\frac{1^5}{5} - 0 \right) \right) = c \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = 0.\end{aligned}$$

Del resto basta osservare che la densità è simmetrica rispetto allo zero per ottenere immediatamente che il valore atteso è nullo³. Infatti si tratta di integrare la funzione $g(x) = x f_X(x)$ che è una funzione dispari: $g(-x) = -x f_X(-x) = -x f_X(x) = -g(x)$

Si noti che per ottenere questo risultato, non è stato necessario utilizzare il valore di c .

³In realtà ciò vale in quanto l'integrale del valore assoluto è finito, cioè $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) dx < \infty$. Infatti in questo caso, essendo $|x| f_X(x) \leq f_X(x)$ per $|x| \leq 1$, e $|x| f_X(x) = 0$ per $|x| > 1$, si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) dx \leq \int_{-1}^{+1} |x| f_X(x) dx \leq \int_{-1}^{+1} f_X(x) dx = 1 < \infty.$$