

Corso di Laurea Triennale in Matematica  
**Calcolo delle Probabilità I** (docenti G. Nappo, F. Spizzichino)

**Prova di giovedì 17 febbraio 2005** (tempo a disposizione: 3 ore).  
**consegna compiti e inizio orale Lunedì 21 ore 9,30**

Scrivere su ogni foglio NOME e COGNOME. Le risposte devono essere giustificate sui fogli protocollo e riportate nel foglio **RISPOSTE**.

**Esercizio 1.** A e B si sfidano in una serie di 12 partite a scacchi. Supponiamo che in ogni partita vi sia una probabilità del 60% che vinca A, del 35% che vinca B e del 5% che la partita venga chiusa in pareggio; si suppone inoltre che i risultati delle diverse partite siano completamente indipendenti fra di loro.

(**Attenzione:** il quesito e) può essere svolto prima dei quesiti con l'asterisco)

**a) a-i** Qual è la probabilità che *A non vinca nella 1<sup>a</sup> partita?* **a-ii** E quella che *A perda nella 1<sup>a</sup> partita?* **a-iii** Infine, **sapendo che A non ha vinto nella 1<sup>a</sup> partita**, qual è la probabilità che *A perda nella 1<sup>a</sup> partita?*

**b) b-i** Qual è la probabilità che *A vinca tutte le 12 partite?* **b-ii** E quella che *A perda almeno una delle partite?* **b-iii** Infine qual è la probabilità che *A vinca esattamente k partite?*(specificare per quali valori di *k* tale probabilità risulta positiva)

**c)\*** Qual è la probabilità di *{A vince esattamente 7 partite e B vince esattamente 3 partite}?*

**d)\* Sapendo che A ha vinto esattamente 7 partite**, qual è la probabilità che *vi sia stata esattamente una partita terminata in pareggio?*

**e)** Supponiamo ora che, nel corso del tempo, vengano giocate 400 partite fra A e B (sempre sotto le condizioni enunciate sopra). In termini del Teorema Centrale del Limite trovare un'approssimazione per la probabilità che *il numero delle partite vinte da A sia compreso fra 220 e 260*.

**Esercizio 2.** Sia *X* una variabile aleatoria con funzione di densità di probabilità data da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 1 \\ k\sqrt{x} & \text{per } 1 < x < 4 \\ 0 & \text{per } x \geq 4 \end{cases}$$

- a) Calcolare il valore di *k*.
- b) Mostrare che  $\mathbb{E}(X) = 93/35$ .
- c) Calcolare la funzione di distribuzione di *X*.
- d) **FACOLTATIVO** Calcolare  $P(\sqrt{X} \leq 3/2)$ .

**Esercizio 3.** *X* ed *Y* sono due variabili aleatorie discrete con distribuzione di probabilità descritta nella seguente tabella

<i>Y</i> \ <i>X</i>	1	2	3	4
-1	<i>c</i>	2 <i>c</i>	2 <i>c</i>	<i>c</i>
0	0.05	0.05	0.05	0.05
1	0.1	0	0.1	0

- a) Calcolare il valore di *c*.
- b) Calcolare  $\mathbb{E}(Y)$  ed  $\mathbb{E}(XY)$ .
- c) Calcolare  $P(Y = 0|X = 3)$ .
- d) Calcolare  $P(X + Y \leq 2)$ .

**FOGLIO RISPOSTE della prova di giovedì 17 febbraio 2005**

NOME e COGNOME .....

canale NAPPO

canale SPIZZICHINO

**Esercizio 1.**

a-i)  $P(A \text{ non vinca nella } 1^{\text{a}} \text{ partita}) = \dots\dots\dots$

a-ii)  $P(A \text{ perde nella } 1^{\text{a}} \text{ partita}) = \dots\dots\dots$

a-iii) **sapendo che A non ha vinto nella 1<sup>a</sup> partita,**  
la probabilità che A perda nella 1<sup>a</sup> partita =  $\dots\dots\dots$

b-i)  $P(A \text{ vince tutte le } 12 \text{ partite}) = \dots\dots\dots$

b-ii)  $P(A \text{ perde almeno una delle partite}) = \dots\dots\dots$

b-iii)  $P(A \text{ vince esattamente } k \text{ partite}) = \dots\dots\dots$

c)\*  $P(A \text{ vince esattamente } 7 \text{ partite e } B \text{ vince esattamente } 3 \text{ partite}) = \dots\dots\dots$

d)\* **Sapendo che A ha vinto esattamente 7 partite,**  
la probabilità che vi sia stata esattamente una partita terminata in pareggio =  $\dots\dots\dots$

e) La probabilità che su 400 partite  
il numero delle partite vinte da A sia compreso fra 220 e 260  $\dots\dots\dots$

**Esercizio 2.**

a)  $k = \dots\dots\dots$

b) Mostrare che  $\mathbb{E}(X) = 93/35$  svolto.....  non svolto.....

c) La funzione di distribuzione di X vale

$$F(x) = \begin{cases} \dots\dots\dots & \text{per } \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \text{per } \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \text{per } \dots\dots\dots \end{cases}$$

d) **FACOLTATIVO**  $P(\sqrt{X} \leq 3/2) = \dots\dots\dots$

**Esercizio 3.**

a)  $c = \dots\dots\dots$

b)  $\mathbb{E}(Y) = \dots\dots\dots$  ed  $\mathbb{E}(XY) = \dots\dots\dots$

c)  $P(Y = 0 | X = 3) = \dots\dots\dots$

d)  $P(X + Y \leq 2) = \dots\dots\dots$

SOLUZIONI della prova di giovedì 17 Febbraio 2005

**Esercizio 1.** A e B si sfidano in una serie di 12 partite a scacchi. Supponiamo che in ogni partita vi sia una probabilità del 60% che vinca A, del 35% che vinca B e del 5% che la partita venga chiusa in pareggio; si suppone inoltre che i risultati delle diverse partite siano completamente indipendenti fra di loro.

(Attenzione: il quesito e) può essere svolto prima dei quesiti con l'asterisco?)

**a-i) Qual è la probabilità che A non vinca nella 1<sup>a</sup> partita?**

**soluzione di a-i):** La probabilità vale  $40/100 = 2/5$

Infatti posto  $A_1 = \{A \text{ vince nella } 1^a \text{ partita}\}$  si ha  $p_A = P(A_1) = 60/100 = 3/5$  e si cerca  $P(A_1^c) = 1 - P(A_1) = 1 - 60/100 = 40/100 = 2/5$ .

**a-ii) E quella che A perda nella 1<sup>a</sup> partita?**

**soluzione di a-ii):** La probabilità vale  $35/100 = 7/20$

Infatti posto  $B_1 = \{B \text{ vince nella } 1^a \text{ partita}\} = \{A \text{ perde nella } 1^a \text{ partita}\}$  e si ha  $p_B = P(B_1) = 35/100 = 7/20$ .

**a-iii) Infine, sapendo che A non ha vinto nella 1<sup>a</sup> partita, qual è la probabilità che A perda nella 1<sup>a</sup> partita?**

**soluzione di a-iii):** La probabilità vale  $35/40 = 7/8$

Infatti si cerca

$$P(B_1|A_1^c) = \frac{P(B_1 \cap A_1^c)}{P(A_1^c)} = \frac{P(B_1)}{P(A_1^c)} = \frac{35}{40} = \frac{7}{8}.$$

**b-i) Qual è la probabilità che A vinca tutte le 12 partite?**

**soluzione di b-i):** La probabilità vale  $(3/5)^{12}$

Infatti posto  $A_i = \{A \text{ vince nella } i\text{-sima partita}\}$  si ha che gli eventi  $A_i$  sono indipendenti, con  $P(A_i) = p_A = 60/100 = 3/5$ , e si cerca

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{12} A_i\right) = \prod_{i=1}^{12} P(A_i) = \left(\frac{3}{5}\right)^{12}.$$

**b-ii) E quella che A perda almeno una delle partite?**

**soluzione di b-ii):** La probabilità vale  $1 - (13/20)^{12}$

Infatti, posto  $B_i = \{B \text{ vince nella } i\text{-sima partita}\} = \{A \text{ perde nella } i\text{-sima partita}\}$ , gli eventi  $B_i$  sono indipendenti, con  $P(B_i) = p_B = 35/100 = 7/20$ , e si cerca

$$P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{12} B_i^c\right)^c\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{12} B_i^c\right) = 1 - \prod_{i=1}^{12} (1 - P(B_i)) = 1 - \left(1 - \frac{7}{20}\right)^{12} = 1 - \left(\frac{13}{20}\right)^{12}.$$

**b-iii) Infine qual è la probabilità che  $A$  vinca esattamente  $k$  partite? (specificare per quali valori di  $k$  tale probabilità risulta positiva)**

**soluzione di b-iii): La probabilità vale  $\binom{12}{k}(3/5)^k(2/5)^{12-k}$ , per  $k = 0, 1, \dots, 12$ , mentre vale 0 per tutti gli altri valori di  $k$**

Infatti si tratta di calcolare la probabilità che il numero di successi su  $n$  prove ripetute (cioè indipendenti e con la stessa probabilità  $p$ ) sia uguale a  $k$ . Tale probabilità è data dalla distribuzione binomiale e vale  $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ . In questo caso successo all' $i$ -esima prova significa che si verificato l'evento  $A_i$ ,  $n = 12$  e  $p = p_A = P(A_i) = 3/5$ . In altre parole posto  $X_A = S_{12} = \sum_{i=0}^{12} \mathbf{1}_{A_i}$  la variabile aleatoria  $X_A = S_{12}$  ha distribuzione  $bin(12, 3/5)$ .

**c)\* Qual è la probabilità di { $A$  vince esattamente 7 partite e  $B$  vince esattamente 3 partite}?**

**soluzione di c): La probabilità cercata vale  $12!/(7! \cdot 3! \cdot 2!) (3/5)^7 (7/20)^3 (1/20)^2$ .**

Infatti si tratta di 12 prove indipendenti a 3 esiti (vince A, vince B e pareggio) con probabilità  $p_A = 3/5 (= 12/20)$ ,  $p_B = 7/20$  e  $p_C = 1 - (p_A + p_B) = 1/20$ . Posto, come sopra,  $X_A$  il numero delle vittorie di A,  $X_B$  il numero delle vittorie di B ed  $X_C = 12 - (X_A + X_B)$  il numero dei pareggi, si cerca

$$P(X_A = 7, X_B = 3) = P(X_A = 7, X_B = 3, X_C = 2) = \frac{12!}{7! \cdot 3! \cdot 2!} p_A^7 p_B^3 p_C^2.$$

**d)\* Sapendo che  $A$  ha vinto esattamente 7 partite, qual è la probabilità che vi sia stata esattamente una partita terminata in pareggio?**

**soluzione di d): La probabilità cercata vale  $5 \left(\frac{7}{12}\right)^4 \left(\frac{1}{12}\right)^1$**

Infatti condizionatamente a sapere che  $X_A = 7$  si tratta della probabilità che sulle rimanenti 5 prove ci siano 4 vittorie di B ed un pareggio. Dalla teoria, e in accordo con l'intuizione, si ha che la distribuzione di  $X_B$  e di  $X_C$  **condizionata** all'evento  $A$  ha vinto si ottiene attraverso le probabilità binomiali, tenendo conto che, per ciascuna delle 5 partite rimaste (in cui A non ha vinto), vanno considerate la probabilità di vittoria di B, **condizionata** all'evento  $A$  non ha vinto e la probabilità di pareggio **condizionata** all'evento  $A$  non ha vinto, ossia

$$P(X_B = 4, X_C = 1 | X_A = 7) = \frac{5!}{4! \cdot 1!} \left(\frac{p_B}{1-p_A}\right)^4 \left(\frac{p_C}{1-p_A}\right)^1.$$

Allo stesso risultato si può arrivare per calcolo diretto utilizzando

$$P(X_B = 4, X_C = 1 | X_A = 7) = \frac{P(X_A = 7, X_B = 4, X_C = 1)}{P(X_A = 7)}$$

$$P(X_A = 7, X_B = 4, X_C = 1) = \frac{12!}{7! \cdot 4! \cdot 1!} p_A^7 p_B^4 p_C^1 \quad P(X_A = 7) = \frac{12!}{7! \cdot 5!} p_A^7 (1-p_A)^5.$$

**e) Supponiamo ora che, nel corso del tempo, vengano giocate 400 partite fra A e B (sempre sotto le condizioni enunciate sopra). In termini del Teorema Centrale del Limite trovare un'approssimazione per la probabilità che il numero delle partite vinte da A sia compreso fra 220 e 260.**

**soluzione di e): La probabilità cercata vale circa 0,9586.**

Infatti, per il Teorema Centrale del Limite si ha che, posto  $S_n = \sum_{i=0}^n \mathbf{1}_{A_i}$ ,  $p = P(A_i) = 3/5$ , e  $\Phi(x)$  la funzione di distribuzione di una v.a. gaussiana standard,

$$P\left(a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right) \simeq \Phi(b) - \Phi(a)$$

uniformemente in  $a$  e  $b$ , e quindi anche che

$$P(\alpha \leq S_n \leq \beta) = P\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{\beta - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \simeq \Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

In particolare per  $n = 400$ ,  $\alpha = 180$  e  $\beta = 300$  si ha

$$P(220 \leq S_{400} \leq 260) \simeq \Phi\left(\frac{260 - 400(3/5)}{\sqrt{400(3/5)(2/5)}}\right) - \Phi\left(\frac{220 - 400(3/5)}{\sqrt{400(3/5)(2/5)}}\right) = \Phi\left(\frac{260 - 240}{4\sqrt{3 \cdot 2}}\right) - \Phi\left(\frac{220 - 240}{4\sqrt{3 \cdot 2}}\right)$$

ovvero

$$P(220 \leq S_{400} \leq 260) \simeq \Phi\left(\frac{20}{4\sqrt{6}}\right) - \Phi\left(-\frac{20}{4\sqrt{6}}\right) = \Phi\left(\frac{5}{\sqrt{6}}\right) - \Phi\left(-\frac{5}{\sqrt{6}}\right).$$

Tenendo conto che  $1/\sqrt{6} \simeq 0,408$ , e quindi  $5/\sqrt{6} \simeq 2,04$ , e che

$$\Phi(x) - \Phi(-x) = \Phi(x) - (1 - \Phi(x)) = 2\Phi(x) - 1,$$

ed infine che dalle tavole della gaussiana si ha si ha  $\Phi(2,04) \simeq 0.9793$

$$P(220 \leq S_{400} \leq 260) \simeq 2\Phi(2,04) - 1 \simeq 2 \cdot 0.9793 - 1 = 0,9586.$$

**Esercizio 2.** Sia  $X$  una variabile aleatoria con funzione di densità di probabilità data da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 1 \\ k\sqrt{x} & \text{per } 1 < x < 4 \\ 0 & \text{per } x \geq 4 \end{cases}$$

a) Calcolare il valore di  $k$ .

**soluzione di a):**  $k = 3/14$

Infatti

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy = \int_1^4 k\sqrt{y} dy$$

e quindi

$$k = \left(\int_1^4 \sqrt{y} dy\right)^{-1} = \frac{3}{2} \frac{1}{4^{3/2} - 1} = \frac{3}{2} \frac{1}{2^3 - 1} = \frac{3}{2} \frac{1}{7}.$$

La seconda uguaglianza deriva dal fatto che

$$\int_a^b \sqrt{y} dy = \frac{x^{3/2}}{(3/2)} \Big|_a^b = \frac{2}{3} (b^{3/2} - a^{3/2})$$

b) Mostrare che  $\mathbb{E}(X) = 93/35$ .

**soluzione di b):**

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} y f(y) dy = \frac{3}{2 \cdot 7} \int_1^4 y \sqrt{y} dy = \frac{3}{2 \cdot 7} \frac{y^{5/2}}{(5/2)} \Big|_1^4 \\ &= \frac{3}{2 \cdot 7} \frac{4^{5/2} - 1^{5/2}}{(5/2)} = \frac{3}{5 \cdot 7} (2^5 - 1) = \frac{3 \cdot 31}{5 \cdot 7} = \frac{93}{35}. \end{aligned}$$

c) Calcolare la funzione di distribuzione di  $X$ .

**soluzione di c):** La funzione di distribuzione di  $X$  è

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy \begin{cases} 0 & \text{per } x < 1 \\ \frac{1}{7}(x^{3/2} - 1) & \text{per } 1 \leq x < 4 \\ 1 & \text{per } x \geq 4 \end{cases}$$

Infatti i casi  $x < 1$  ed  $x \geq 4$  sono ovvi. Per  $1 \leq x < 4$  si ha

$$F(x) = \int_1^x \frac{3}{2 \cdot 7} \sqrt{y} dy = \frac{3}{2 \cdot 7} \frac{y^{3/2} \Big|_1^x}{(3/2)} = \frac{1}{7} (x^{3/2} - 1).$$

**d) FACOLTATIVO** Calcolare  $P(\sqrt{X} \leq 3/2)$ .

**soluzione di d):**  $P(\sqrt{X} \leq 3/2) = 19/56$ .

Infatti

$$\begin{aligned} P(\sqrt{X} \leq 3/2) &= P(X \leq (3/2)^2) = F((3/2)^2) = \frac{[(3/2)^2]^{3/2} - 1}{7} \\ &= \frac{(3/2)^3 - 1}{7} = \frac{(27/8) - 1}{7} = \frac{27 - 8}{56} = \frac{19}{56}. \end{aligned}$$

**Esercizio 3.**  $X$  ed  $Y$  sono due variabili aleatorie discrete con distribuzione di probabilità descritta nella seguente tabella

$Y \backslash X$	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
<b>-1</b>	$c$	$2c$	$2c$	$c$
<b>0</b>	0.05	0.05	0.05	0.05
<b>1</b>	0.1	0	0.1	0

**a) Calcolare il valore di  $c$ .**

**soluzione di a):**  $c = 0.1 = 1/10$

Infatti

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{j \in \{-1, 0, 1\}} \sum_{i \in \{1, 2, 3, 4\}} P(X = i, Y = j) \\ &= c + 2c + 2c + c + 0.05 + 0.05 + 0.05 + 0.05 + 0.1 + 0 + 0.1 + 0 \\ &= 6c + 4 \cdot 0.05 + 2 \cdot 0.1 = 6c + 0.4 \end{aligned}$$

da cui immediatamente  $c = \frac{1}{6} (1 - 4/10) = \frac{1}{6} \frac{6}{10} = \frac{1}{10}$ , e quindi

$Y \backslash X$	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
<b>-1</b>	0.1	0.2	0.2	0.1
<b>0</b>	0.05	0.05	0.05	0.05
<b>1</b>	0.1	0	0.1	0

**b) Calcolare  $\mathbb{E}(Y)$  ed  $\mathbb{E}(XY)$ .**

**soluzione di b):**  $\mathbb{E}(Y) = 0.4 = 4/10$  ed  $\mathbb{E}(XY) = -1.1 = -(11/10)$

Infatti

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= (-1)(0.1 + 0.2 + 0.2 + 0.1) + 0(0.05 + 0.05 + 0.05 + 0.05) + 1(0.1 + 0 + 0.1 + 0) \\ &= -6c + 0.2 = -0.6 + 0.2 = -0.4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \sum_{j \in \{-1,0,1\}} \sum_{i \in \{1,2,3,4\}} ij P(X = i, Y = j) \\
&= (-1) \cdot 1 \cdot 0.1 + (-1) \cdot 2 \cdot 0.2 + (-1) \cdot 3 \cdot 0.2 + (-1) \cdot 4 \cdot 0.1 \\
&\quad + 0 \cdot 1 \cdot 0.05 + 0 \cdot 2 \cdot 0.05 + 0 \cdot 3 \cdot 0.05 + 0 \cdot 4 \cdot 0.05 \\
&\quad + 1 \cdot 1 \cdot 0.1 + 1 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \cdot 0.1 + 1 \cdot 4 \cdot 0 \\
&= (-1)(0.1 + 0.4 + 0.6 + 0.4) + 0 + (0.1 + 0.3) \\
&= -1.5 + 0.4 = -1.1
\end{aligned}$$

c) Calcolare  $P(Y = 0|X = 3)$ .

**soluzione di c):**  $P(Y = 0|X = 3) = 1/7$

Infatti

$$\begin{aligned}
P(Y = 0|X = 3) &= \frac{P(Y = 0, X = 3)}{P(X = 3)} = \frac{P(Y = 0, X = 3)}{P(Y = -1, X = 3) + P(Y = 0, X = 3) + P(Y = 1, X = 3)} \\
&= \frac{0.05}{0.2 + 0.05 + 0.1} = \frac{\frac{5}{100}}{\frac{35}{100}} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}.
\end{aligned}$$

d) Calcolare  $P(X + Y \leq 2)$ .

**soluzione di b):**  $P(X + Y \leq 2) = 0.7 = 7/10$

Infatti

$$P(X + Y \leq 2) = \sum_{\substack{i \in \{1,2,3,4\} \\ i+j \leq 2}} \sum_{j \in \{-1,0,1\}} P(X = i, Y = j),$$

da cui

$$\begin{aligned}
P(X + Y \leq 2) &= P(X = 1, Y = -1) + P(X = 1, Y = 0) + P(X = 1, Y = 1) \\
&\quad + P(X = 2, Y = -1) + P(X = 2, Y = 0) + P(X = 3, Y = -1) \\
&= 0.1 + 0.05 + 0.1 + 0.2 + 0.05 + 0.2 = 0.7
\end{aligned}$$