Calcolo delle Probabilità 1 2003/04 - Laurea triennale
Foglio esercizi n.7

Consegnato venerdì 28 maggio 2004.
Consegnare le risposte entro martedì 1 giugno 2004.

1. Sia Y una variabile aleatoria geometrica (a partire da 1) di parametro p, con $p \in (0,1)$. Per ogni $n \geq 1$, si consideri la variabile aleatoria $Y \wedge n\big(= \min(Y,n)\big)$.
   a) Calcolare la distribuzione di $Y \wedge n$.
   b) Calcolare il valore atteso di $Y \wedge n$, utilizzando la formula $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{n-1} P(X > i)$, valida per variabili aleatorie a valori in $\{0, 1, \dots, n\}$.
   c) Mostrare che
   $$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Y \wedge n) = \mathbb{E}(Y) \left(= \frac{1}{p}\right).$$

2. Sia X una variabile aleatoria esponenziale di parametro $\lambda(> 0)$. Si definisca la variabile aleatoria T come la parte intera inferiore di X, cioe'
   $$T = \lfloor X \rfloor, \qquad \text{ovvero tale che } T(\omega) = k \Leftrightarrow k \leq X(\omega) < k+1.$$
   a) Mostrare che T è una variabile aleatoria geometrica, a partire da zero, individuandone il parametro.
   b) Calcolare valore atteso di T e varianza di T.
   Posto invece S la parte intera superiore di X, ovvero
   $$S = \lceil X \rceil, \qquad \text{ovvero tale che } S(\omega) = k \Leftrightarrow k-1 < X(\omega) \leq k.$$
   a') Mostrare che S è una variabile aleatoria geometrica, a partire da uno, individuandone il parametro.
   b') Calcolare valore atteso di S e varianza di S.

3. Sia X_1 una variabile aleatoria che può assumere i valori 0, $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$ e con
   $$p_{X_1}(0) = P(X_1 = 0) = \frac{1}{10}, \qquad p_{X_1}(\frac{1}{2}) = P(X_1 = \frac{1}{2}) = \frac{1}{10},$$
   $$p_{X_1}(1) = P(X_1 = 1) = \frac{4}{10}, \qquad p_{X_1}(\frac{3}{2}) = P(X_1 = \frac{3}{2}) = \frac{4}{10}.$$
   Si ponga il valore atteso di X_1 uguale a μ e la sua varianza uguale a σ^2.
   Siano X_1, X_2, $X_3, ..., X_{100}$ delle variabili aleatorie con la stessa distribuzione di X_1 e (globalmente) indipendenti tra loro e si ponga $Y_{100} \equiv \frac{\sum_{j=1}^{100} X_j}{100}$. Utilizzando il Teorema Centrale del Limite, approssimare la probabilità
   $$P\left(\left\{\mu - \frac{1}{10} \leq Y_{100} \leq \mu + \frac{1}{10}\right\}\right),$$

4. Sia X una variabile aleatoria continua con densità di probabilità f_X data da
   $$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < -1, \\ c|x|^3 & \text{per } -1 < x < 1, \\ 0 & \text{per } x > 1. \end{cases}$$
   a) Trovare il valore di c.
   b) Calcolare $F_X(x)$, la funzione di distribuzione di X.
   c1) Calcolare valore atteso di X. c2) Calcolare la varianza di X.
   Se X_1, X_2, X_3,... formano una successione di variabili aleatorie tutte con la stessa distribuzione di X, e globalmente indipendenti, utilizzare il teorema centrale del limite per trovare un'espressione approssimata della funzione di distribuzione di
   $$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$
   in particolare trovare un valore approssimato di $F_{S_n}(x) = P(S_n \leq x)$ per $n = 600$ ed $x = 25$.