

CORSO DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - ESAME del 9/09/2002
I anno - Laurea Triennale in Matematica - (Prof. Nappo e Prof. Piccioni)

Scrivere su ogni foglio NOME e COGNOME, Le risposte devono essere giustificate e riportate nel foglio RISPOSTE.

ESERCIZIO 1. Sia $\alpha \in (0, 1/2)$ e siano X e Y due variabili aleatorie di Bernoulli (cioè che assumono solo i valori 0 e 1), con distribuzione congiunta

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \alpha x + (\frac{1}{2} - \alpha) & \text{se } x, y \in \{0, 1\}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- a1) Verificare che $p_{X,Y}$ individua una distribuzione congiunta.
- a2) Calcolare i parametri delle due variabili X e Y .
- b1) Calcolare $Cov(X, Y)$ e studiarne il segno in funzione di α .
- b2) Trovare la retta di regressione.
- c1) Posto $U = \min(X, Y)$ e $V = \max(X, Y)$, calcolare la distribuzione congiunta di U e di V .
- c2) Calcolare le distribuzioni marginali di U e di V .

ESERCIZIO 2. Una prima urna contiene n monete eque, mentre una seconda urna (esternamente identica alla prima urna) contiene m monete eque ed $n - m$ monete truccate ($0 < m < n$). Si denoti con p la probabilità che esca testa, per ciascuna moneta truccata.

Viene scelta un'urna a caso e da essa viene estratta una moneta, che viene lanciata.

- a1) Calcolare la probabilità dell'evento $E_1 = \{\text{al primo lancio esce testa}\}$.
- a2) Sapendo che è uscita testa nel primo lancio, calcolare la probabilità dell'evento $A = \{\text{è stata scelta la prima urna}\}$ e dell'evento $B = \{\text{è stata scelta la seconda urna}\}$.
- b1) Calcolare la probabilità dell'evento $E_2 = \{\text{al secondo lancio esce testa}\}$.
- b2) Sapendo che è uscita testa nel primo lancio della moneta estratta, calcolare la probabilità dell'evento E_2 . Gli eventi E_1 ed E_2 sono indipendenti?
- c) Sapendo che è uscita testa sia nel primo che nel secondo lancio, calcolare la probabilità dell'evento A e dell'evento B .

ESERCIZIO 3. Si sa che un pesticida elimina il 99% degli insetti di un certo tipo e il 95% delle sue uova. Supponiamo che un animale sia infestato da 100 insetti e da 200 uova e che ciascun insetto e ciascun uovo reagisca al trattamento in modo indipendente.

a) Scrivere l'espressione della probabilità che il trattamento riesca a eliminare tutti gli insetti e tutte le uova.

Si considerino le variabili aleatorie X ="numero di insetti che sopravvivono al trattamento" e Y ="numero di uova che sopravvivono al trattamento".

b1) Si trovi la distribuzione di X . **b2)** Si trovi la distribuzione di Y .

b3) Si trovi la distribuzione congiunta di X e Y .

Si considera che l'animale è stato disinfestato se alla fine del trattamento rimane al più un solo insetto oppure un solo uovo (un insetto da solo non riesce e riprodursi).

c1) Scrivere l'espressione della probabilità dell'evento $D = \{alla\ fine\ del\ trattamento\ l'animale\ sia\ stato\ disinfestato\}$.

(**Suggerimento:** scrivere l'evento in termini delle v.a. X e Y)

c2) Trovare il valore approssimato della probabilità dell'evento D .

ESERCIZIO 4. Si ricorda che al gioco del lotto ci sono 10 ruote e che per ciascuna ruota vengono estratti, senza reinserimento, 5 numeri da un'urna che contiene 90 palline numerate da 1 a 90.

a) Calcolare la probabilità α che il numero 1 esca in una estrazione del lotto sulla ruota di Roma.

b) Trovare l'espressione della probabilità β che il numero 1 esca (in almeno una ruota), in una estrazione del lotto.

c) Scrivere l'espressione della probabilità γ che, nelle prossime 100 estrazioni, il numero 1 esca, sulla ruota di Roma, almeno 12 volte.

d) Usando il teorema centrale del limite, calcolare approssimativamente la probabilità γ che, nelle prossime 100 estrazioni, il numero 1 esca, sulla ruota di Roma, almeno 12 volte. (**Suggerimento:** per semplificare i calcoli si consideri che $\sqrt{17} \simeq 4,1$)

ESAME DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ 02/07/2002
FOGLIO RISPOSTE

NOME..... COGNOME.....

ESERCIZIO 1.

a1) $P(A) =$

a2) $P(B) =$

b1) $E[T|X_1 = 1] =$

$E[T|X_1 = 0] =$

$E[T] =$

b2) $P(T = k) =$ per k

c)

ESERCIZIO 2.

a1) $E[X+Y] =$

a2) $Var(X+Y) =$

a3) Legge di $X + Y$
.....
.....
.....

b1) $E[XY] =$

b2) $Var(XY) =$

c1) Coefficiente di correlazione tra $U = X+Y$ e $V = XY =$

c2) Retta di regressione di $V = XY$ rispetto a $U = X + Y$
.....
.....

ESERCIZIO 3.

- a1) frequenza relativa dei messaggi con virus.....
- a2) frequenza relativa dei messaggi senza attachment
- b1) ($p = 0, 1$) $n = \dots\dots\dots$
- b2) (p non noto) $n = \dots\dots\dots$
- c) (FACOLTATIVO) $n \approx \dots\dots\dots$

ESERCIZIO 4.

- a1) Leggi di M_1, M_2 e M_3 .
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
- a2) $E[M_1] = \dots\dots\dots$ $E[M_2] = \dots\dots\dots$ $E[M_3] = \dots\dots\dots$
- b1) Per $n = 2, 3, 4$ $P(M_n < M_{n-1} | M_{n-1} = k) =$
.....
.....
.....
.....
 $E(\mathbb{I}_{\{M_n < M_{n-1}\}} | M_{n-1}) =$
.....
.....
.....
.....
- b2) $n = 2, 3, 4$ $P(M_n < M_{n-1}) = E(\mathbb{I}_{\{M_n < M_{n-1}\}})$.
.....
.....
.....
.....
- c) $E[N] = \dots\dots\dots$