CORSO DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - ESAME del 2/10/2002
I anno - Laurea Triennale in Matematica - (Prof. Nappo e Prof. Piccioni)

Scrivere su ogni foglio NOME e COGNOME.
Le risposte devono essere giustificate e riportate nel foglio RISPOSTE.

ESERCIZIO 1. Siano A, B, C eventi indipendenti che hanno tutti probabilità $\frac{1}{2}$ e siano

$$D = (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)\,, E = (B \cap C) \cup (B^c \cap C^c)\,, F = (A \cap C) \cup (A^c \cap C^c)\,.$$

a1) Calcolare $P(D)$.
a2) Determinare se gli eventi D, E sono indipendenti.
b1) Calcolare $P(E \cap D \cap F)$.
b2) Gli eventi D, E, F sono una famiglia di eventi mutuamente indipendenti?
c1) Determinare la probabilità dell'evento $D \cup E$.
c2) Sapendo che si è verificato l'evento $D \cup E$, determinare la probabilità di A.

ESERCIZIO 2. Siano X e Y gli esiti del lancio di due dadi indipendenti e sia $S = X + Y$ la loro somma.
a1) Determinare la legge congiunta di X e S (che tipo di distribuzione è?).
a2) Determinare la legge di X condizionata a $S = s$, $s = 2, ..., 12$.
(che tipo di distribuzioni sono?)
b) Determinare $E(X|S = s)$ e verificare che $E(X) = E(E(X|S))$.
c) Determinare la retta di regressione di X rispetto a S.

ESERCIZIO 3. Si sa che un pesticida elimina il 99% degli insetti di un certo tipo e il 95% delle sue uova. Supponiamo che un animale sia infestato da 100 insetti e da 200 uova e che ciascun insetto e ciascun uovo reagisca al trattamento in modo indipendente. Si considerino le variabili aleatorie X="*numero di insetti che sopravvivono al trattamento*" e Y="*numero di uova che sopravvivono al trattamento*".
a1) Si individuino le distribuzioni marginali di X e di Y.
a2) Si individui la distribuzione congiunta di X e Y.
b1) Scrivere l'espressione della probabilità dell'evento $A = \{$*il trattamento riesce a eliminare tutti gli insetti e tutte le uova*$\}$.
Si considera che l'animale è stato disinfestato se alla fine del trattamento rimane al più un solo insetto oppure un solo uovo (un insetto da solo non riesce e riprodursi).
b2) Scrivere l'espressione della probabilità dell'evento $D = \{$*alla fine del trattamento l'animale è stato disinfestato*$\}$.
c1) (FACOLTATIVO) Trovare il valore approssimato della probabilità dell'evento A.
c2) (FACOLTATIVO) Trovare il valore approssimato della probabilità dell'evento D.

ESERCIZIO 4. Siano $X_i, i = 1, 2, ...$ le variabili indicatrici dell'uscita di testa in lanci ripetuti indipendenti di una moneta equa. Si definiscano le variabili: $T =$" *numero di teste uscite prima di osservare la prima croce*" e $V =$"*numero dei lanci effettuati prima di osservare (per la prima volta) una croce e una testa consecutive*" (esclusi i lanci relativi alla croce e alla testa consecutive).
a1) Per $j = 0, 1, 2, ...,$ scrivere l'evento $\{T = j\}$, utilizzando le variabili X_i, e determinare la legge di T.
a2) Per $j, n = 0, 1, 2, ...$ scrivere l'evento $\{T = j\} \cap \{V = n\}$ utilizzando le variabili X_i, specificando per quali valori di j e n questo evento risulta vuoto.
b1) Determinare la legge congiunta di (T, V).
b2) Determinare la legge congiunta di $(T, V - T)$.

ESAME DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ 2/10/2002 FOGLIO RISPOSTE

NOME.. COGNOME.......................................

ESERCIZIO 1.

a1) $P(D) =$ ....
a2) Gli eventi D, E sono indipendenti? SI NO.
b1) $P(E \cap D \cap F) =$ ....
b2) Gli eventi D, E, F sono una famiglia di eventi mutuamente indipendenti? SI NO.
c1) $P(D \cup E) =$ ....
c2) Sapendo che si è verificato l'evento $D \cup E$, la probabilità di A è ....

ESERCIZIO 2.
a1) $P(X = h, S = s) =$ .... per $h =$ .... e $s =$ ....

....
....
....
....
....
....
....
....

a2) La legge di X condizionata a $S = s$, $s = 2, ..., 12$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

b) $E(X|S = s) =$ ....;

....
....
....
....
....
....
....
....

verifica di $E(X) = E(E(X|S))$ effettuata : SI NO.
c) retta di regressione di X rispetto a S:

....
....
....

ESERCIZIO 3.

a1) La distribuzione marginale di X è:

....
....
....

La distribuzione marginale di Y è:

....
....
....

a2) La distribuzione congiunta di X e Y è:

....
....
....

b1) $P(A) =$ ....

b2) $P(D) =$ ....

c1) (FACOLTATIVO) $P(A) \cong$ ....

c2) (FACOLTATIVO) $P(D) \cong$ ....

ESERCIZIO 4.

a1) $\{T = j\} =$.. $P(T = j) =$..................... per $j =$ ....

a2) $\{T = j\} \cap \{V = n\} =$.................................., per j, n tali che ....

$\{T = j\} \cap \{V = n\} = \emptyset$, per j, n tali che ....

b1) La legge congiunta di (T, V):

....
....
....

b2) La legge congiunta di $(T, V - T)$:

....
....
....

c1) $E(V) =$...............

c2) La legge marginale di V

....
....
....