

SECONDA PROVA in ITINERE del 28 maggio 2002  
CORSO DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ  
I anno - Laurea Triennale in Matematica  
(Prof. Nappo e Prof. Piccioni)

Scrivere su ogni foglio NOME e COGNOME, Le risposte devono essere giustificate e riportate nel foglio RISPOSTE.

**ESERCIZIO 1.**

Si consideri una coppia di variabili aleatorie  $(X, Y)$ , a valori in  $\{-1, 0, 1\}$  e con la seguente legge congiunta

$$P(X = i, Y = j) = \alpha \quad |i| = |j|, \quad P(X = i, Y = j) = \beta, \quad \text{altrimenti.}$$

**a1.** Si determinino i valori di  $\alpha$  e  $\beta$  ammissibili, cioè i valori per i quali tale legge è ben definita, e si verifichi che  $\alpha = \frac{1}{10}$  e  $\beta = \frac{1}{8}$  sono valori ammissibili.

**a2.** Si calcoli  $Cov(X, Y)$  per  $\alpha$  e  $\beta$  ammissibili. Le variabili  $X$  e  $Y$  sono correlate? per  $\alpha = \frac{1}{10}$  e  $\beta = \frac{1}{8}$ , le variabili aleatorie  $X$  e  $Y$  sono indipendenti?

**b1.** Si determini  $E(X|Y = i)$  per  $i = -1, 0, 1$ , per  $\alpha$  e  $\beta$  ammissibili.

**b2.** Si verifichi che  $E[YE(X|Y)] = E(YX)$ , per  $\alpha$  e  $\beta$  ammissibili.

Siano  $Z = \min(X, Y)$  e  $W = \max(X, Y)$ , e si consideri  $\alpha = \frac{1}{10}$  e  $\beta = \frac{1}{8}$ .

**c1.** Si determini la legge congiunta di  $Z$  e di  $W$ .

**c2.** Le variabili aleatorie  $Z$  e  $W$  sono indipendenti?

**ESERCIZIO 2.** Due giocatori  $A$  e  $B$  tirano una moneta equa ciascuno:  
- se ottengono due facce diverse allora vince colui che ha fatto testa,  
- se entrambi ottengono la stessa faccia, allora non vince nessuno.

I due giocatori ripetono il gioco  $n$  volte. Sia  $S = S_n$  il numero di teste ottenute dal giocatore  $A$  e sia  $Z = Z_n$  il numero di volte in cui  $A$  vince.

**NOTAZIONI** Si pongano gli eventi

$A_i =$  il giocatore  $A$  ottiene testa all' $i$ -simo lancio ,

e

$B_j =$  il giocatore  $B$  ottiene testa al  $j$ -simo lancio

. Si osservi che, ai fini del problema solo tre tipi di esiti sono interessanti, ovvero  $A_i \cap B_i$ ,  $A_i \cap B_i^c$  e  $A_i^c$ .

**a. Si individuino le leggi marginali di  $S$  e di  $Z$ , i valori attesi e le varianze.**

**b1. Si esprimano  $S$  e  $Z$  come funzioni di  $\mathbf{1}_{A_i \cap B_i}$  e di  $\mathbf{1}_{A_i \cap B_i^c}$ .**

**b2. Si determini il coefficiente di correlazione  $\rho(S, Z)$**

**b3. Si determini  $\hat{S}(Z) = a^* + b^*Z$ , cioè la migliore approssimazione di  $S$ , affine in  $Z$  (**retta di regressione**).**

**c. Si calcoli la legge di  $S$  condizionata a  $Z$ , cioè si calcoli  $P(S = k|Z = i)$ , individuando per quali valori  $i$  ha senso, e per quali valori  $k$  è diversa da zero.**

**NOTA BENE:** si può considerare il caso  $n = 2$ , invece del caso generale.

**FACOLTATIVO:** si può considerare il caso di monete non eque, ma simili, con probabilità di testa uguale a  $p$ .

SECONDA PROVA in ITINERE del 28 maggio 2002  
FOGLIO RISPOSTE

NOME.....

COGNOME.....

**ESERCIZIO 1.**

**a1.** i valori ammissibili di  $\alpha$  e  $\beta$  sono:.....

Verifica SI NO

**a2.**  $Cov(X, Y) = \dots\dots\dots$

Le variabili  $X$  e  $Y$  sono correlate: SI NO.

Le variabili aleatorie  $X$  e  $Y$  sono indipendenti: SI NO.

**b1.**  $E(X|Y = -1) = \dots\dots\dots$ ,  $E(X|Y = 0) = \dots\dots\dots$ ,  $E(X|Y = 1) = \dots\dots\dots$

**b2.**  $E[YE(X|Y)] = \dots\dots\dots$ ,  $E(YX) = \dots\dots\dots$

**c1.** Legge congiunta di  $Z$  e di  $W$ .

.....  
.....  
.....  
.....  
.....

**c2.** Le variabili aleatorie  $Z$  e  $W$  sono indipendenti: SI NO.

**ESERCIZIO 2.**

**a.** Legge di  $S$ :.....

$E(S) = \dots\dots\dots$   $Var(S) = \dots\dots\dots$

Legge di  $Z$ :.....

$E(Z) = \dots\dots\dots$   $Var(Z) = \dots\dots\dots$

**b1.**  $S = \dots\dots\dots$   $Z = \dots\dots\dots$

**b2.**  $\rho(S, Z) = \dots\dots\dots$

**b3.**  $\hat{S}(Z) = a^* + b^*Z = \dots\dots\dots$

**c.**  $P(S = k|Z = i) = \dots\dots\dots$ ,

per  $i \dots\dots\dots$  e  $k \dots\dots\dots$

**ESERCIZIO 2: SOLUZIONI.**

a. Si individuino le leggi marginali di  $S$  e di  $Z$ , i valori attesi e le varianze. Si osservi che

$$S = S_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i} \quad \text{e} \quad Z = Z_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i \cap B_i^c}.$$

Gli eventi  $A_i$  sono indipendenti e  $P(A_i) = p = \frac{1}{2}$ . Analogamente gli eventi  $A_i \cap B_i^c$  sono indipendenti e con  $P(A_i \cap B_i^c) = p(1-p) = \frac{1}{4}$ . Quindi la legge di  $S$  è  $Bin(n, p) = Bin(n, \frac{1}{2})$ , con  $E(S) = np = \frac{n}{2}$  e  $Var(S) = np(1-p) = \frac{n}{4}$ . Analogamente la legge di  $Z$  è  $Bin(n, p(1-p)) = Bin(n, \frac{1}{4})$ , con  $E(Z) = np(1-p) = \frac{n}{4}$  e  $Var(Z) = np(1-p)(1-p(1-p)) = n \frac{1}{4} \frac{3}{4} = n \frac{3}{16}$ .

b1. Si esprimano  $S$  e  $Z$  come funzioni di  $\mathbf{1}_{A_i \cap B_i}$  e di  $\mathbf{1}_{A_i \cap B_i^c}$ .

$$S = S_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i \cap B_i} + \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i \cap B_i^c} \quad \text{e} \quad Z = Z_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i \cap B_i^c}.$$

b2. Si determini il coefficiente di correlazione  $\rho(S, Z)$  e  $\hat{S}(Z) = a^* + b^*Z$ , cioè la migliore approssimazione di  $S$ , affine in  $Z$  (retta di regressione). Il coefficiente di correlazione

$$\rho(S, Z) = \frac{Cov(S, Z)}{\sqrt{Var(S)}\sqrt{Var(Z)}}$$

Posto  $N = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i \cap B_i}$  si ha che  $Cov(S, Z) = Cov(N+Z, Z) = Cov(N, Z) + Cov(Z, Z) = Cov(N, Z) + Var(Z)$ . Ora

$$Cov(N, Z) = \sum_{i=1}^n Cov(\mathbf{1}_{A_i \cap B_i}, \mathbf{1}_{A_i \cap B_i^c}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n Cov(\mathbf{1}_{A_i \cap B_i}, \mathbf{1}_{A_j \cap B_j^c})$$

$$= n[P(\emptyset) - P(A_1 \cap B_1)P(A_1 \cap B_1^c)] = -np^2p(1-p) = -np^3(1-p) = -n \frac{1}{16},$$

in quanto le v.a.  $\mathbf{1}_{A_i \cap B_i}$  e  $\mathbf{1}_{A_j \cap B_j^c}$  sono indipendenti per  $i \neq j$  (e quindi non correlate). Riassumendo

$$\begin{aligned} \rho(S, Z) &= \frac{Cov(S, Z)}{\sqrt{Var(S)}\sqrt{Var(Z)}} = \frac{-np^3(1-p) + np(1-p)(1-p(1-p))}{\sqrt{np(1-p)}\sqrt{np(1-p)(1-p(1-p))}} = \\ &= \frac{np(1-p)(-p^2 + 1 - p(1-p))}{np(1-p)\sqrt{1-p(1-p)}} = \frac{1-p}{\sqrt{1-p(1-p)}} \end{aligned}$$

e quindi

$$\rho(S, Z) = \frac{\text{Cov}(N, Z) + \text{Var}(Z)}{\sqrt{\text{Var}(S)}\sqrt{\text{Var}(Z)}} = \frac{-n\frac{1}{16} + n\frac{3}{16}}{n\sqrt{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{3}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Quindi  $a^* = E(S) - \frac{\text{Cov}(S, Z)}{\text{Var}(Z)}E(Z)$  e  $b^* = \frac{\text{Cov}(S, Z)}{\text{Var}(Z)}$

**c. Si calcoli la legge di  $S$  condizionata a  $Z$ , cioè si calcoli  $P(S = k|Z = i)$ , individuando per quali valori  $i$  ha senso, e per quali valori  $k$  è diversa da zero.** La probabilità  $P(S = k|Z = i)$  ha senso solo se  $P(Z = i) > 0$ , e quindi per  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ , ed è diversa da zero solo per  $i \leq k \leq n$ , e si ha:

$$\begin{aligned} P(S = k|Z = i) &= \frac{P(N + Z = k, Z = i)}{P(Z = i)} = \frac{P(N + i = k, Z = i)}{P(Z = i)} \\ &= \frac{P(N = k - i, Z = i)}{P(Z = i)} = \frac{P(N = k - i, Z = i, W = n - k)}{P(Z = i)}, \end{aligned}$$

dove  $W = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i^c}$ . Si tratta di  $n$  prove indipendenti a tre esiti, ed  $N, Z, W$  hanno quindi distribuzione congiunta multinomiale, con probabilità  $p^2 = \frac{1}{4}$ ,  $p(1-p) = \frac{1}{4}$  e  $1-p = \frac{1}{2}$ , rispettivamente.

$$P(S = k|Z = i) = \frac{\frac{n!}{(k-i)!i!(n-k)!} (p^2)^{k-i} (p(1-p))^i (1-p)^{n-k}}{\frac{n!}{i!(n-i)!} (p(1-p))^i (1-p(1-p))^{n-i}}$$

$$\begin{aligned} P(S = k|Z = i) &= \frac{(n-i)!}{(k-i)!(n-k)!} \left( \frac{p^2}{1-p(1-p)} \right)^{k-i} \left( \frac{1-p}{1-p(1-p)} \right)^{n-k} \\ &= \frac{(n-i)!}{(k-i)!(n-k)!} \left( \frac{1}{3} \right)^{k-i} \left( \frac{2}{3} \right)^{n-k} \end{aligned}$$

per  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $i \leq k \leq n$ .

**Alternativamente**, per ottenere lo stesso risultato, si poteva ragionare nel seguente modo: sapendo che  $i$  prove sono risultate di tipo  $A_j \cap B_j^c$ , (cioè Testa per A e Croce per B), la probabilità che  $k$  siano di tipo  $A_j$  equivale a richiedere che tra le  $n - i$  prove rimaste  $k - i$  siano di tipo  $A_j \cap B_j$  (cioè Testa per A e Testa per B) e le rimanenti  $n - i - (k - i) = n - k$  siano di tipo  $A_j^c$  (cioè Croce per A). Poiché sappiamo che tra queste  $n - i$  non si è mai verificato un evento di tipo  $A_j \cap B_j^c$ , le probabilità da adoperare sono appunto

$$P(A_j \cap B_j | (A_j \cap B_j^c)^c) = \frac{p^2}{1-p(1-p)} \quad \text{e} \quad P(A_j^c | (A_j \cap B_j^c)^c) = \frac{1-p}{1-p(1-p)}$$