

Laurea triennale in MATEMATICA, Corso di **PROBABILITÀ 1**  
ESONERO DEL 10.06.2011, Canale I-Z (G. Nappo)

NOME e COGNOME (scrivere in stampatello) \_\_\_\_\_

**N.B.** Scrivere le soluzioni degli esercizi esclusivamente su questi fogli giustificando brevemente i passaggi svolti.

**Esercizio 1.** Un dado equo viene lanciato finché non esce 5 o 6. Sia  $T$  il numero totale di lanci effettuati e  $X$  il risultato del dado nell'ultimo lancio effettuato.

- i)* Calcolare  $\mathbb{P}(T = 3, X = 5)$ .
- ii)* Calcolare la distribuzione di  $T$ .
- iii)* Calcolare la distribuzione di  $X$ .
- iv)* Calcolare la distribuzione congiunta di  $T$  e  $X$  e dire se sono variabili aleatorie indipendenti.

Laurea triennale in MATEMATICA, Corso di **PROBABILITÀ 1**  
ESONERO DEL 10.06.2011, Canale I-Z (G. Nappo)

NOME e COGNOME (scrivere in stampatello) \_\_\_\_\_

**N.B.** Scrivere le soluzioni degli esercizi esclusivamente su questi fogli giustificando brevemente i passaggi svolti.

**Esercizio 2.** Una moneta truccata con probabilità di testa data da  $p \in (0, 1)$  viene lanciata  $n$  volte,  $n \geq 2$ . Sia  $Y_n$  il numero delle coppie di teste consecutive, ad esempio se  $n = 10$  e i risultati sono *CTTTCCTTCT* allora  $Y_n$  vale 3.

*i)* Trovare la distribuzione di  $Y_3$  e calcolare il suo valore il suo valore atteso.

Per  $i = 1, \dots, n - 1$ , si definiscano gli eventi  $A_i = \{\text{esce testa sia all}'i\text{-mo che all}'i + 1\text{-mo lancio}\}$ .

*ii)* Calcolare  $\mathbb{P}(A_i)$ ,  $\mathbb{P}(A_i \cap A_{i+1})$  e  $\mathbb{P}(A_i \cap A_{i+2})$ .

*iii)* Calcolare il valore atteso di  $Y_n$ ,  $n \geq 2$ .

*iv)* Calcolare la varianza di  $Y_n$ ,  $n \geq 2$ .

*v)* Utilizzando la disuguaglianza di Chebyshev, trovare una limitazione inferiore per  $\mathbb{P}\left(|Y_n - \mathbb{E}(Y_n)| < \frac{n}{10}\right)$  e (**facoltativo**), nel caso  $p = 1/2$ , determinare un valore di  $n$  per cui

$$\mathbb{P}\left(|Y_n - \mathbb{E}(Y_n)| < \frac{n}{10}\right) > \frac{9}{10}.$$

NOME e COGNOME (scrivere in stampatello) \_\_\_\_\_

**N.B.** Scrivere le soluzioni degli esercizi esclusivamente su questi fogli giustificando brevemente i passaggi svolti.

**Esercizio 3.** Sia

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 1 \\ ax & \text{per } 1 < x < 2 \\ 2a + b & \text{per } 2 < x < 3 \\ 0 & \text{per } x > 3 \end{cases}$$

- i)* Mostrare che  $a = 1/3$  e  $b = -1/6$  sono gli unici valori per i quali  $f(x)$  è una densità di probabilità e contemporaneamente  $\mathbb{P}(X < 2) = \mathbb{P}(X > 2)$ , dove  $X$  è una variabile aleatoria con densità  $f(x)$ .
- ii)* Calcolare la funzione di distribuzione  $F_X(x)$  della variabile aleatoria  $X$  con densità  $f(x)$ .

Sia ora  $X_n$  una successione di variabili aleatorie indipendenti e tutte con la stessa distribuzione di  $X$ . Siano  $A_n$  gli eventi definiti da  $A_n = \{X_n > 2\}$ : gli eventi  $A_n$ ,  $n \geq 1$ , formano uno schema di Bernoulli infinito di parametro  $p$ .

- iii)* (i) Quanto vale  $p$ ?  
(ii) (**Facoltativo**) Giustificare il motivo per cui gli eventi  $A_n$ ,  $n \geq 1$ , sono globalmente indipendenti.

Sia ora  $S_n$  il numero degli indici  $i \leq n$  per i quali  $X_i > 2$ .

- iv)* Scrivere la formula esatta per  $\mathbb{P}(S_{100} \leq 45)$ .  
*v)* Calcolare approssimativamente  $\mathbb{P}(S_{100} \leq 45)$ .