

# 1 Il processo di Poisson come limite della passeggiata aleatoria riscalata

## 1.1 Passeggiata aleatoria riscalata

L'idea è la seguente: si consideri una successione di eventi  $A_k^{(n)}$  che rappresentano gli esiti di prove indipendenti, di probabilità  $\mathbb{P}(A_k^{(n)}) = p^{(n)} = \frac{\lambda}{n}$ . Si denoti, come è usuale,

$$S_m^{(n)} = \sum_{k=1}^m \mathbf{1}_{A_k^{(n)}}$$

la passeggiata aleatoria corrispondente, ovvero la variabile aleatoria che conta il numero di successi nelle prime  $n$  prove.

Si supponga che ogni prova venga effettuata ad intervalli di ampiezza  $\frac{1}{n}$ . In questo modo per ogni  $t \in [0, \infty)$ , il numero di prove effettuate nell'intervallo  $[0, t]$  è la parte intera inferiore<sup>1</sup> di  $nt$ , cioè  $\lfloor nt \rfloor$ . Di conseguenza il numero di successi nell'intervallo  $[0, t]$  è la variabile aleatoria  $S_h^{(n)}$ , con  $h = \lfloor nt \rfloor$ , o meglio

$$N^{(n)}(t) = S_{\lfloor nt \rfloor}^{(n)}.$$

## 1.2 Legge limite

Come primo problema ci interessa trovare la legge di  $N^{(n)}(t) = S_{\lfloor nt \rfloor}^{(n)}$  e quale è il suo limite.

È chiaro che  $N^{(n)}(t) = S_{\lfloor nt \rfloor}^{(n)}$  segue una legge binomiale  $Bin(\lfloor nt \rfloor, p^{(n)})$ , per  $t > 0$  ed è  $N^{(n)}(0) = 0$  per  $t = 0$ .

Tenendo presente che

$$p^{(n)} = \frac{\lambda}{n} = \frac{\lambda t \lfloor nt \rfloor}{nt \lfloor nt \rfloor} = \frac{\lambda t \lfloor nt \rfloor}{\lfloor nt \rfloor nt}, \quad \text{per } t > 0$$

e che  $\frac{\lfloor nt \rfloor}{nt}$  converge ad 1 per  $n$  che tende ad infinito<sup>2</sup>, si intuisce che la legge limite deve essere una legge di Poisson di parametro  $\lambda t$ .

Per dimostrarlo formalmente si consideri la funzione caratteristica di  $N^{(n)}(t) = S_{\lfloor nt \rfloor}^{(n)}$

$$\varphi_N^{(n)}(t)(u) = \mathbb{E}[e^{iuN^{(n)}(t)}] = \left( p^{(n)} e^{iu} + (1 - p^{(n)}) \right)^{\lfloor nt \rfloor} = \left( \frac{\lambda}{n} e^{iu} + \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \right)^{n \frac{\lfloor nt \rfloor}{n}},$$

da cui, poiché  $\frac{\lfloor nt \rfloor}{n}$  converge a  $t$  per  $n \rightarrow \infty$ , si vede facilmente che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_N^{(n)}(t)(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{\lambda(e^{iu} - 1)}{n} \right)^n \right]^{\frac{\lfloor nt \rfloor}{n}} = \exp\{\lambda t(e^{iu} - 1)\}.$$

La dimostrazione<sup>3</sup> è quindi ottenuta, ricordando che una variabile aleatoria  $N$  di Poisson, con parametro  $\mu$  ammette come funzione caratteristica

$$\varphi_N(u) = \mathbb{E}[e^{iuN}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{iuk} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{iu}\mu)^k}{k!} e^{-\mu} = \exp\{\mu(e^{iu} - 1)\}.$$

<sup>1</sup>Si ricordi che, per ogni numero reale  $a$ ,  $\lfloor a \rfloor = h$  se e solo se  $h \leq a < h + 1$

<sup>2</sup>Più in generale infatti  $\frac{\lfloor a \rfloor}{a}$  converge ad 1 per  $a$  che tende ad infinito:  $|\frac{\lfloor a \rfloor}{a} - 1| = |\frac{\lfloor a \rfloor - a}{a}| \leq \frac{1}{a} \rightarrow 0$

<sup>3</sup>La precedente dimostrazione, con piccole modifiche, si ripete per dimostrare con le funzioni caratteristiche il Teorema di approssimazione di Poisson, cioè che la legge  $Bin(n, \frac{\mu}{n})$  converge ad una legge di Poisson di parametro  $\mu$ .

### 1.3 Indipendenza degli incrementi

Si osservi che, per ogni  $n$ , se si considera un intervallo  $(t_1, t_2]$ , il numero di successi nell'intervallo  $(t_1, t_2]$  coincide con  $N^{(n)}(t_2) - N^{(n)}(t_1)$ .

La variabile aleatoria  $N^{(n)}(t_2) - N^{(n)}(t_1)$  si chiama anche incremento di  $N^{(n)}(t)$  nell'intervallo  $(t_1, t_2]$ .

La sua distribuzione è binomiale di parametri  $\lfloor nt_2 \rfloor - \lfloor nt_1 \rfloor$  e in modo analogo si dimostra che  $N^{(n)}(t_2) - N^{(n)}(t_1)$  converge in legge ad una variabile di Poisson di parametro  $\lambda(t_2 - t_1)$ .

Si osservi anche che se si considerano due intervalli disgiunti  $(0, t_1]$  e  $(t_1, t_2]$ , allora il numero di successi nell'intervallo  $(0, t_1]$ , cioè  $N^{(n)}(t_1)$ , ed il numero di successi nell'intervallo  $(t_1, t_2]$ , cioè  $N^{(n)}(t_2) - N^{(n)}(t_1)$ , sono variabili aleatorie indipendenti, in quanto dipendono da eventi indipendenti<sup>4</sup>.

La precedente proprietà si generalizza al caso di più intervalli ovvero, per intervalli disgiunti  $(0, t_1]$ ,  $(t_1, t_2]$ ,  $\dots$ ,  $(t_{m-1}, t_m]$ , gli incrementi negli intervalli  $(t_{i-1}, t_i]$ , cioè le variabili aleatorie  $M_i = N^{(n)}(t_i) - N^{(n)}(t_{i-1})$ , per  $i = 1, \dots, m$ , sono variabili aleatorie indipendenti.

### 1.4 Tempo di primo successo e sua legge limite

Si consideri ora la variabile aleatoria  $T^{(n)} = \frac{X^{(n)}}{n}$  dove  $X^{(n)}$  è il tempo di primo successo nelle prove di Bernoulli  $A_k^{(n)}$ , per  $k \geq 1$ , e quindi è una variabile aleatoria geometrica di parametro  $\frac{\lambda}{n}$ .

Si dimostra facilmente che  $T^{(n)}$  converge in legge (cioè in distribuzione) ad una variabile aleatoria esponenziale di parametro  $\lambda$ .

Infatti, se  $X$  è una variabile aleatoria geometrica di parametro  $p$ , allora la sua funzione caratteristica è

$$\begin{aligned} \varphi_X(u) &= \mathbb{E}[e^{iuX}] = \sum_{k=1}^{\infty} e^{iuk} (1-p)^{k-1} p \\ &= e^{iu} p \sum_{k=1}^{\infty} e^{iu(k-1)} (1-p)^{k-1} = e^{iu} p \sum_{k=1}^{\infty} [e^{iu} (1-p)]^{k-1} \\ &= e^{iu} \frac{p}{1 - e^{iu}(1-p)}. \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} \varphi_{T^{(n)}}(u) &= \mathbb{E}[e^{iuT^{(n)}}] = \mathbb{E}[e^{iu \frac{X^{(n)}}{n}}] = \mathbb{E}[e^{i \frac{u}{n} X^{(n)}}] = \varphi_X\left(\frac{u}{n}\right) \\ &= e^{i \frac{u}{n}} \frac{\lambda}{n \left(1 - e^{i \frac{u}{n}} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)\right)}. \end{aligned}$$

Poiché  $e^{i \frac{u}{n}}$  converge ad 1 per  $n \rightarrow \infty$ , e più precisamente  $e^{i \frac{u}{n}} = 1 + i \frac{u}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , si ottiene

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{T^{(n)}}(u) &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{i \frac{u}{n}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{n \left(1 - e^{i \frac{u}{n}} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)\right)} \\ &= 1 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{n \left(1 - \left(1 + i \frac{u}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{\left(-iu - nO\left(\frac{1}{n^2}\right) + \lambda + iu \frac{\lambda}{n} + \lambda O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - iu}. \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Vale infatti:  $N^{(n)}(t_1)$  dipende dagli eventi  $A_k^{(n)}$ , per  $k \leq \lfloor nt_1 \rfloor$ , mentre  $N^{(n)}(t_2) - N^{(n)}(t_1)$  dipende dagli eventi  $A_k^{(n)}$ , per  $\lfloor nt_1 \rfloor < k \leq \lfloor nt_2 \rfloor$

La convergenza è quindi provata tenendo conto che per una variabile aleatoria  $Z \sim \text{EXP}(\lambda)$

$$\varphi_Z(u) = \mathbb{E}[e^{iuZ}] = \frac{\lambda}{\lambda - iu}.$$

Ciò e deriva da un fatto più generale: la legge  $\text{EXP}(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$  e per una  $Z \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$  si ha

$$\varphi_Z(u) = \left( \frac{\lambda}{\lambda - iu} \right)^\alpha.$$

Infatti

$$\begin{aligned} \varphi_Z(u) &= \mathbb{E}[e^{iuZ}] = \int_0^\infty e^{iux} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda - iu)^\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty (\lambda - iu)^\alpha x^{\alpha-1} e^{-(\lambda - iu)x} dx \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda - iu)^\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty (\lambda x - iux)^{\alpha-1} e^{-(\lambda - iu)x} d(\lambda - iu)x \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda - iu)^\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{r(t,\lambda)} z^{\alpha-1} e^{-z} dz \end{aligned}$$

(l'integrale è esteso alla semiretta  $r(t, \lambda) = \{z = \lambda x - iux, \text{ per } x > 0\}$   
e vale  $\Gamma(\alpha)$ , come si può ottenere dal Teorema dei residui)

$$= \left( \frac{\lambda}{\lambda - iu} \right)^\alpha.$$

La convergenza in legge di  $T^{(n)} = \frac{X^{(n)}}{n}$  ad una variabile esponenziale  $Z \sim \text{EXP}(\lambda)$  si può dimostrare anche direttamente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{T^{(n)}}(x) = F_Z(x),$$

in questo caso la convergenza deve valere per ogni  $x$  in quanto  $F_Z(x)$  è una funzione continua:

$$\begin{cases} F_Z(x) = 0 & \text{per } x < 0, \\ F_Z(x) = 1 - e^{-\lambda x} & \text{per } x \geq 0. \end{cases}$$

Per  $x < 0$  si ha  $F_{T^{(n)}}(x) = F_Z(x) = 0$ , e lo stesso vale per  $x = 0$ , mentre per  $x > 0$  è equivalente dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - F_{T^{(n)}}(x) = 1 - F_Z(x) = e^{-\lambda x}.$$

Si osservi che, per  $x > 0$

$$\begin{aligned} 1 - F_{T^{(n)}}(x) &= \mathbb{P}(T^{(n)} > x) = \mathbb{P}\left(\frac{X^{(n)}}{n} > x\right) = \mathbb{P}(X^{(n)} > nx) = \mathbb{P}(X^{(n)} > \lfloor nx \rfloor) \\ &= (1 - p(n))^{\lfloor nx \rfloor} = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{\lfloor nx \rfloor} = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}} = e^{-\lambda x}. \end{aligned}$$