

SSIS-INDIRIZZO MATEMATICA E MATEMATICA APPLICATA (primo anno)

MATEMATICA APPLICATA B: CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

Per le domande a risposta aperta il punteggio varia da 0 a 3, mentre per le domande a risposta multipla il punteggio è: risposta esatta +3; mancata risposta 0; risposta sbagliata -1.

ESERCIZIO A

Al gioco del lotto scommettete puntando sull'ambo $\{1, 2\}$ sulla ruota di Roma e sul terno $\{11, 12, 13\}$ sulla ruota di Napoli. Sia $q = \mathbb{P}\{\text{vincere entrambe le scommesse}\}$ e sia $p = \mathbb{P}\{\text{vincere almeno una delle due scommesse}\}$, allora:

DOMANDA 1: mettere una croce sulla affermazione esatta

1. $q = \left((5 \cdot 4 \cdot 3) / (90 \cdot 89 \cdot 88) \right) \left((5 \cdot 4) / (90 \cdot 89) \right)$
2. $q = \binom{5}{5} \binom{85}{0} / \binom{90}{5}$
3. $q = \binom{3}{3} \binom{87}{2} / \binom{90}{5} + \binom{2}{2} \binom{87}{3} / \binom{90}{5} - \left[\binom{3}{3} \binom{87}{2} / \binom{90}{5} \right] \left[\binom{2}{2} \binom{87}{3} / \binom{90}{5} \right]$
4. $q = (5 \cdot 4 \cdot 3) / (90 \cdot 89 \cdot 88) + (5 \cdot 4) / (90 \cdot 89)$

COMMENTO:

L'evento $A = \text{"ottenere l'ambo } \{1, 2\} \text{ sulla ruota di Roma"}$ e l'evento $B = \text{"ottenere il terno } \{11, 12, 13\} \text{ sulla ruota di Napoli"}$ sono **indipendenti** e quindi la probabilità di ottenere sia l'ambo $\{1, 2\}$ sulla ruota di Roma che il terno $\{11, 12, 13\}$ sulla ruota di Napoli è $\boxed{Pr(A \cap B) = Pr(A)Pr(B)}$.

DOMANDA 2: mettere una croce sulla affermazione esatta

1. $p = (5 \cdot 4 \cdot 3) / (90 \cdot 89 \cdot 88) + (5 \cdot 4) / (90 \cdot 89)$
2. $p = (5 \cdot 4 \cdot 3) / (90 \cdot 89 \cdot 88) + (5 \cdot 4) / (90 \cdot 89) - \left((5 \cdot 4 \cdot 3) / (90 \cdot 89 \cdot 88) \right) \left((5 \cdot 4) / (90 \cdot 89) \right)$
3. $p = \binom{3}{3} \binom{87}{2} / \binom{90}{5} + \binom{2}{2} \binom{87}{3} / \binom{90}{5} - \binom{5}{5} \binom{85}{0} / \binom{90}{5}$
4. $p = 1 - \left(1 - \binom{3}{3} \binom{87}{2} / \binom{90}{5} \right) \left(1 - \binom{2}{2} \binom{87}{3} / \binom{90}{5} \right)$

COMMENTO:

Posti A e B come sopra, la probabilità di "ottenere l'ambo $\{1, 2\}$ sulla ruota di Roma o di ottenere il terno $\{11, 12, 13\}$ sulla ruota di Napoli" si può calcolare con $\boxed{Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B) - Pr(A \cap B)}$, tenendo presente che in questo caso $Pr(A \cap B) = Pr(A)Pr(B)$ (come in domanda 1).

Si può anche procedere considerando che $\boxed{Pr(A \cup B) = 1 - Pr(A^c \cap B^c)}$ e quindi in questo caso $\boxed{= 1 - Pr(A^c)Pr(B^c) = 1 - (1 - Pr(A))(1 - Pr(B))}$. Attenzione la risposta 4 non è esatta: lo sarebbe se al posto di $\binom{2}{2}$ ci fosse $\binom{3}{2}$

ESERCIZIO B

Si danno 5 carte da un mazzo ben mescolato di 52 carte (13 cuori, 13 quadri, 13 fiori, 13 picche). La probabilità p di doppia coppia servita, cioè di avere due coppie (ma non poker) è:

1. $p = \binom{13}{2} \binom{4}{2} \binom{4}{2} \binom{44}{1} / \binom{52}{5}$
2. $p = 13 \cdot 12 \binom{4}{2} \binom{4}{2} \binom{44}{1} / \binom{52}{5}$
3. $p = \binom{4}{2} \binom{4}{2} \binom{44}{1} / \binom{52}{5}$
4. $p = 2 \cdot 13 \binom{4}{2} \binom{48}{3} / \binom{52}{5} - 13 \cdot 12 \binom{4}{2} \binom{4}{2} \binom{44}{1} / \binom{52}{5}$

COMMENTO:

La probabilità di una coppia di Assi e di una coppia di Re è $\binom{4}{2} \binom{4}{2} \binom{44}{1} / \binom{52}{5}$ in quanto corrisponde all'estrazione SENZA REINSERIMENTO di 5 palline tra 52 di cui 4 bianche (i 4 Assi), 4 rosse (i 4 Re) e 44 verdi (le rimanenti), e lo stesso vale per ogni altro tipo di doppia coppia.

I tipi di doppia coppia sono in totale $\binom{13}{2}$ in quanto si tratta di scegliere 2 numeri distinti di carte tra i 13 possibili per le carte delle due doppie coppie e l'ordine non ha importanza.

ESERCIZIO C

Una prima urna contiene 6 palline rosse e 2 bianche. Una seconda urna contiene 5 palline rosse e 3 bianche. Si lancia un dado e si sceglie l'urna 1 se escono 5 o 6 e la seconda altrimenti.

Successivamente, dall'urna scelta (SEMPRE LA STESSA) vengono estratte le palline ad una ad una SENZA REINSERIMENTO.

Siano $\begin{cases} U \text{ l'evento } \{\text{viene scelta l'urna 1}\} \\ V \text{ l'evento } \{\text{viene scelta l'urna 2}\}. \end{cases}$

Siano $\begin{cases} R_n \text{ gli eventi } \{\text{all'estrazione } n\text{-sima viene estratta una pallina rossa}\} \\ B_n \text{ gli eventi } \{\text{all'estrazione } n\text{-sima viene estratta una pallina bianca}\}. \end{cases}$

Sia X_m il numero di palline rosse estratte nelle prime m estrazioni.

Sia T il numero di estrazioni necessarie per ottenere per la prima volta una pallina rossa.

DOMANDA 1: mettere una croce sulla affermazione esatta

1. $Pr(B_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{3}$ $Pr(B_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{7} = \frac{5}{21}$
2. $Pr(B_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{3}$ $Pr(B_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{3}$
3. $Pr(B_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{3}$ $Pr(B_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{12}$
4. $Pr(B_1) = \frac{2}{8}$ $Pr(B_2) = \frac{2}{8}$

COMMENTO:

$Pr(B_1) = Pr(U)Pr(B_1|U) + Pr(V)Pr(B_1|V) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{3}$, inoltre $Pr(B_1) = Pr(B_2)$

in quanto $\begin{cases} Pr(B_2) = Pr(U)Pr(B_2|U) + Pr(V)Pr(B_2|V) \\ Pr(B_2|U) = Pr(B_1|U) \text{ e } Pr(B_2|V) = Pr(B_1|V) \end{cases}$

DOMANDA 2 : mettere una croce sulla colonna relativa alle risposte giuste (v=VERO f=FALSO)

a)	gli eventi $\{X_2 = 0\}$ e $\{T = 1\}$ sono indipendenti	v	v	f	f
b)	gli eventi $\{X_2=0\}$ e $\{T=1\}$ sono incompatibili	v	f	v	f
		1. <input type="checkbox"/>	2. <input type="checkbox"/>	3. <input type="checkbox"/>	4. <input checked="" type="checkbox"/>

COMMENTO:

Gli eventi $\{X_2 = 0\} = B_1 \cap B_2$ e $\{T = 1\} = R_1$ sono disgiunti (ovvero incompatibili) e hanno probabilità positiva: quindi non possono essere indipendenti, in quanto in generale se $Pr(A) > 0$, $Pr(B) > 0$ e $A \cap B = \emptyset$ allora $0 = Pr(A \cap B) \neq Pr(A)Pr(B) > 0$.

DOMANDA 3: Sapendo che la prima pallina estratta è rossa, la probabilità che sia stata scelta l'urna 1 è:

1. $\frac{3}{8}$ 2. $\frac{2}{8}$ 3. $\frac{1}{3}$ 4. $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{8}$

COMMENTO:

La soluzione è immediata con la formula di Bayes:

$$Pr(U|R_1) = \frac{Pr(U)Pr(R_1|U)}{Pr(U)Pr(R_1|U) + Pr(V)Pr(R_1|V)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{8}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{8} + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8}} = \frac{1 \cdot 6}{1 \cdot 6 + 2 \cdot 5} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

DOMANDA 4: Calcolare, **sapendo che** $X_2 = 0$, la probabilità che sia stata scelta l'urna 1. (indicare i passaggi effettuati, semplificare i calcoli effettuati)

COMMENTO:

Si osservi che $\{X_2 = 0\} = B_1 \cap B_2$, quindi

$$Pr(U|X_2 = 0) = Pr(U|B_1 \cap B_2) = \frac{Pr(U)Pr(B_1 \cap B_2|U)}{Pr(U)Pr(B_1 \cap B_2|U) + Pr(V)Pr(B_1 \cap B_2|V)}$$

Condizionatamente all'evento U si ha $Pr(B_1 \cap B_2|U) = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7}$: essendo nota la composizione dell'urna (2 palline bianche e 6 rosse), si tratta della probabilità di ottenere due palline bianche da estrazioni SENZA REINSERIMENTO.

Analogamente se si condiziona all'evento V si ha $Pr(B_1 \cap B_2|V) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7}$: essendo la composizione dell'urna nota (3 palline bianche e 5 rosse) e le estrazioni SENZA REINSERIMENTO.

Quindi

$$Pr(U|X_2 = 0) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7}} = \frac{2}{2 + 2 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{1 + 3 \cdot 2} = \frac{1}{7}$$

ESERCIZIO D

Una prima urna contiene 6 palline rosse e 2 bianche. Una seconda urna contiene 5 palline rosse e 3 bianche. Si lancia un dado e si sceglie l'urna 1 se escono 5 o 6 e la seconda altrimenti.

Successivamente, si estrae una pallina dall'urna scelta, se ne osserva il colore e poi VIENE REINSERITA nell'urna.

Si ripete l'operazione una seconda volta, cioè si lancia di nuovo il dado e si sceglie un'urna etc., poi l'operazione viene ripetuta una terza volta e così via.

Siano $\left\{ \begin{array}{l} U_n \text{ gli eventi } \{ \text{viene scelta l'urna 1 per l'estrazione } n\text{-sima} \} \\ V_n \text{ gli eventi } \{ \text{viene scelta l'urna 2 per l'estrazione } n\text{-sima} \}. \end{array} \right.$

Siano $\left\{ \begin{array}{l} R_n \text{ gli eventi } \{ \text{all'estrazione } n\text{-sima viene estratta una pallina rossa} \} \\ B_n \text{ gli eventi } \{ \text{all'estrazione } n\text{-sima viene estratta una pallina bianca} \}. \end{array} \right.$

Sia X_m il numero di palline rosse estratte nelle prime m estrazioni.

Sia T il numero di estrazioni necessarie per ottenere per la prima volta una pallina rossa.

DOMANDA 1: mettere una croce sulla colonna relativa alle risposte giuste (v=VERO f=FALSO)

a)	$Pr(R_1 \cap R_2 U_1) = Pr(R_1 U_1)Pr(R_2 U_1)$	v	v	f	f
b)	$Pr(R_1 \cap R_2) = Pr(R_1)Pr(R_2)$	v	f	v	f
		1. <input checked="" type="checkbox"/>	2. <input type="checkbox"/>	3. <input type="checkbox"/>	4. <input type="checkbox"/>

COMMENTO:

Ogni operazione si svolge con le stesse modalità ed in modo indipendente dalle altre: il dado viene rilanciato ogni volta e, all'inizio dell'operazione successiva, le composizioni delle due urne sono sempre le stesse.

In particolare oltre a b) vale il fatto che gli eventi R_n formano uno schema di Bernoulli e

$Pr(R_1) = 1 - Pr(B_1)$ e $Pr(B_1)$ si può calcolare come nell'esercizio C, da cui $Pr(R_1) = \frac{2}{3}$ (per quanto riguarda la prima estrazione le due situazioni dell'esercizio C e D sono identiche)

DOMANDA 2: mettere una croce sulla affermazione esatta

1. $Pr(X_3 = k) = \binom{3}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3-k} \quad k = 0, 1, 2, 3$
2. $Pr(X_3 = k) = \binom{3}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{3-k} \quad k = 0, 1, 2, 3$
3. $Pr(X_3 = k) = \frac{1}{3} \cdot \binom{3}{k} \left(\frac{6}{8}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{8}\right)^{3-k} + \frac{2}{3} \cdot \binom{3}{k} \left(\frac{5}{8}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^{3-k} \quad k = 0, 1, 2, 3$
4. $Pr(X_3 = k) = \frac{2}{3} \cdot \binom{3}{k} \left(\frac{6}{8}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{8}\right)^{3-k} + \frac{1}{3} \cdot \binom{3}{k} \left(\frac{5}{8}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^{3-k} \quad k = 0, 1, 2, 3$

COMMENTO:

La soluzione dipende da quanto osservato nel Commento precedente: gli eventi R_n formano uno schema di Bernoulli con $Pr(R_1) = \frac{2}{3}$ e X_3 conta il numero di

successi su 3 prove (successo=estrazione di pallina rossa), quindi X segue la legge Binomiale $B(3, \frac{2}{3})$.

DOMANDA 3: mettere una croce sulla affermazione esatta

1. $Pr(T = k) = (\frac{1}{3})^{k-1} \cdot \frac{2}{3}, \quad k = 1, 2, \dots$
2. $Pr(T = k) = (\frac{2}{3})^{k-1} \cdot \frac{1}{3}, \quad k = 1, 2, \dots$
3. $Pr(T = k) = \frac{1}{3} \cdot (\frac{6}{8})^{k-1} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{3} \cdot (\frac{5}{8})^{k-1} \cdot \frac{3}{8}, \quad k = 1, 2, \dots$
4. $Pr(T = k) = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{8} \cdot (\frac{2}{8})^{k-1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8} \cdot (\frac{3}{8})^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$

COMMENTO:

Di nuovo: gli eventi R_n formano uno schema di Bernoulli con $Pr(R_1) = \frac{2}{3}$ e T è il tempo di primo successo, quindi è una variabile aleatoria Geometrica di parametro $p = \frac{2}{3}$.