Dottorato in Metodi Matematici per l'Economia, l'Azienda, la Finanza, le Assicurazioni
Esame di ammissione XXI ciclo, 13 Ottobre 2005

Traccia n.1

Il candidato svolga, in modo conciso, uno dei seguenti tre temi:

1. Punti fissi di funzioni: teoremi di esistenza e applicazioni.
2. Variabili aleatorie esponenziali e loro proprietà.
3. Leggi finanziarie scindibili.

Esercizi

Il candidato svolga alcuni dei seguenti esercizi:

1. Fra tutti i rettangoli di assegnato perimetro p trovare quello di area massima.
2. Sia $\alpha > 0$. Data una funzione $x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continua su $[0, +\infty)$, differenziabile su $(0, +\infty)$ che soddisfa
$$x'(t) \leq \frac{1}{t^\alpha} x(t), \quad \forall t > 0$$
e $x(0) = 0$:
    - Dimostrare che,se $\alpha \in (0, 1)$, allora la funzione è nulla.
    - Mostrare con un esempio, che se $\alpha \geq 1$ vi sono funzioni strettamente positive fuori da $t = 0$ che soddisfano la disuguaglianza.
3. Una banca offre ai suoi clienti un mutuo per la cifra M, da ripagare in 10 anni in rate mensili costanti A, pagate alla fine di ogni mese, al tasso di interesse mensile r, composto mensilmente. Trovare A in funzione di M e di r.
4. Sia data la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$
Si calcoli A^n, per $n \in \mathbb{N}$, illustrando i passaggi effettuati.
5. Una famiglia ha 6 figli. Sotto l'ipotesi che la probabilità che un particolare figlio sia maschio è 1/2 (indipendentemente dal sesso degli altri figli), trovare la probabilità P che ci siano:
    (a) 3 maschi e 3 femmine;
    (b) meno maschi che femmine.

6. Sia T il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$ e sia (X,Y) una variabile aleatoria con densità congiunta

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} c, & \text{per } (x,y) \in T\,, \\ 0, & \text{per } (x,y) \notin T\,. \end{cases}$$

   (a) Trovare il valore c e le densità marginali delle variabili aleatorie X e Y.

   (b) Calcolare $P(Y > \frac{1}{2} \mid X \leq \frac{1}{2})$.

   (c) Calcolare il valore atteso $E(XY)$.

7. Sia $A = (a_1, a_2, ..., a_N)$ una lista di N esami, dove per ogni $i = 1, 2, ..., N$, l'esame a_i vale c_i crediti, e si supponga di avere per ogni esame a_i un coefficiente d_i che rappresenta il grado di difficoltà dell'esame. Ogni studente può redigere il proprio piano di studio individuale scegliendo nella lista degli esami un insieme tale che la somma dei crediti corrispondenti sia almeno P (in tal caso il piano di studi si dice *regolare*). Si assume che $P < c_1 + \cdots + c_N$.

   Progettare un algoritmo che redige un piano di studi regolare di difficoltà minima.