Prerequisiti di Matematica I

Eugenio Montefusco

17 ottobre 2011

Queste note sono semplicemente un promemoria. L'intenzione è di ripassare alcuni argomenti di matematica che dovrebbero essere già noti, usando esercizi, qualche applicazione e premettendo un minimo di chiacchiere condito con qualche formula sintetica. Mi auguro che sia superfluo per tutti gli studenti, o che lo sia ben presto...

In bibliografia sono riportati i testi a cui mi sono ispirato per l'organizzazione del materiale e la costruzione degli esercizi. Ovviamente gli argomenti proposti sono solo una minima parte del bagaglio culturale matematico che dovrebbe avere ogni scienziato, per colmare le altre lacune confido nella buona volonta del lettore!

1 Geometria analitica

L'idea fondamentale di Descartes che è alla base della geometria analitica è quella di fornire il piano euclideo di un sistema di riferimento ortogonale. In questo modo è possibile associare a rette e coniche delle equazioni e far corrispondere a equazioni delle curve piane: il risultato è che ora i metodi dell'algebra sono a disposizione per lo studio della geometria. Ovviamente non possiamo condensare la geometria analitica in poche pagine, quindi rimandiamo ad opportuni testi per uno studio completo, in ogni caso proponiamo vari esercizi. Il lettore non dovrebbe incontrare problemi nel risolverli.

Nella geometria cartesiana i punti sono individuati tramite due coordinate (le proiezioni sugli assi coordinati), mentre le rette sono in corrispondenza con le equazioni di primo grado (lineari) in due incognite. Ricordiamo alcune formule indispensabili

-dati due punti P e Q la loro distanza è $\sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$,

-dati due punti distinti P e Q esiste un'unica retta passante per essi di equazione

$$(x - x_Q)(y_P - y_Q) = (y - y_Q)(x_P - x_Q),$$

-date due rette $\{ax + by + c = 0\}$ e $\{a'x + b'y + c' = 0\}$, esse sono parallele se $ab' = a'b$, perpendicolari se $aa' + bb' = 0$.

Alcuni esercizi

Trovare la distanza tra le seguenti coppie di punti

$$(1, 2) \text{ e } (-2, 3), \quad (1, \sqrt{2}) \text{ e } (\sqrt{2}, 1), \quad (-3, 0) \text{ e } (2, -1).$$

Scrivere l'equazione e disegnare le rette passanti per le seguenti coppie di punti

$$(2, -1) \text{ e } (-1, 0), \quad (-2, 1) \text{ e } (-2, 3), \quad (1, 2) \text{ e } (-1, -1).$$

Scrivere l'equazione della retta passante per il punto $(2, -1)$ e avente coefficiente angolare -1, poi disegnarla.

Tracciare la retta di equazione $y = -3x + 5$ e quella di equazione $3x - 4y - 9 = 0$.

Scrivere l'equazione della retta passante per $(1, 2)$ e parallela a $-(x + 1) = 3y$.

Scrivere l'equazione della retta passante per il punto $(1, 2)$ ortogonale alla retta dell'esercizio precedente.

Calcolare la distanza tra il punto $(1, 1)$ e le rette $x + 2 = 0$ e $x + y = 1$.

Le coniche occupano un posto importante nella matematica e nel suo sviluppo storico, in questa sede ci limitiamo a dire che sono in corrispondenza con equazioni di secondo grado (o quadratiche) nelle due variabili, per uno studio un po' più completo rimandiamo ad opportuni manuali (ad esempio [2]). Completiamo questo paragrafo con un'importante osservazione: per cercare i punti comuni a due (o più) curve è sufficiente risolvere il sistema composto dalle equazioni delle curve. Ricordiamo alcune equazioni.

L'equazione di una circonferenza è $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2$, dove il centro ha coordinate (α, β) e $\rho > 0$ è il raggio della curva.

L'equazione di una generica parabola con asse parallelo all'asse delle ordinate è $\{y = ax^2 + bx + c\}$.

Scrivere l'equazione della circonferenza centrata nell'origine e avente raggio 2.

Scrivere l'equazione della circonferenza centrata nel punto $(-1, 2)$ e passante per il punto $(0, 2)$.

Trovare centro e raggio della circonferenza $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$, inoltre disegnarla sul piano cartesiano.

Trovare i punti comuni alla retta $x - y + 2 = 0$ e alla circonferenza centrata in $(1, 2)$ avente raggio 1.

Scrivere l'equazione della circonferenza centrata in $(1, 1)$ e tangente alla retta $3x - 4y - 9 = 0$.

Trovare i valori del parametro k per cui la retta $x - y + k = 0$ risulta esterna, secante e tangente alla circonferenza individuata dall'equazione $x^2 + y^2 - 2x = 0$. Relativamente ai valori di k per cui si ha tangenza calcolare le coordinate del punto comune a retta e conica.

Disegnare la parabola $y = 3x^2 - x + 1$ e determinare i punti di intersezione con la retta di equazione $y = x + 1$.

Determinare i valori di k per cui la parabola $y = x^2 - 4x + k$ interseca la retta $2x + y = 0$ in due punti.

Scrivere l'equazione della parabola avente asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate e passante per i punti $(0, 0)$, $(1, 3)$ e $(4, 0)$.

2 Funzioni periodiche

Ricordando la discussione fatta a lezione sul concetto di funzione ci concentriamo ora sul concetto di funzione periodica. Questo tipo di funzione viene introdotta per modellare e studiare fenomeni in qualche senso ripetitivi, che si ripetono con una cadenza costante. Abbiamo, in natura, un buon numero di esempi di fenomeni di questo tipo, il che giustifica il tempo che impiegheremo nello studio del paragrafo...

Definizione. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione per la quale $\exists T > 0$ tale che

$$f(x) = f(x + T), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Una tale funzione sarà detta periodica. Il periodo di f è il più piccolo numero reale positivo T per cui vale l'identità precedente. In realtà non è affatto necessario che il dominio della funzione sia tutto $\mathbb{R}$, la definizione può essere modificata per contemplare casi quali la funzione $\tan(x)$.

Le funzioni periodiche più note sono le funzioni trigonometriche sin e cos, diamo per noto il valore di tali funzioni per gli argomenti $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2, \pi$ e riportiamo di seguito le loro principali propriet. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ vale che

$$\begin{aligned}
&\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1 \\
&-1 \leq \sin(a), \cos(b) \leq 1 \\
&\sin(-a) = -\sin(a) \\
&\cos(-a) = \cos(a) \\
&\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \\
&\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)
\end{aligned}$$

Gli esempi più facili di funzioni periodiche sono le ben funzioni trigonometriche, ma tali esempi non esauriscono la totalità delle funzioni periodiche. Provare per esempio che la funzione $f(x) = \phi(\sin(2x))$ è ancora una funzione periodica, se ϕ è definita sull'intervallo $[-1, 1]$ e calcolarne il periodo (se possibile!).

Facciamo ora un esempio più strano. Costruiamo una funzione g nel seguente modo, per ogni n numero intero poniamo $g(x) = 1$ se $x \in [n, n + 1/2)$ e $g(x) = 0$ se $x \in [n + 1/2, n + 1)$. La nostra g così costruita è una funzione periodica (provarlo)!

Alcuni esercizi

Provare che se $f(x)$ è periodica con periodo T, allora verifica la definizione di funzione periodica con kT al posto di T, per ogni k numero intero. Cosa succede se proviamo con k razionale non intero?

Calcolare il periodo della g di cui sopra.

Provare che $f(x) = c \in \mathbb{R}$ verifica la definizione di funzione periodica. Qual è il suo periodo?

Provare a disegnare i grafici delle seguenti funzioni periodiche, calcolandone il dominio ed il periodo:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right), \qquad \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right), \qquad \frac{\sin(x)}{\sin(x) + 1}.$$

Problema 2.1 *Nei muscoli pinnati ci sono due serie di fibre muscolari corte, con un estremo fissato ad un osso ed inclinate al centro verso un tendine. Quando tali fibre riducono la loro lunghezza da λ a λ', di quanto si muove il tendine? (Tali muscoli permettono movimenti minori dei muscoli con fibre parallele, però sono più resistenti agli sforzi)*

Problema 2.2 *E' noto che il lebiste (*Lebistes reticulatus*) è un pesce che si orienta nell'acqua usando la gravitazione e l'inclinazione della luce incidente. Il meccanismo si basa sull'azione delle due forze: G la forza peso (diretta verso il basso) e una forza L diretta parallelamente alla luce solare: il lebiste si dispone lungo il vettore R, risultante dalla somma dei due precedenti. Chiamati α e β gli angoli tra F e R e L e R, rispettivamente, relazionare le quantità in gioco tra di loro.*

Problema 2.3 *Supponiamo di avere una fibra a sezione circolare e di prelevarne un frammento tagliandola per obliquo. Avendo fatti dei tagli obliqui le due sezioni visibili sono delle ellissi, supponiamo di aver misurato il semiasse maggiore b delle due sezioni, di avere il diametro d della sezione trasversale e la quantità a pari alla parte del diametro maggiore della sezione ellittica che sporge dall'altra ellisse. Calcolare la lunghezza del tratto di fibra in esame.*

Problema 2.4 *Un'asta verticale lunga* 2*m getta un'ombra su un piano orizzontale. I raggi della luce del sole hanno un'inclinazione $\theta = 67^o$ rispetto al piano orizzontale. Calcolare la lunghezza dell'ombra.*

Problema 2.5 *Durante i periodi piovosi è presente nelle foglie cadute un sottile strato d'acqua, sul quale galleggiano (in ordine crescente di altezza) batteri, protozoi, funghi e spore. Se l'angolo di inclinazione è, rispettivamente, di 10^o, 30^o e 50^o e la distanza verso l'alto è di* 5*cm, calcolare l'altezza del livello raggiunto dai microrganismi.*

$$\cos(x) + \cos^2(x) = 0, \qquad \sin(2x) = 1,$$

$$\sin(x) + \cos(x) = 0, \qquad \cos(x) = \sin(x)\cos(x),$$

$$2\sin(x) = \sin(2x), \qquad \tan(x) = \cot(x),$$

$$|\sec(x)| = 1, \qquad \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin(2x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \qquad \sin^2(x) = \frac{1}{2},$$

$$2\cos^2(x) + \sin(x) = 1, \qquad \cos(x) + \sin(x) = -1,$$

$$6\sin^2(x) - 2\sqrt{3}\sin(x)\cos(x) = 3, \qquad \sin^2(x) < \frac{1}{4},$$

$$\cos(x) + \sin(2x) > 0, \qquad 2\sin^2(x) - 3\sin(x)\cos(x) + 1 \leq 0,$$

$$\frac{\cos(x)}{2\cos(x) - 1} < 0, \qquad \frac{\tan(x) - 1}{2\cos(x) - \sqrt{3}} > 0,$$

$$\frac{2\sin^2(x) - 1}{\sin(x)} \leq 0, \qquad \frac{-\cos(x) + \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} \geq 0,$$

$$\tan(x) + \cot(x) > 0.$$

Si determinino l'ampiezza degli angoli acuti di un triangolo rettangolo in modo che l'area della superficie del solido generato da una rotazione completa del triangolo attorno all'ipotenusa sia uguale all'area della superficie laterale del cono ottenuto ruotando il triangolo attorno ad un suo cateto.

Si trovi un punto P su di una circonferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ in modo che il volume del solido generato dalla rotazione del triangolo ABP attorno all'ipotenusa sia uguale al volume della semisfera di raggio r.

Nel semicerchio di diametro $\overline{AB} = 1$ si inscriva un quadrilatero $ABCD$ tale che $\overline{BC} = \overline{CD}$. Si esprima il semiperimetro p in funzione dell'angolo $B\hat{A}C = x$ e si disegni il grafico della funzione ottenuta.

Dato il trapezio rettangolo $ABCD$ avente base maggiore $\overline{AB} = 3a$ e diagonale $\overline{AC} = 2a$, si determini l'angolo $A\hat{B}D = x$ in modo che le diagonali siano tra loro perpendicolari.

In una sfera di raggio r si inscrivano due coni aventi la base in comune e vertici diametralmente opposti. Indicando con $2x$ l'angolo di apertura di uno di essi e con y il rapporto tra la somma delle aree delle loro superficie laterali e l'area della superficie della loro base, si esprima y in funzione di x e si disegni il grafico della funzione ottenuta.

Due punti materiali A e B percorrono i lati di un angolo $\alpha = \pi/3$, dopo essere partiti contemporaneamente dal suo vertice. Sapendo che il moto di A è un moto rettilineo uniforme di velocità $v = 8\ m/s$ e che quello di B è un moto rettilineo uniformemente accelerato con $a = 4$ m/s^2 e velocità iniziale nulla, si determini la distanza tra i due punti all'istante in cui hanno la stessa velocità.

Calcolare il raggio della Terra, sapendo che due punti sulla sua superficie distano 790 Km e che quando il sole è allo zenit su B forma un angolo di $7^o 12'$ con la verticale su A. (problema risolto da Eratostene)

3 Esponenziali e logaritmi

Elenchiamo ora alcune proprietá delle funzioni esponenziali, naturalmente omettiamo le necessarie dimostrazioni. Innanzitutto, poiché la base è un numero positivo le potenze con esponente reale sono sempre numeri positivi; la seconda importante prerogativa degli esponenziali è che la funzione a^x è crescente se e solo se $a > 1$, mentre è decrescente quando $0 < a < 1$.

Passiamo ora a parlare di funzioni logaritmiche. Questa nuova operazione si definisce nel seguente modo

$$a^x = b \quad \text{se e solo se} \quad \lg_a b = x.$$

L'idea fondamentale di questa definizione è l'operazione inversa dell'elevamento a potenza, e quindi è legato alla base della potenza. Le due relazioni vanno smpre tenute a mente. La prima importante osservazione è che il numero a deve appartenere all'insieme $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ essendo la base della potenza un numero positivo diverso da 1, inoltre l'argomento del logaritmo deve essere un numero positivo, in quanto un esponenziale è sempre un numero positivo.

Dalle proprietà delle potenze derivano le seguenti relazioni che valgono per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, con $a \neq 1$

$$\lg_a(b) + \lg_a(c) = \lg_a(bc),$$

$$\lg_a(b) - \lg_a(c) = \lg_a(b/c),$$

$$\lg_a(b^n) = n \lg_a(b).$$

Elenchiamo ora alcune classi di disequazioni (e quindi equazioni) che coinvolgono esponenziali e logaritmi, fornando le relative tecniche risolutive.

Supponiamo che $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ e consideriamo la disequazione

$$a^{f(x)} \geq a^{g(x)},$$

questo tipo di disequazione, a causa delle proprietà di monotonia degli esponenziali, diventa una delle seguenti

$$f(x) \geq g(x) \quad \text{se} \quad a > 1,$$

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{se} \quad a < 1.$$

Le disequazioni del tipo

$$ca^{f(x)} \geq kb^{g(x)},$$

dove c e k sono numeri reali positivi e le basi a e b appartengono all'insieme $\mathbb{R}^+\backslash\{1\}$ si risolvono passando ai logaritmi (generalmente in base 10), sfruttando che tale funzione mantiene l'ordine, e si ottiene una disequazione del tipo

$$f(x)\text{Log}(a) + \text{Log}(c) \geq g(x)\text{Log}(b) + \text{Log}(k).$$

Le disequazioni del tipo

$$F\left(a^{f(x)}\right) \geq 0,$$

dove $a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$ si risolvono ricorrendo alla sostituzione $t = a^{f(x)}$ e procedendo di conseguenza.

Passiamo ora a disequazioni di tipo logaritmiche, la prima classe che consideriamo è la seguente

$$\lg_a(f(x)) \geq \lg_a(g(x)),$$

con $a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$ si può risolvere facilmente passando agli esponenziali e stando attenti alla base a.

Infine le disequazioni del tipo

$$F\left(\lg_a(f(x))\right) \geq 0,$$

dove $a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$ si risolvono ricorrendo alla sostituzione $t = \lg_a f(x)$ e procedendo di conseguenza.

Alcuni esercizi

$$5^{2x-1} > 5^{x+2}, \qquad 3^{1-x} \geq 9^{2+x},$$

$$10^{-x} > 100^{x-3/2}, \qquad 8^{-1+x/2} > \left(\frac{1}{4}\right)^{x+2},$$

$$3^{3x-x^2} \leq 9, \qquad 3 \cdot 2^x > 4 \cdot 3^{x+1},$$

$$4^x - 3 \cdot 2^{x+2} + 27 \le 0, \qquad \log_3 |x-1| > \log_3(x+2),$$

$$\log_5(x^2-1) > \log_5(x+3), \qquad \log_{1/2}(x^2+2x)\log_{1/2}(7x-6),$$

$$\log_{10}\left(\tfrac{x+2}{x-1}\right) > 1, \qquad \log_{1/3}(x-2) + \log_{1/3}(x+1) > \log_{1/3}(2x^2-4),$$

$$\log_3^2(x-1) - 3\log_3(x-1) - 4 > 0, \qquad \frac{\log_2(x)-1}{2-\log_2(x)} > 2.$$

Anche le funzioni esponenziali si incontrano con una certa frequenza in natura, proponiamo quindi alcuni esempi.

Un corpo di massa m, cadendo sotto l'effetto della forza di gravità in un fluido viscoso (che produce un attrito di coefficiente $\alpha > 0$) si muove secondo la legge

$$s(t) = \frac{g}{\alpha}t + \frac{gm}{\alpha^2}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right),$$

assumendo che all'istante $t_0 = 0$ il corpo fosse all'origine della retta di riferimento e avesse velocità iniziale nulla.

Consideriamo, infine, un circuito formato da un condensatore carico e da un interruttore aperto. Alla chiusura del circuito la differenza di potenziale tra le armature del circuito induce un campo elettrico che produce un'intensità di corrente elettrica. Tale corrente segue la legge

$$i(t) = ke^{-\frac{C}{R}t},$$

dove C è la capacità del condensatore, mentre R esprime la resistenza.

Problema 3.1 *In una foresta giovane la quantità di alberi da legna cresce in maniera approssimativamente esponenziale, con un tasso del* 3.5%. *Che aumento possiamo aspettarci in dieci anni?*

Problema 3.2 *Un brodo di coltura è infetto da* N_0 *batteri. Le cellule dei batteri si dividono ogni due ore. Quanti batteri ci saranno nel brodo dopo* $24h$? *In quale istante il numero dei batteri aveva raggiunto il* 25% *del totale precedente?*

Problema 3.3 *Supponiamo che ogni femmina di un allevamento di conigli partorisca tre conigli femmina. Quanti conigli femmina della decima generazione saranno i discendenti di un singolo coniglio della prima generazione?*

Problema 3.4 *Il potassio ha come isotopo radioattivo il* ^{42}K*, il cui periodo è* $12.5h$*, se* N_0 *è il numero originario di atomi quanti ne rimarranno dopo due giorni e due ore? Quante ore ci vorranno fino a che rimangano solo* $N_0/1024$ *atomi?*

Problema 3.5 *Nel* 1972 *la popolazione dell'India ammontava a* 550 *milioni e cresceva con un tasso del* 2.4%*. Supponendo che il tasso resti costante scrivere la formula che rappresenta l'ammontare della popolazione e calcolare l'anno in cui tale valore è pari a* 860 *milioni (la popolazione della Cina nel* 1972*).*

Problema 3.6 *Lo stato del Nevada aveva* 291000 *abitanti nel* 1960 *e* 480000 *nel 1970. Supponendo un aumento esponenziale calcolare l'incremento percentuale annuo e il tempo necessario per il raddoppio della popolazione.*

Moltissimi esperimenti relativi alla ricezione del suono, della luce e ad alcuni stimoli per l'olfatto e il gusto mettono in evidenza che non è possibile distinguere stimoli con una precisione costante. Sia s la grandezza di uno stimolo msurabile e Δs la differenza richiesta affinché un secondo stimolo sia distinguibile dal primo, allora il rapporto

$$R = \frac{\Delta s}{s}$$

è costante, cioè non dipende da s. Questa affermazione, chiamata *legge di Weber*, è soltanto un'approssimazione della realtà ed ha una validità limitata a situazioni non estreme. Comunque la legge afferma che differenze notevoli di sensazioni si avvertono quando l'aumento di stimolo è pari ad una percentuale costante dello stimolo stesso. Su questo presupposto Fechner propose dei metodi di quantificazione su scale logaritmiche, come vedremo in alcuni esempi ed esercizi.

Esempio 3.7 La luminosità di una stella non è proporzionale all'energia della luce ricevuta dall'occhio, seguendo la legge di Weber-Fechner possiamo definire la *grandezza apparente* di una stella nel seguente modo

$$m = c - 2.5\log(I),$$

dove I è l'intensità della luce e c è determinata dall'unita di misura dell'intensità.

Esempio 3.8 In medicina la legge di Weber-Fechner assume una notevole importanza nella relazione dose-risposta nei dosaggi biologici. Supponiamo di dover somministrare una dose di $10g$ di una certa sostanza chimica ad un malato, se aumentiamo tale dose di $5g$ ci aspettiamo che la risposta del paziente vari. Al contrario se la dose fosse di $100g$ un aumento di $5g$ avrebbe un'importanza decisamente minore: in questi casi è il tasso di incremento che è rilevante. In genere si assume che *la risposta sia linearmente dipendente dal logaritmo della dose.*

Problema 3.9 *Supponiamo che due suoni di frequenza $1000Hz$ abbiano sonorità di $30dB$ e $45dB$, rispettivamente, che cosa si pu dire per il rapporto delle loro intensità fisiche I_1 e I_2?*

Problema 3.10 *L'intensità del suono decresce inversamente al quadrato della distanza dalla sorgente $I = c/r^2$. Definiamo la sonorità secondo la seguente formula*

$$S = 10(\log(I) - \log(I_0)) = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right),$$

dove $I_0 = 10^{-12} W/m^2$ è un valore di riferimento che rappresenta la soglia minima di udibilità (tutto supponendo che le frequenze dei suoni siano di $1000Hz$). Quantificare la dipendenza di S da r.

Riferimenti bibliografici

[1] E. Acerbi & G. Buttazzo, *Primo corso di analisi matematica*, Pitagora Editrice Bologna, 1997.

[2] L. Cateni, C. Bernardi & S. Maracchia, *Geometria analitica e complementi di algebra*, Le Monnier, 1989.

[3] E. Giusti, *Analisi matematica 1. Terza edizione*, Bollati Boringhieri, 2002.