Equazioni Differenziali

Master in *Calcolo Scientifico*

Eugenio Montefusco

Scheda n. 2 di esercizi (14.01.2012)

Esercizio 1. Si scriva la formulazione debole del problema

$$\begin{cases} -(k(x)u_x(x))_x + u(x) = f(x) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

dove $f \in L^2(0,1)$ e $0 < C_0 \leq k(x) \leq C_1 < +\infty$ q.o. in $(0,1)$.

Esercizio 2. Data l'equazione delle onde

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - v^2 u_{xx}(x,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \qquad\qquad x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases} \tag{1}$$

i. si verifichi che le funzioni $u(x,t) = \phi(x \pm vt)$ risolvono l'equazione (anche se non soddisfano il dato iniziale!) per ogni $\phi \in C^2(\mathbb{R})$,

ii. se $f \in C^2(\mathbb{R})$ allora $u(x,t) = \dfrac{1}{2}\,(f(x-vt) + f(x+vt))$ risolve (1) con $u_1 \equiv 0$,

iii. se $g \in C^1(\mathbb{R})$ allora $u(x,t) = \dfrac{1}{2v}\displaystyle\int_{x-vt}^{x+vt} u_1(s)\,ds$ risolve (1) con $u_0 \equiv 0$,

iv. supponendo che u risolva (1) si calcoli la derivata temporale della funzione energia $E(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \Big[|u_t(x,t)|^2 + v^2|u_x(x,t)|^2\Big]$,

v. dai precedenti risultati si ottenga l'espressione esplicita dell'**unica** soluzione di (1) (si ricordi che il problema è lineare!).

Esercizio 3. Si verifichi che la funzione $w(x) = \dfrac{1}{2n}(1 - |x|^2)$ risolve il problema

$$\begin{cases} -\Delta w(x) = 1 & x \in B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\} \\ w(x) = 0 & x \in \partial B \end{cases}$$

poi si usi il principio del massimo e la precedente funzione w per provare che la soluzione dell'equazione ellittica

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & x \in B \\ \quad u(x) = 0 & x \in \partial B \end{cases}$$

con $f \in L^2(B)$ e $|f| \leq M$ q.o., verifica la disuguaglianza

$$|u(x)| \leq \frac{M}{2n}$$

Esercizio 4. Assegnato il problema evolutivo

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

con $f \in C(0,1)$, si provi che vale

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} u(x,t) = \int_0^1 f(x)\,dx \quad \forall x \in (0,1)$$

(suggerimento: si scriva la soluzione in serie di Fourier).

Esercizio 5. Si scriva la formulazione debole del problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) + u(x,t) = f(x,t) \\ u_x(0) = u_x(1) = 0 \end{cases}$$