

Nome e Cognome (in stampatello):

Istruzioni. Devono essere riconsegnati **esclusivamente** i fogli contenenti i testi degli esercizi ed è vietato usare testi di qualsiasi tipo. Scrivere su ogni foglio nome e cognome (nell'ordine richiesto) in stampatello leggibile. Ogni affermazione deve essere motivata.

Esercizio a risposta aperta 1. Si calcolino tutte le primitive delle seguenti funzioni

$$(i) \quad f(x) = xe^{-x} \qquad (ii) \quad g(x) = \sin(2x)\cos(2x) \qquad (iii) \quad h(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^x}$$

Soluzione.

(i) Le prime primitive si individuano facilmente ricorrendo alla formula di integrazione per parti come segue

$$\int xe^{-x} dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c = -(x+1)e^{-x} + c \quad c \in \mathbb{R}$$

ricordando che $(x)' = 1$ e $(e^{-x})' = -e^{-x}$ e che tutte le primitive in questione differiscono per una costante arbitraria, come provato dal teorema fondamentale del calcolo integrale.

(ii) Ricordando che $\sin(2s) = 2\sin(s)\cos(s)$, per ogni s , abbiamo che

$$\int \sin(2x)\cos(2x) dx = \frac{1}{2} \int \sin(4x) dx - \frac{1}{8} \cos(4x) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

visto che $(\cos(s))' = -\sin(s)$. Si ricordi che $\cos(4x) = \cos^2(2x) - \sin^2(2x) = 2\cos^2(2x) - 1 = 1 - 2\sin^2(2x)$.

(iii) L'ultimo integrale indefinito riguarda una funzione razionale in e^x , che (come visto a lezione) si risolvono con la sostituzione $e^x = t$

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx = \int \frac{t}{1+t} dt = \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = t - \ln(|1+t|) + c = e^x - \ln(1+e^x) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

visto che risulta $dx = \frac{1}{t} dt$.

Nome e Cognome (in stampatello):

- Esercizio a risposta aperta 2.** Dato il quadrato $Q = \{0 \leq x, y \leq 2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ e la funzione $f(x, y) = [x(2x - 1) + y(y - 1)]$
- (i) si spieghi perché esistono il massimo e il minimo assoluto di f in Q ,
- (ii) si trovino i punti stazionari della funzione all'interno del quadrato e dica se sono punti di massimo, minimo o sella usando la matrice hessiana,
- (iii) si calcoli il valore del massimo assoluto e del minimo assoluto di f in Q e i rispettivi punti in cui sono assunti.

Soluzione.

(i) La funzione f è continua (è un polinomio!) e il dominio Q è un quadrato, un insieme chiuso e limitato, quindi sono verificate le ipotesi del teorema di Weierstrass, che garantisce l'esistenza del massimo e del minimo assoluto di f in Q .

(ii) Per identificare i punti stazionari della funzione all'interno del quadrato è sufficiente cercare i punti in cui il gradiente è il vettore nullo, in questo modo si ottiene il seguente sistema

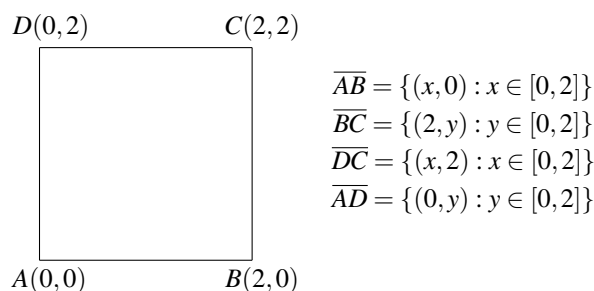
$$\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) = (4x - 1, 2y - 1) = (0, 0)$$

la cui unica soluzione è il punto $P(1/4, 1/2)$. La matrice hessiana della funzione vale

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e questo implica che P è un punto di minimo locale (la traccia e il determinante della matrice sono positivi). In realtà P è un punto di minimo assoluto visto che $f(x, y) = 2x^2 - x + y^2 - y = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{8}$ da cui segue che per ogni $(x, y) \in Q$ vale $f(x, y) \geq -\frac{3}{8} = f(P)$.

(iii) L'ultimo quesito si affronta studiando la funzione sul bordo di Q , ovvero sui lati del quadrato. Procediamo parametrizzando i quattro lati come segue



e studiando le corrispondenti funzioni di una variabile reale

1. $\phi_1(x) = f(x, 0) = (2x^2 - x)$ per $x \in [0, 2]$, valori estremali risultanti $x = 0, 1/4, 2$,
2. $\phi_2(y) = f(2, y) = (y^2 - y + 2)$ per $y \in [0, 2]$, valori estremali risultanti $y = 0, 1/2, 2$,
3. $\phi_3(x) = f(x, 2) = (2x^2 - x + 3)$ per $x \in [0, 2]$, valori estremali risultanti $x = 0, 1/4, 2$,
4. $\phi_4(y) = f(0, y) = (y^2 - y)$ per $y \in [0, 2]$, valori estremali risultanti $x = 0, 1/2, 2$.

Confrontando tutti i valori che si ottengono dai punti trovati, potenziali punti di massimo e/o minimo assoluti otteniamo i seguenti risultati

$$\max_Q(f) = f(C) = 8 \quad \min_Q(f) = f(P) = -\frac{3}{8}$$

Nome e Cognome (in stampatello):

Esercizio a risposta aperta 3. Si calcolino i seguenti integrali doppi

$$(i) \iint_{\{0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}} e^{x-y} dx dy \quad (ii) \iint_{\{1 \leq x^2 + y^2 \leq 3\}} 1 dx dy \quad (iii) \iint_{\{1 \leq x+2y \leq 2, 1 \leq 2x-y \leq 2\}} x dx dy$$

Soluzione.

(i) Poiché il dominio è già scritto in forma normale possiamo ricorrere immediatamente alle formule di riduzione e scrivere

$$\iint_{\{0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}} e^{x-y} dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^y e^{x-y} dx \right) dy = \int_0^1 [e^{x-y}]_0^y dy = \int_0^1 (1 - e^{-y}) dy = [y + e^{-y}]_0^1 = 1 + \frac{1}{e} - 1 = \frac{1}{e}$$

(ii) Il secondo integrale coinvolge evidentemente un dominio a simmetria radiale (precisamente una corona circolare), ricordando che $|J| = \rho$ e che la corona, rispetto alle coordinate (ρ, θ) , diventa il rettangolo $\{0 \leq \theta \leq 2\pi, 1 \leq \rho \leq \sqrt{3}\}$ otteniamo

$$\iint_{\{1 \leq x^2 + y^2 \leq 3\}} 1 dx dy = \int_1^{\sqrt{3}} \rho \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) d\rho = 2\pi \int_1^{\sqrt{3}} \rho d\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_1^{\sqrt{3}} = 2\pi \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right) = 2\pi$$

(iii) L'ultimo integrale doppi può essere affrontato in vari modi, scegliamo quello del cambio di variabili suggerito dalla rappresentazione analitica del dominio

$$\begin{cases} u = x + 2y \\ w = 2x - y \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{5}(u + 2w) \\ y = \frac{1}{5}(2u - w) \end{cases} \quad \text{da cui} \quad J = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene anche che $|\det(J)| = \frac{1}{5}$. Allora segue

$$\begin{aligned} \iint_{\{1 \leq x+2y \leq 2, 1 \leq 2x-y \leq 2\}} x dx dy &= \iint_{\{1 \leq u \leq 2, 1 \leq w \leq 2\}} \frac{1}{5}(u + 2w) \frac{1}{5} du dw = \frac{1}{25} \int_1^2 \left(\int_1^2 (u + 2w) dw \right) du \\ &= \frac{1}{25} \int_1^2 [uw + w^2]_1^2 du = \frac{1}{25} \int_1^2 (u + 3) du = \frac{1}{25} \left[\frac{u^2}{2} + 3u \right]_1^2 = \frac{9}{50} \end{aligned}$$