DIVERTIRSI CON LA MATEMATICA: CAOS & ORDINE

PIERO D'ANCONA & EUGENIO MONTEFUSCO

Dipartimento di Matematica *G. Castelnuovo*
Università degli Studi di Roma *La Sapienza*
Piazzale A. Moro 5, 00185 Roma
http://www.mat.uniroma1.it/people/dancona
http://www.mat.uniroma1.it/people/montefusco

1. INTRODUZIONE

Spesso si parla di *c*aos, anche se in realtà non se ne ha alcuna idea, oggi intendiamo prendere il toro per le corna ed affrontare il problema.

Contrariamente a quanto si pensa il caos (come concetto matematico) non significa disordine totale, assenza di ogni struttura ordinata... semplicemente il caos matematico è un ordine complesso, nascosto che rende difficili azzardare "previsioni". In quest'ottica proponiamo le seguenti tre definizioni

i) Diremo che un sistema è *s*emplice o *p*revedibile se ha un comportamento chiaro, lineare. In particolare questo succede se si può scrivere esplicitamente la legge che ne descrive l'evoluzione.
ii) Diremo che un sistema è *c*aotico o *c*omplesso se la sua dinamica è fortemente condizionata dalle variazioni di alcuni parametri. In particolare dati vicini possono produrre effetti molto diversi!
iii) Diremo che un sistema è *s*tocastico se la sua dinamica è di tipo totalmente imprevedibile.

Queste definizioni NON sono matematicamente corrette, in ogni caso sono ragionevolmente buone per i nostri scopi...

Nel seguito cercheremo di studiare, per quanto ci è possibile, alcuni sistemi, di capirne il carattere e di fare alcune dimostrazioni, ovviamente senza dimenticare che il nostro primo scopo è quello di divertirci!

Alcuni degli esercizi che ti proporremo sono pensati per la sperimentazione, il che significa che è possibile svolgerli aiutandosi con un calcolatore e un po' di tempo. Ti invitiamo a risolverli, a rifletterci sopra e a farci sapere se ti sono piaciuti, ovviamente speriamo che siano un valido spunto per un approfondimento.

Questa versione dei testi degli esercizi contiene anche alcune discussioni, ma prima di leggerle ti suggeriamo di lasciar correre del tempo e di dedicare molto tempo alla riflessione: leggere le soluzioni troppo presto significherebbe gettare la spugna...☺Buon lavoro e buon divertimento!

2. PRIMI ESERCIZI

Esercizio 1. *Supponiamo di aver investito una quantità $\alpha > 0$ di denaro in un affare, il quale rende nel seguente modo: ogni trimestre i nostri soldi aumentano di una percentuale fissa $\gamma > 0$ e diminuiscono a causa delle spese di gestione fisse pari a $\sigma > 0$. Supponendo che tali quantità siano costanti nel tempo rispondi alle seguenti domande*
– Poni $\sigma = 0$ e calcola il valore del capitale dopo n trimestri.

– *Calcola l'ammontare del capitale dopo n trimestri quando $\sigma \neq 0$!*
– *Determina la natura del sistema.*

Soluzione. Cominciamo dal caso $\sigma = 0$, cioè tasse nulle (ovviamente è solo un esercizio puramente teorico!). In questo caso abbiamo che ad ogni trimestre vengono aggiunti dei soldi ai nostri averi in quantità proporzionale al deposito presente sul conto: questo significa che se chiamo C_n i soldi in banca dopo n periodi abbiamo la seguente relazione

$$C_{n+1} = C_n + \gamma C_n.$$

Questa è chiaramente una legge che determina il valore del nostro conto, non appena sia noto il capitale posseduto alla scadenza precedente, quindi possiamo scrivere una legge che descriva come variano il nostro conto

$$\begin{cases} C_{n+1} = (1+\gamma)C_n \\ C_0 = \alpha \end{cases}.$$

Dalla legge di sopra si ottiene facilmente che

$$C_n = (1+\gamma)^n \alpha,$$

e questoci permette di rispondere alla prima domanda. In particolare possiamo osservare che (poiché $\gamma > 0$) i nostri soldi aumentano indefinitivamente, quindi possiamo diventare arbitrariamente ricchi! Naturalmente a patto di trovare una banca di questo tipo e di saper attendere...

Partendo dalle considerazioni precedenti cerchiamo di scrivere una legge per C_n anche quando $\sigma \neq 0$, naturalmente dovremo faticare un po' di più. Cominciamo scrivendo i primi passi

$$C_0 = \alpha,$$

$$C_1 = (1+\gamma)\alpha - \sigma,$$

$$C_2 = (1+\gamma)\left((1+\gamma)\alpha - \sigma\right) - \sigma = (1+\gamma)^2\alpha - \sigma\left(1 + (1+\gamma)\right),$$

$$C_3 = (1+\gamma)^3\alpha - \sigma\left(1 + (1+\gamma) + (1+\gamma)^2\right),$$

a questo punto ci azzardiamo a proporre la seguente formula

$$C_n = (1+\gamma)^n\alpha - \sigma\left(1 + (1+\gamma) + \cdots + (1+\gamma)^{n-1}\right), \tag{1}$$

dove risulta lampante l'effetto frenante della tassazione! In particolare non è più ovvio che ci si possa arricchire a volontà partendo da un capitale qualsiasi. Con un po' di fatica in più (provare per esercizio) si può arrivaare alla formula che segue

$$C_n = (1+\gamma)^n\left(\alpha - \frac{\sigma}{\gamma}\right) + \frac{\sigma}{\gamma},$$

il che ci permette di tirare le seguenti conclusioni

i) se $\alpha > \sigma/\gamma$ tutto è analogo al caso precedente, anche se il nostro capitale rende come se fosse $(\alpha - \sigma/\gamma)$,
ii) se $\alpha = \sigma/\gamma$ la dinamica è stazionaria: il nostro capitale non frutta e non si disperde (ovviamente stiamo trascurando gli effetti dell'inflazione...),
iii) se $\alpha < \sigma/\gamma$ presto il nostro conto andrà in rosso, e la banca applicherà ben altri tassi d'interesse... ma questa è un'altra storia!

Dalla discussione fatta si evince (almeno lo speriamo!) che il sistema è di tipo semplice o prevedibile, visto che possiamo facilmante prevedere in anticipo la crescita del nostro capitale. ■

Esercizio 2. *Consideriamo il sistema di iterazioni così fatto: dato un numero $x > 1$ ne estraiamo la radice quadrata, e reiteriamo l'operazione.*
– Prova che iterando l'operazione il nostro numero diventa sempre più piccolo.
– E' possibile dedurne il comportamento asintotico?
– Con che tipo di sistema abbiamo a che fare?

Soluzione. Per questo esercizio è molto istruttivo prendere una calcolatrice, digitare un numero e cominciare a premere ripetutamente il pulsante della radice quadrata: l'esperienza ci mostra che, a patto di aspettare un po', alla fine la colclatrice si stabilizza sul numero 1, ora procediamo per passi e ragioniamo con un po' di rigore.

Pima di tutto proviamo che $\sqrt{x} < x$. Infatti elevando tutto al quadrato (e ricordando che $x > 1$) abbiamo la disequazione $x^2 > x$ che è sempre vera se $x > 1$. Quindi ogni volta che iteriamo l'operazione di estrazione della radice quadrata otteniamo un numero più piccolo, anche se sempre maggiore di 1, come è facile verificare, questo è sufficiente a concludere che l'iterazione ci porta verso l'unità, come abbiamo verificato sperimentalmente prima. In conclusione possiamo affermare che abbiamo a che fare con un sistema prevedibile. ∎

Esercizio 3. *Consideriamo l'*algoritmo di Erone*, ovvero il seguente sistema di iterazioni*

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right) \\ x_0 = 2 \end{cases} .$$

Calcola le prime quattro iterazioni, poi
– Mostra che $x_n > 0$.
– Prova che $x_n^2 \geq 2$.
– Cerca di capire a cosa convergono le iterazioni.
– Determina la natura del sistema.

Soluzione. La prima domanda è abbastanza semplice, infatti con poca fatica si può calcolare che

$$x_0 = 2, \quad x_1 = 1.5, \quad x_2 = 1.41667, \quad x_3 = 1.4142157, \quad x_4 = 1.4142135\ldots$$

Il fatto che x_n sia positivo è una conseguenza del fatto che $x_0 = 2 > 0$ e che le iterazioni successive sono ottenute come media aritmetica di due quantità positive.

Dalla disuguaglianza $(a^2 + b^2) \geq 2ab$ segue che

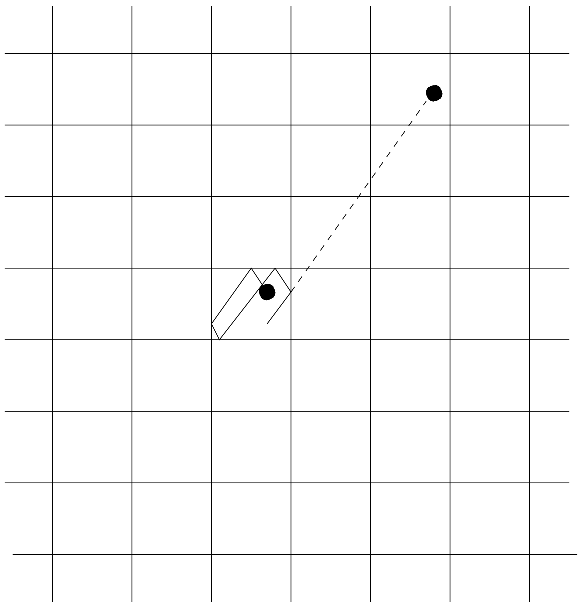
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \geq \frac{1}{2} 2\sqrt{x_n}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x_n}} = \sqrt{2},$$

che è quanto dovevamo provare. I precedenti argomenti dovrebbero farci intuire che le iterazioni convergono a $\sqrt{2}$, infatti l'algoritmo di Erone fornisce un metodo per approssimare questo numero irrazionale! Una dimostrazione rigorosa è un po' oltre lo scopo di questi esercizi, comunque concludiamo osservando che anche questo sistema è prevedibile. ∎

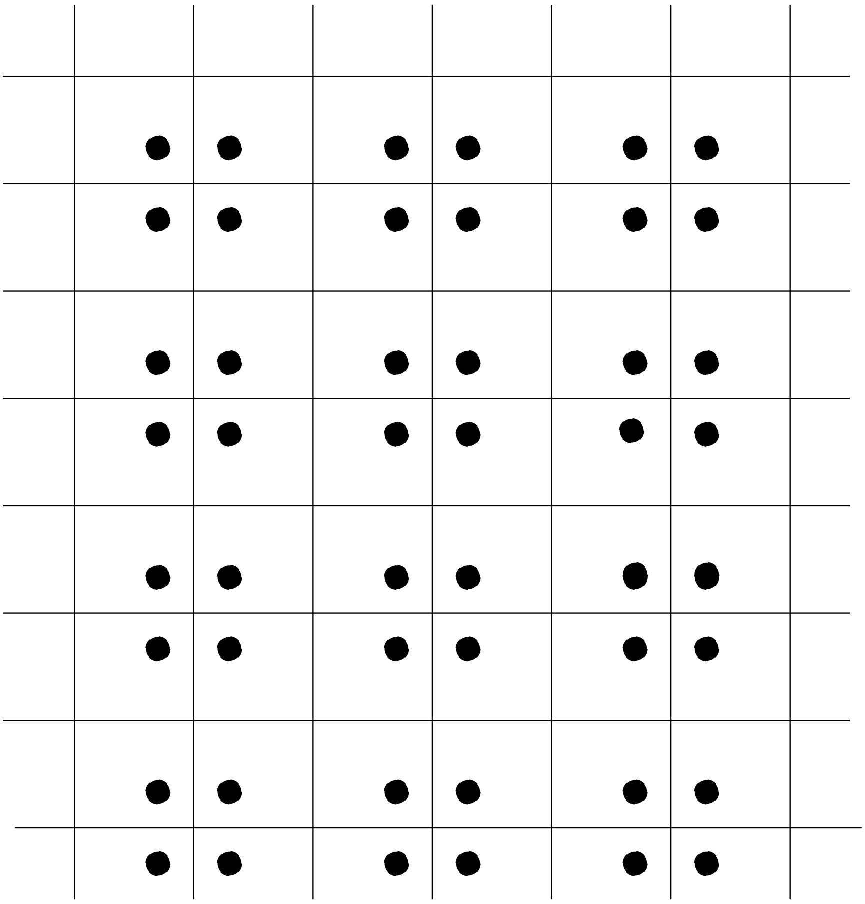
Esercizio 4. *Immaginiamo un biliardo un po' strano, perfettamente quadrato, e cosí perfetto che se lanciamo una palla questa continua a rimbalzare in eterno, finché non la fermiamo. La palla rimbalza seguendo la nota legge della riflessione: le traiettorie della palla prima e dopo il rimbalzo formano lo stesso angolo rispetto alla sponda. La palla una volta lanciata procede sempre alla stessa velocità e in linea retta (fra rimbalzo e rimbalzo).*
– Dare qualche esempio di traiettorie periodiche. Una traiettoria è periodica se succede quanto segue: trascorso un certo tempo T dal lancio, la palla ripassa per il punto iniziale muovendosi esattamente nella stessa direzione. Quindi, da quel momento in poi, ripercorre

la traiettoria gia' fatta, infinite volte.
– Dare un esempio di traiettoria NON periodica.
– Lanciamo la palla dal centro del biliardo. E' possibile lanciarla in modo che non ripassi mai dal centro?
– Appoggiamo un birillo in un punto qualunque del biliardo. Chiaramente possiamo lanciare la palla lungo una traiettoria periodica in modo da non urtare mai il birillo (vero?). Invece, se lanciamo la palla lungo una traiettoria non periodica qualunque, allora, prima o poi, il birillo cadra'... Perché?
– Ora sapete tutto dei biliardi, quindi potete rispondere alla domanda fondamentale: qual è la natura di questo sistema?

Soluzione. La traiettoria periodica più semplice è quella in cui la palla continua a rimbalzare da una sponda a quella di fronte, ad angolo retto. Visualizzare le altre è un po' meno semplice. Per riuscirci ricorriamo ad un piccolo trucco. Immaginiamo che accanto al nostro biliardo ve ne siano infiniti altri, lato contro lato: pensate ad un foglio a quadretti infinito in cui ogni quadretto, ad esempio di lato uno, rappresenta un biliardo. Il trucco è il seguente: se disegnate una retta su questo foglio a quadretti, ad essa corrisponde esattamente una traiettoria dentro il biliardo di partenza! Cerchiamo di capire meglio. Lanciamo la palla dentro il biliardo; quando tocca la sponda, immaginiamo che invece di rimbalzare la palla buchi e attraversi la sponda. La traiettoria che rimbalza e quella che attraversa sono speculari (pensate proprio ad uno specchio posto lungo la sponda, la traiettoria che attraversa è quella dell'immagine della palla nello specchio); continuiamo a percorrerle in contemporanea. Ad un certo punto la palla vera incontra un'altra sponda; esattamente nello stesso momento la palla immagine incontra la sponda immagine nello specchio. E cosí via.



Molto piú semplice: invece di disegnare complicati rimbalzi basta tracciare una retta su un foglio a quadretti! Cosa diventa una traiettoria periodica nella nuova rappresentazione? Basta osservare che ad una posizione della palla corrispondono infinite posizioni speculari



e se una linea retta unisce due di tali immagini speculari, la traiettoria corrispondente è periodica. Abbiamo adesso un procedimento semplicissimo per disegnare tutte le traiettorie periodiche possibili a partire da una certa posizione iniziale della palla: disegnamo le infinite immagini speculari, scegliamone due qualsiasi, uniamole con un segmento, consideriamo la traiettoria corrispondente, et voilà.

Il trucco precedente ci permette di rispondere anche alle altre domande. Per ottenere una traiettoria NON periodica, basta fare in modo che la retta eviti tutte le immagini speculari della posizione iniziale. Come si può fare? Il modo più semplice è il seguente: come posizione iniziale prendiamo il centro del quadrato (quindi le immagini sono tutti i centri di tutti i quadretti), e poi disegnamo la retta passante per il centro di coefficiente angolare $\sqrt{2}$. Questa retta non può passare mai più per il centro di un altro quadratino. Infatti se passasse per il centro di due quadratini diversi, separati di n caselle in orizzontale e di m caselle in verticale, si dovrebbe avere $\sqrt{2} = m/n$ (perché?) e questo è impossibile. Questo esempio risponde anche alla domanda seguente, che in effetti è la stessa formulata in modo diverso.

La domanda relativa al birillo è piú difficile, e non è formulata in modo completamente rigoroso (ma lo scopo dell'esercizio è di far venire delle idee, non di eliminarle...). Si deve dimostrare che se la palla segue una traiettoria non periodica, allora, fissato un punto nel biliardo, se si ha abbastanza pazienza la palla passerà *sempre piú vicino* al punto fissato. Ossia, dopo mezz'ora passerà a meno di un millimetro; magari dopo 10 ore passerà a meno di un decimo di millimetro; e magari ci vorrà un anno, ma prima o poi passerà a meno di un micron da quel punto; eccetera. Questo non esclude che la palla possa passare proprio *sopra* quel punto; ma in generale di questo non possiamo essere sicuri (pensate all'esempio della palla che non passa mai piú per il centro), mentre che passi vicino sí.

Ma come si dimostra? Per semplicità scegliamo la traiettoria vista sopra (quella con la radice di 2) e come punto scegliamo un punto qualunque della sponda inferiore. Ogni volta che la retta sul foglio a quadretti taglia uno dei lati orizzontali, la palla rimbalza sulla sponda inferiore o su quella superiore, alternativamente. Le ascisse di questi punti si calcolano in modo molto semplice: la retta taglia la prima linea in un punto di ascissa $\sqrt{2}$, la seconda in un punto di ascissa $2\sqrt{2}$,..., dopo n tagli siamo all'ascissa $n\sqrt{2}$; e le posizioni corrispondenti della palla quando rimbalza sulla sponda inferiore o superiore si ottengono buttando via la parte intera (a sinistra della virgola) e tenendo solo la parte decimale (ossia: da $13,35267$... otteniamo $0,35267$...). Dato che i tagli corrispondono una volta alla sponda inferiore e una volta a quella superiore, a noi interessano solo gli n pari ossia $n = 2k$. Conclusione: i punti dove la palla rimbalza sulla sponda inferiore hanno ascisse

$$\{2k\sqrt{2}\}, \qquad k = 0, 1, 2, 3 \ldots;$$

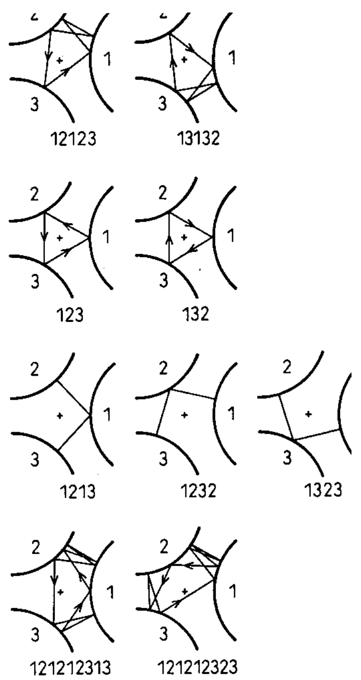
qui $\{x\}$ indica la parte decimale del numero x.

Ora stiamo cercando di dimostrare che se c'è un birillo in una certa posizione fissata p fra 0 e 1, la palla fa dei rimbalzi sempre piú vicini a p; in altri termini, man mano che passa il tempo i punti di rimbalzo si distribuiscono su tutto l'intervallo e piano piano si infittiscono senza lasciare nessun intervallino scoperto. In altri termini, all'aumentare di k i numeri $\{2k\sqrt{2}\}$ si distribuiscono uniformemente sull'intervallo tra 0 e 1. Questa proprietà è chiaramente falsa se al posto di $2\sqrt{2}$ mettiamo un numero razionale n/m: infatti i numeri $k \cdot n/m$ assumono soltanto un numero finito di valori. Invece se usiamo un numero *irrazionale* come $2\sqrt{2}$ la distribuzione è uniforme. Dimostrare questo fatto in modo preciso è abbastanza facile ma richiede un po' di dimestichezza con le manipolazioni algebriche e i numeri reali; se vi interessa, e non ci riuscite da soli, non avete che da frequentare il primo semestre dei corsi di Matematica...... ☺. ■

Esercizio 5. *Dopo il biliardo ideale, il flipper ideale. Il nostro flipper teorico è fatto da tre dischi di raggio 1 centimetro, posti ai vertici di un triangolo equilatero di lato 6 centimetri. Lanciamo una biglia fra i dischi, e supponiamo come al solito che la biglia continui a muoversi senza attrito rimbalzando secondo la solita legge della riflessione.*
– Determinare la natura di questo sistema.
– Cosa succede se si elimina un disco e se ne lasciano solo due?

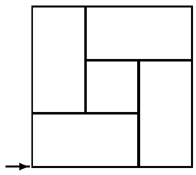
Soluzione. Pensiamo prima al biliardo semplificato formato soltanto da due dischi. Immaginiamo i due dischi 1 e 2 nel piano cartesiano, appoggiati sull'asse delle x, e lanciamo la biglia partendo da un punto qualunque del semipiano inferiore, verso uno dei dischi, ad esempio verso 1. È facile rendersi conto che non vi sono molte possibilità differenti. La biglia può rimbalzare un certo numero di volte fra le due biglie, ma alla fine o esce verso l'alto o esce verso il basso. Queste situazioni comprendono anche il caso che la biglia rimbalzi una sola volta sulla prima biglia e non colpisca mai la seconda. Notare che c'è una traiettoria *intrappolata*: la biglia rimbalza fra 1 e 2 muovendosi sempre lungo la retta che unisce i centri dei due dischi. Se ci spostiamo di pochissimo da quella retta è chiaro che possiamo ottenere traiettorie anche con moltissimi rimbalzi, ma i rimbalzi successivi continuano a spostarsi pian piano in una stessa direzione (verso l'alto o verso il basso) e alla fine la biglia sfugge. In altri termini, le traiettorie possibili appartengono a un paio di classi ben definite (più il caso degenere intrappolato), tutte con lo stesso comportamento e il sistema, anche se abbastanza complicato, non è caotico. (Domanda piuttosto difficile: riuscite a immaginare altre traiettorie intrappolate? ce ne possono essere o no?)

Con tre dischi 1,2,3 abbiamo invece un sistema caotico. Anzitutto abbiamo molte più traiettorie intrappolate (periodiche). Alcune sono facili da vedere: ad esempio la biglia può rimbalzare tra 1 e 2 ignorando il terzo disco. Ma ci sono infinite traiettorie periodiche in cui la biglia continua a rimbalzare fra i tre dischi, anche se non sono tanto facili da visualizzare:



eccetera. Siete riusciti a immaginare almeno le traiettorie disegnate nella seconda e nella terza riga? Spostandoci di pochissimo da una traiettoria periodica, otteniamo traiettorie di complessità arbitrariamente grande, con un numero arbitrariamente grande di rimbalzi prima che la biglia sfugga fuori dalla zona dei tre dischi, che "riempiono" lo spazio fra i dischi in modo (apparentemente) disordinato. Volendo, e con un po' di matematica, si potrebbe quantificare in modo preciso queste considerazioni; ma lo scopo dell'esercizio era soltanto di mostrare come in un sistema semplice, regolato da leggi elementari, si possono nascondere comportamenti caotici imprevisti. ∎

Esercizio 6. *Ciccio (l'aiutante di nonna Papera) decide di fare del jogging per dimagrire un po'. Si dirige in un parco che ha questa pianta lungo il verso della freccia, che indica l'unica entrata/uscita del parco.*



Ciccio decide di correre seguendo queste regole: di fronte ad un bivio lancia una moneta e va a destra se e soltanto se esce testa, smette e torna a casa solo se imbocca l'uscita. Rispondi alle seguenti questioni
– Che lanci permettono di fare il percorso più breve?
– Sapendo che il lato del parco è di 300 m, quanto misura il percorso più lungo che può capitare a Ciccio?
– Quanti percorsi esistono?
– Scrivere almeno due serie di lanci che permettono a Ciccio di uscire dal parco.
– Spiega che tipo di sistema è questo.

Soluzione. Chiariamo subito che Ciccio entra nel parco seguendo il verso e la direzione della freccia che indica l'ingresso, quindi all'inizio non deve tirare la sua moneta. Il percorso più breve è chiaramente quello in cui Ciccio fa un giro lungo il rettangolo più piccolo che ha un vertice coincidente con l'entrata, la successione di tiri che gli permette di compiere il tragitto è 4 volte croce e 1 volta testa.

Il percorso più lungo che può capitare al nostro amico ha una lunghezza infinita, infatti Ciccio può (se molto sfortunato) girare in tondo intorno al quadrato interno correndo in eterno! Questa osservazione chiarisce anche il fatto che esistono infiniti percorsi (è possibile costruire un tragitto con un numero assegnato di giri sul quadrato interno) e che questo sistema è di tipo stocastico, visto che non è possibile azzardare alcuna previsione, a causa dell'elemento casuale legato al lancio della moneta. ■

Esercizio 7. *Prova a capire il carattere dei seguenti sistemi*
– Il gioco degli scacchi.
– Il moto di una palla sparata da un cannone.
– La variazione delle condizioni atmosferiche.
– Il moto dei pianeti del sistema solare.
– Le estrazioni del superenalotto.

Soluzione. Questo esercizio è chiaramente diverso dagli altri, ma può servire a chiarirsi le idee. Il moto di una palla di cannone è un sistema prevedibile, il moto è descritto da una parabola e tutto è decisamente semplice da calcolare.

I sistemi complessi o caotici sono il moto dei pianeti e le condizioni atmosferiche: entrambi i sistemi obbediscono a delle leggi fisiche ben precise, l'interazione dell'enorme numero di leggi e di osservazioni di cui bisogna tener conto rende imprevedibile l'evoluzione del sistema per tempi lunghi e rende difficile far previsioni certe.

Il gioco degli scacchi ed il superenalotto sono sistemi stocastici: in entrambe le situazioni abbiamo a che fare con un dato (la volontà del giocatore o il caso) che non rende possibile alcun tipo di previsione, anche per tempi molto brevi!

■

Esercizio 8. *Consideriamo l'insieme $K = [0, 1]$ dei numeri reali compresi tra 0 e 1 e pensiamoli nel loro sviluppo decimale infinito, cioè*

$$\frac{1}{2} = 0.50000\dots \quad \frac{1}{3} = 0.33333\dots \quad (\sqrt{2} - 1) = 0.41421356237\dots$$

Costruiamo un sistema di iterazioni nel seguente modo: preso un elemento di K spostiamo tutti i numeri dopo la virgola di un posto a sinistra buttando via la cifra dei decimi. Rispondere alle seguenti domande.
– Il numero ottenuto appartiene a K?
– Esistono numeri che rimangono inalterati dell'operazione?
– Esistono delle orbite di periodo qualsiasi?
– Quante orbite periodiche esistono?
– Quante orbite di periodo due esistono? Scriverne almeno due.
– Cosa succede partendo da $(\pi - 3)$?

Soluzione. Prima di cominciare osserviamo come si comporta l'iterazione in un caso particolare, al fine di chiarirci le idee:

$$0.1234567\cdots \to 0.234567\cdots \to 0.34567\cdots \to 0.4567\dots$$

l'esempio dovrebbe chiarire subito che il meccanismo con cui generiamo nuovi numeri fa sì che ogni iterazione produce sicuramente un numero compreso tra 0 e 1, cioè appartenente all'insieme K, il che risponde alla prima domanda.

Esibiamo subito un numero che resta inalterato se sottoposto al trattamento

$$1/3 = 0.\overline{3} = 0.33333\cdots \to 0.33333\cdots = 1/3,$$

questo mostra che ci sono numeri che restano fermi nel meccanismo (prova a dire quanti e quali sono).

Prima di rispondere alle altre domande dobbiamo fare dei chiarimenti: per orbita periodica intendiamo che un numero attraverso l'operazione diventa un altro, e poi un altro e via dicendo, però dopo un certo numero di iterazioni ci ritroviamo con il numero di partenza! Con questa precisazione tutto diventa chiaro per esempio un'orbita di due passaggi è la seguente

$$31/99 = 0.\overline{31}\cdots \to 0.\overline{13}\cdots = 13/99\cdots \to 0.\overline{31}\cdots = 31/99,$$

in questo modo è chiaro che, sapendo convertire frazioni periodiche in numeri decimali e viceversa, possiamo produrre un numero infinito di orbite di periodo qualsiasi! Il numero delle orbite di periodo due (cioè che tornano al numero iniziale con due soli passaggi) è il numero delle possibili coppie di cifre (cioè i simboli $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$) distinte, ovvero 90! Una possibile orbita di periodo due è scritta qualche riga più su.

L'ultima osservazione è legata al comportamento del numero $(\pi-3)$, scriviamo i primi passaggi

$$0.14159265\cdots \to 0.41592653\cdots \to 0.15926536\cdots \to \dots,$$

è noto (ma difficle da dimostrare!) che π, come altri numeri, hanno una struttura decimale illimitata non periodica, questo significa che le iterazioni generate dal nostro numero saltano a destra e sinistra senza mostrare un comportamento preciso, né generare orbite... chiaramente questo meccanismo non produce un sistema semplice, però il comportamento non è totalmente imprevedibile, visto che è tutto determinato dalla scelta del numero iniziale! La conclusione è che questo un sistema caotico. ■

Gli esempi precedenti sono un po' artificiali e potrebbero sembrare lontani dalla realtà. Al contrario, i sistemi caotici sono molto comuni e in un certo senso i tipici fenomeni naturali. Pensate ad esempio al moto dei gas (l'aria che ci circonda) o in generale dei fluidi (il mare, una stella, un cappuccino). Alla scala microscopica i fenomeni sono elementari: una buona approssimazione è immaginare le particelle del fluido come palline che urtano fra di loro. Alla scala macroscopica questa descrizione è insufficiente: è impossibile descrivere con precisione per piú di qualche istante il moto turbolento di un gas, o prevedere con precisione il tempo che farà fra qualche giorno. Leggi semplicissime generano fenomeni di estrema complessità e in pratica impredicibili.

Tuttavia i sistemi caotici non perdono la doppia natura di ordine/caos che li contraddistingue. In mezzo al caos "apparente" può riapparire l'ordine, e gli esempi sono tanti e talvolta spettacolari: il gorgo dell'acqua che scorre via dalla vasca, o i vortici che si formano nella scia di una barca, turbolenti ma spaziati con regolarità; gli anelli di fumo; la macchia rossa di Giove, stabile da (almeno) trecento anni in un'atmosfera spazzata da venti che soffiano a centinaia di chilometri orari; le macchie del mantello di un leopardo. Forse l'esempio piú bello è fornito dall'evoluzione naturale, che ha prodotto forme di vita sempre piú complesse fino ad arrivare al pensiero astratto di noi esseri umani...

3. La mappa logistica

A questo punto siamo pronti per spiccare un balzo e salire decisamente di tono! Senza indugio introduciamo il seguente sistema di iterazioni che viene comunemente detto *m*appa logistica

$$\begin{cases} x_{n+1} = \lambda x_n(1-x_n) \\ x_0 = 1/5 \end{cases} .$$

Questa legge ha una lunga storia: fu proposta nel 1845 da P.F. Verhulst come modello matematico per lo studio dei fenomeni di crescita delle popolazioni biologiche. Ben presto rivelò aspetti matematici sorprendenti che stiamo per incontrare... con questo esempio poggiamo il piede su di un campo minato, in cui è possibile incontrare una varietà inaspettata di fenomeni.

La cosa notevole del sistema precedente è che, nonostante l'aspetto semplice, esso è un sistema caotico, infatti variando il parametro λ si ottengono dinamiche totalmente differenti, come si può provare svolgendo il seguente esercizio.

Esercizio 9. *Scrivi (ovviamente usando un calcolatore!) le prime* 50 *iterazioni che genera la legge logistica considerando per il parametro* λ *i valori* $1, 2, 3, 3.25, 3.5, 3.75, 4, 4.25$. *Prova a rappresentarli graficamente.*

Naturalment, per non esagerare, non inseriremo lo svolgimento di questo esercizio...

E' possibile (ma decisamente oltre le nostre possibilità) dimostrare che se $\lambda \leq 3$ il comportamento è relativamente semplice, mentre se $3 < \lambda < 4$ la dinamica cresce di complessità creando comportamenti periodici di periodo arbitrariamente grande, infatti esistono infinite soglie λ_n che mutano il comportamento delle iterate del nostro sistema. Tutte questi valori sono legati ad una costante $\delta \simeq 4.66920161\ldots$ chiamata *numero di Feigenbaum*, tutte le applicazioni di secondo grado che generano fenomeni caotici sono legate al numero δ! Come abbiamo detto nell'introduzione il caos non è assenza di ordine, ma più correttamente un ordine di complessità maggiore!

Anche se la matematica di questi fenomeni è molto difficile possiamo provare a fare qualche conto tra i più semplici...

Esercizio 10. *Rispondere alle seguenti questioni – Provare che se* $\lambda = 1$ *allora* $x_{n+1} \leq x_n$,

– *Provare che se* $\lambda = 2$ *allora* $x_{n+1} \geq x_n$.
– *Quali sono i numeri reali per cui vale che* $x_n = x_{n+1}$?

Soluzione. Cominciamo a rispondere alle tre questioni andando per ordine. Osserviamo subito che $x(1-x) = x - x^2 \leq x$ per qualsiasi valore della x, da cui segue la prima affermazione.

Quando $\lambda = 2$ è facile provare che $2x(1-x) \geq x$ se e soltanto se $0 < x < 1/2$, inoltre vale anche $2x(1-x) \leq 1/2$ per ogni x. Poiché partiamo dal valore $1/5$ e non possiamo andare oltre $1/2$ le iterazioni crescono, come dovevamo dimostrare.

L'ultima relazione è molto semplice, si tratta di risolvere l'equazione algebrica di secondo grado $x = \lambda x(1-x)$, cioè $x(\lambda x + (1-\lambda)) = 0$, da cui la risposta $x_1 = 0$ e $x_2 = (\lambda - 1)/\lambda$. ■

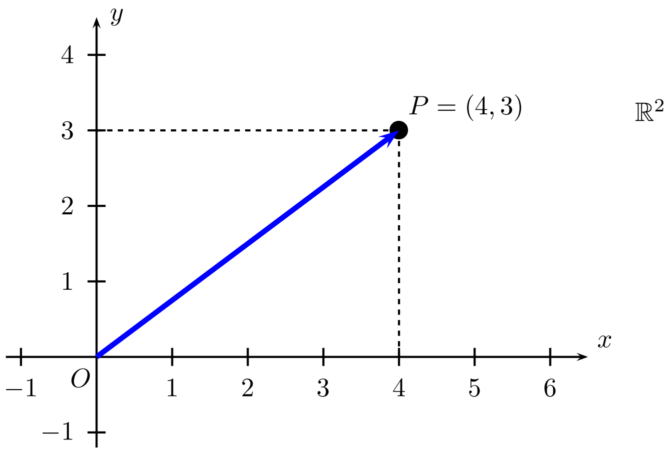
4. Complessità complessa...

Per finire alla grande introduciamo un insieme di numeri più grande dei reali, cioè l'insieme numerico dei numeri complessi

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$$

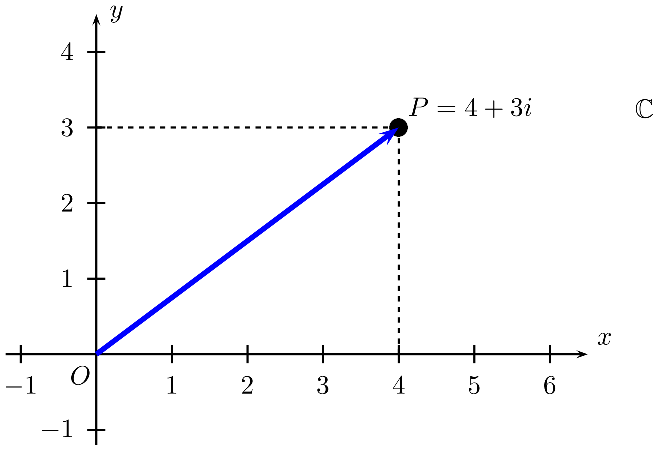
dove i è la mitica *radice quadrata di* -1. Di cosa stiamo parlando esattamente? Niente paura, $\mathbb{C}$ non è nient'altro che il piano cartesiano, che noi matematici preferiamo indicare con $\mathbb{R}^2$. O quasi... gli elementi di $\mathbb{C}$ e di $\mathbb{R}^2$ sono proprio gli stessi, cioè i punti del piano, però in $\mathbb{C}$ definiamo qualche operazione in piú. Vediamo di capirci qualcosa.

Intanto ricordiamo la ricetta: per fare un piano cartesiano basta prendere un piano, disegnarci sopra due rette perpendicolari che si tagliano in un punto O che chiamiamo l'origine, e il gioco è fatto. Ad ogni punto P del piano adesso corrisponde una coppia di numeri (x, y) che si chiamano l'*ascissa* e l'*ordinata* di P:



Di solito per vedere meglio il punto P si disegna una freccia che va dall'origine a P (e che si chiama un *vettore*).

I punti di $\mathbb{C}$ sono esattamente gli stessi; semplicemente, invece di scrivere $(4, 3)$ si scrive $4 + 3i$:



e in genere il punto (x, y) si scriverà $z = x + yi$ (o anche $x + iy$). Nel frattempo, per confondere le idee, diamo un secondo nome al piano cartesiano e lo chiamiamo *piano di Gauss* (niente paura, è esattamente lo stesso di prima).

Un fatto importante: per assegnare il punto P il modo piú semplice naturalmente è dare le sue coordinate e scrivere $P = 4 + 3i$. Ma possiamo anche procedere diversamente: possiamo dare la lunghezza della freccia, che per il Teorema di Pitagora in questo caso è

$$\sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

e l'angolo che la freccia fa con l'asse delle x, che in questo caso è di circa $37°$, o di $0,643...$ radianti per chi conosce i radianti. Naturalmente anche lunghezza e angolo della freccia individuano perfettamente il punto P. Ma a che scopo introdurre un modo più complicato per indicare la stessa cosa? un attimo di pazienza... Per adesso diciamo che la lunghezza della freccia si chiama il *modulo* del numero complesso, mentre l'angolo si chiama il suo *argomento*.

Il secondo passo è definire la *somma* e il *prodotto* di due numeri complessi. Le regole sono molto semplici: se abbiamo i due numeri complessi

$$z = a + bi, \qquad w = c + di$$

allora la somma si calcola cosí:

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

mentre il prodotto si calcola cosí:

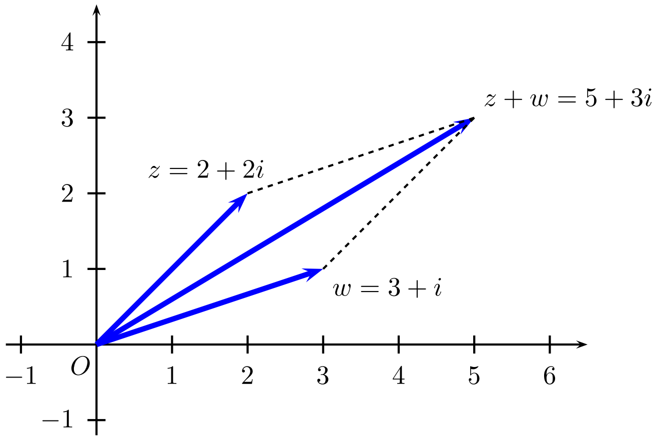
$$z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (bc + ad)i.$$

Sembra complicato? invece è facilissimo, basta ricordare la regola base

$$i^2 = -1$$

e poi eseguire tutte le operazioni come se niente fosse.

E' molto facile "vedere" la somma di due numeri complessi utilizzando le frecce:

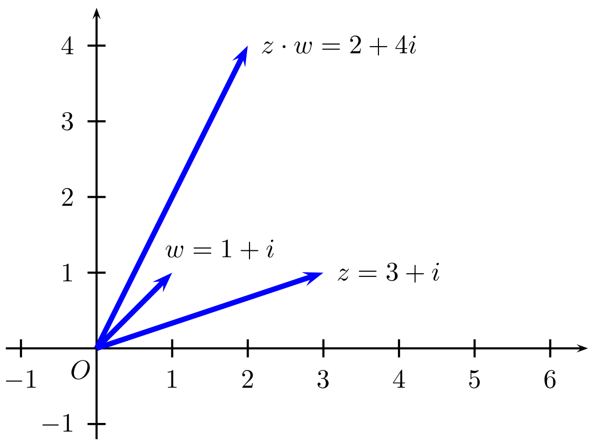


Chiaro? si disegnano la parallela a w passante per z, la parallela a z passante per w, e nel punto di intersezione c'è $z + w$.

Anche il prodotto $z \cdot w$ si può vedere, anche se in un modo un po' diverso, e qui entrano in gioco modulo e argomento che abbiamo introdotto prima. Ad esempio se $z = 1 + i$ e $w = 3 + i$, il loro prodotto si calcola subito:

$$z \cdot w = (1 + i) \cdot (3 + i) = 3 + 3i + i + i^2 = 2 + 4i.$$

Se disegnamo le frecce corrispondenti, a prima vista il grafico non è molto illuminante:



Ma attenzione: la regola è semplicissima. Il modulo di $z \cdot w$ è semplicemente il prodotto dei moduli di z e di w; l'argomento di $z \cdot w$ è la somma degli argomenti di z e w. Quindi, se vogliamo disegnare la freccia $z \cdot w$ senza eseguire la moltiplicazione, basta fare così: sommiamo gli angoli delle due frecce da moltiplicare, e in questo modo otteniamo l'angolo della freccia prodotto. Per saperne la lunghezza, invece, basta calcolare (all'incirca) il prodotto delle lunghezze delle frecce da moltiplicare.

Queste proprietà sono molto semplici, anche se nascondono un po' di trigonometria... ma non abbiamo tempo di soffermarci troppo!

Piuttosto, facciamo un po' di pratica.

Esercizio 11. *Quanto valgono modulo e argomento del numero i? Come si può descrivere geometricamente la moltiplicazione per i? ossia, se prendiamo un numero complesso z e disegnamo la freccia corrispondente, com'è fatta la freccia di $z \cdot i$?*

Soluzione: il numero i ha coordinate $(0, 1)$ (sta sull'asse delle y) e quindi ha modulo 1, mentre il suo argomento è $90°$ il che in radianti vuol dire $\pi/2$. Se moltiplichiamo un numero z per i, il modulo non cambia perché moltiplichiamo per 1; invece l'argomento aumenta di $90°$, e quindi in conclusione moltplicare z per i vuol dire ruotare la freccia che rappresenta z di $90°$ in senso orario.

Esercizio 12. *Fissato un numero complesso w, considerate una iterazione definita nel modo seguente:*

$$\begin{cases} z_{n+1} = i \cdot z_n \\ z_0 = w. \end{cases}$$

Procedete graficamente: scegliete un punto w del piano (a caso) e disegnate i primi cinque termini della successione z_n. Come si comporta la successione z_n? Il comportamento cambia scegliendo un punto di partenza diverso?

Che succede se si modifica l'iterazione e si considera invece

$$\begin{cases} z_{n+1} = 2i \cdot z_n \\ z_0 = w \end{cases}$$

sempre con w arbitrario?

Soluzione. la prima iterazione continua a ruotare la freccia di w di $90°$ in senso orario ad ogni passo (vedi esercizio precedente). Quindi dopo quattro passi siamo di nuovo al punto w di partenza e il comportamento è periodico, e il sistema è di tipo semplice.

Anche nel secondo sistema la freccia di w viene ruotata di $90°$ in senso orario ad ogni passo, solo che viene anche moltiplicata per due cioè la sua lunghezza raddoppia ad ogni passo. Quindi i punti z_n si allontanano sempre di piú dall'origine, e anche in modo molto veloce. In questo caso si dice che la successione *tende all'infinito*; il sistema è di tipo semplice. ∎

Esercizio 13. *Disegnare nel piano complesso (cioè $\mathbb{C}$) il punto $z = 2 + i$. Provare a disegnare il numero $z^2 = z \cdot z$ con il metodo grafico, poi calcolarlo e controllare. Fare la stessa cosa con il numero $z^3 = z \cdot z^2$; poi con il numero $z^4 = z \cdot z^3$. Siete ancora dentro il foglio di carta? Sapete prevedere il comportamento di questa successione di numeri complessi $z^5, z^6, z^7, z^8, z^9, \dots$?*

E se invece partiamo dal numero $z = i$ che succede? e se partiamo dal numero $z = 0$ (l'origine)? e se partiamo dal numero $z = \frac{1}{2}i$?

Soluzione. Se consideriamo le potenze successive di $z = 2 + i$ otteniamo successivamente

$$z^2 = 3 + 4i, \quad z^3 = 2 + 11i, \quad z^4 = -7 + 24i, \quad z^5 = -38 + 41i, \dots$$

e il comportamento è abbastanza chiaro: dato che z ha modulo 5, chiaramente i moduli di $z^2, z^3 \dots$ sono $5^2, 5^3 \dots$ e quindi anche in questo caso la successione tende all'infinito molto velocemente. Le frecce ruotano ad ogni passo ma le loro lunghezze crescono molto velocemente.

La stessa iterazione applicata ad un numero di modulo 1, ad esempio $z = i$ dà una successione di frecce che ruotano ma hanno sempre modulo 1; quindi le potenze $z^1, z^2, z^3, \dots$ sono tutte sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

Infine se partiamo da un numero di modulo minore di 1, ad esempio $\frac{1}{2}i$, otteniamo una successione di numeri di modulo sempre piú piccolo: ad esempio da $z = \frac{1}{2}i$ abbiamo che z^2 ha modulo $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$, z^3 ha modulo $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ eccetera. Questo vuol dire che le frecce (ruotano ma) sono sempre piú corte e i punti della successione si avvicinano sempre di piú all'origine: si dice che la successione *converge a 0*. ∎

Esercizio 14. *Domanda piú difficile. Dovrebbe essere chiaro che, a seconda del punto di partenza z, il comportamento della successione delle potenze*

$$z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6, z^7, z^8, z^9, \ldots$$

studiata sopra può essere molto diverso. In alcuni casi la successione si avvicina sempre di piú all'origine, in altri si allontana ed esce dal foglio, in altri continua a girare in tondo... Sapete classificare tutti i punti del piano complesso a seconda del loro comportamento? ad esempio, sapete disegnare l'insieme degli z che escono dal foglio?

Soluzione. dopo la discussione dell'esercizio precedente, dovrebbe essere chiaro che tutto dipende dal modulo del numero di partenza. Se si parte da un punto sulla circonferenza di centro 0 e raggio 1, cioè un punto di modulo 1, si resta sempre sulla circonferenza, continuando a ruotare ad ogni passo; se si parte da un punto esterno alla circonferenza si ottiene una successione che molto rapidamente esce dal foglio e tende all'infinito; e se invece si parte da un punto interno alla circonferenza, molto velocemente i punti si avvicinano all'origine e la successione tende a 0. ■

Se avete svolto gli esercizi precedenti siete pronti per apprezzare l'ultimo esempio. Vediamo come da una iterazione molto semplice può saltar fuori un insieme di enorme complessità. Fissiamo un numero complesso $c \in \mathbb{C}$ e consideriamo il sistema seguente:

$$\begin{cases} z_{n+1} = z_n^2 + c \\ z_0 = 0. \end{cases}$$

Notate che la successione parte sempre da 0, ma il suo comportamento dipende da c. I primi termini della successione si possono scrivere subito:

$$0, \quad c, \quad c^2 + c, \quad (c^2 + c)^2 + c, \ldots$$

eccetera. Il procedimento è molto semplice; ma riuscite a prevedere come si comporta questa successione? esce dal foglio o no?

Un primo esercizio facile per verificare che i comportamenti possono essere molto diversi:

Esercizio 15. *Studiare la successione precedente quando il parametro c è uguale a 0. Stesso esercizio per $c = i$. Stesso esercizio per $c = 2$.*

Soluzione. quando $c = 0$ i termini della successione sono

$$0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \ldots$$

ossia sono tutti nulli! Abbiamo quella che si chiama una successione *costante*, e il suo comportamento è il piú semplice di tutti... Sicuramente questa successione resta limitata e non va all'infinito.

Quando $c = i$ otteniamo

$$0, \quad i, \quad i-1, \quad -i, \quad i-1, \quad -i \quad , i-1, \quad -i, \ldots$$

e quindi la successione è periodica e resta limitata (non va all'infinito).

Quando $c = 2$ otteniamo

$$0, \quad 2, \quad 6, \quad 38, \quad 1446, \quad 2090918, \ldots$$

e il comportamento è molto chiaro: la successione va all'infinito velocemente. Naturalmente per essere completamente sicuri non basta calcolare un po' di termini ma bisogna capire che succede e trovare un motivo convincente; sapreste farlo?

■

Quindi in alcuni casi la successione resta limitata, in altri no ed esce dal foglio. Spero che sia chiaro che il parametro che produce confusione è c! Ma come si fa a capire quando siamo nel primo caso e quando siamo nel secondo?

Esercizio 16. *Dimostrare che se il modulo di c è maggiore di 3 allora la successione z_n non resta limitata.*

Soluzione. dobbiamo dimostrare che i moduli crescono sempre di piú. Introduciamo questa notazione: indichiamo il modulo del numero z (la lunghezza della freccia) con $|z|$. Ad esempio, possiamo dire che abbiamo scelto un parametro c con modulo $|c| > 3$. Notiamo un paio di proprietà che ci serviranno:

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

cioè il modulo del prodotto è il prodotto dei moduli; poi

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

e se ricordate il disegno che rappresenta la somma $z + w$ con le frecce, questa disuguaglianza dice semplicemente che le tre frecce z, w e $z + w$ sono i lati di un triangolo e quindi uno dei lati ha lunghezza minore della somma degli altri due. Infine abbiamo anche la relazione

$$|z + w| \geq |z| - |w|$$

e questa è solo un'altra forma della disuguaglianza precedente (basta prendere $z' = z + w$ e osservare che $|z' - w| \leq |z'| + |-w| = |z| + |w|$).

Siamo pronti per la dimostrazione. Il punto $z_1 = c$ chiaramente ha modulo maggiore o uguale a $|c|$ (anzi è proprio uguale). Anche il punto seguente $z_2 = c^2 + c = c(c + 1)$ ha modulo maggiore di $|c|$ perché

$$|z_2| = |c| \cdot |c + 1| \geq |c|(|c| - 1) \geq 2|c|.$$

Anche tutti i punti seguenti hanno modulo maggiore di $|c|$: infatti se siamo riusciti a dimostrarlo fino a z_n, vediamo subito che anche il punto successivo ha questa proprietà:

$$|z_{n+1}| \geq |z_n|^2 - |c| \geq |c|(|c| - 1) \geq 2|c|.$$

Quindi tutti gli z_n (da $n = 1$ in poi) verificano $|z_n| \geq |c|$. Ma allora vediamo subito che questa successione tende all'infinito. Infatti (essendo $|c| \geq 3$)

$$|z_{n+1}| = |z_n^2 + c| \geq |c||z_n| - |c| \geq 2|z_n| + |c| - |c| \geq 2|z_n|$$

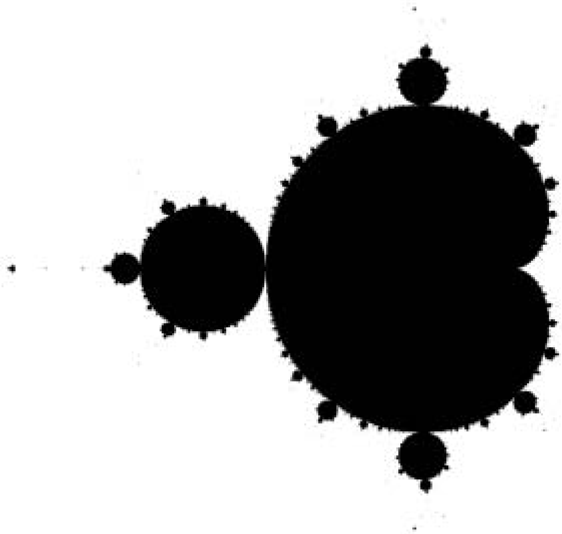
cioè ad ogni passo la successione aumenta piú del doppio! e inevitabilmente va all'infinito. ∎

Già qualcosa: abbiamo scoperto che i punti dell'insieme

$$M = \{c \in \mathbb{C} : z_n \text{ resta limitata}\}$$

hanno modulo minore o uguale a 3: abbiamo incastrato l'insieme M! Ma possiamo dire qualcosa di piú preciso?

Purtroppo, o per fortuna, la risposta è no... Infatti M è il famoso insieme di Mandelbrot! Per completezza includiamo una sua foto segnaletica...



La punta a sinistra si estende sull'asse delle x fino a -2, mentre la parte principale del corpo a destra non oltrepassa 0,5; in verticale l'insieme si estende da $y = -2$ a $y = 2$ (l'origine si trova dentro il corpo principale, un po' a destra rispetto alle due protuberanze in alto e in basso). L'area dell'insieme è di poco superiore a 1,5. Si tratta di un insieme di tipo *frattale*. Questo termine (di cui si può dare una definizione precisa) esprime il fenomeno per cui se si esamina la struttura dell'insieme a varie scale, ossia a "vari ingrandimenti", la struttura si rivela sempre molto simile. Anche se ingrandite l'insieme di Mandelbrot un trilione di volte, otterrete dei disegni dall'aspetto molto simile all'insieme di partenza.

Avrete forse visto dei disegni di M a piú colori; in quei disegni sono rappresentate con colore diverso le diverse velocità della successione z_n. Ossia, se la successione esce dal foglio dopo 1000 iterazioni il punto c si disegna di colore giallo; se esce dal foglio dopo 5000 iterazioni c si disegna arancione; e cosí via. In effetti quelli che si colorano sono i punti *fuori* dall'insieme di Mandelbrot, cioè i c per cui la successione esce dal foglio; il vero e proprio insieme di Mandelbrot è l'ombra nera e un po' inquietante che si staglia sullo sfondo colorato. Facilissimo trovare splendide immagini in rete.

Una comprensione dettagliata di questo tipo di fenomeni è ancora di là da venire. Per ora accontentiamoci di stupirci della complessità che si nasconde dietro leggi semplicissime...