ESERCIZI SU
SIMMETRIE E TRASFORMAZIONI NEL PIANO

STEFANO MARCHIAFAVA, GABRIELE MONDELLO

18 dicembre 2009

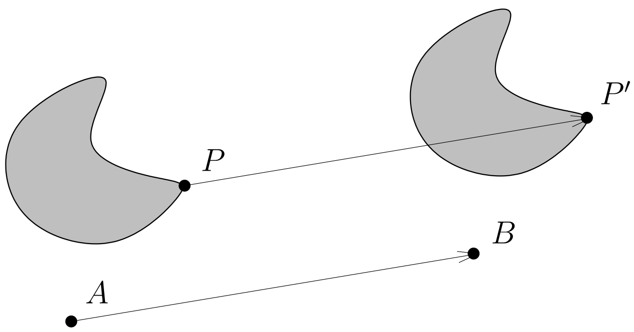
1. Trasformazioni

In generale, una applicazione tra insiemi X, Y è una corrispondenza $f : X \longrightarrow Y$ che associa ad ogni elemento x di X un elemento $y = f(x)$ di Y; y si dice l'**immagine** di x (tramite f). Si può anche dire che f è una **trasfomazione da** X **a** Y (oppure, di X in Y). Se Y coincide con X, $Y \equiv X$, si dice che f è una **trasformazione di** X **in sé** o, più semplicemente, una **trasformazione di** X.

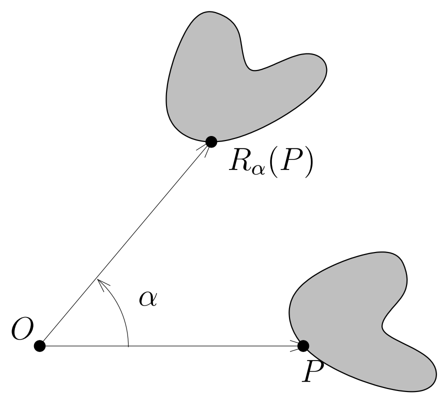
Qui appresso, salvo avviso contrario, considereremo solo trasformazioni del piano euclideo, indicato con $\mathbb{E}^2$.

Esempi di trasformazioni:

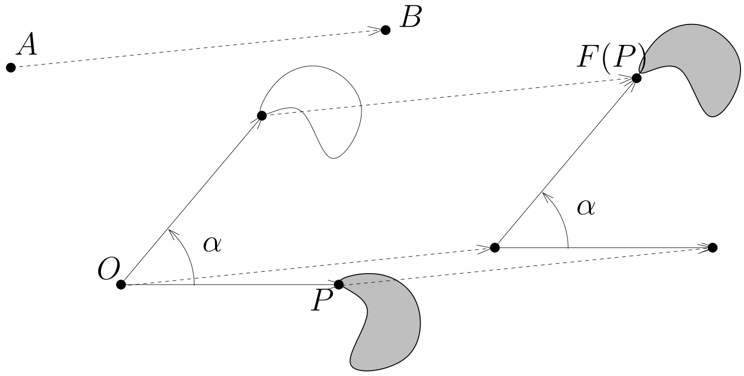
- Una **traslazione** $T : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ del piano euclideo $\mathbb{E}^2$ in sé, definita da un vettore applicato $\overrightarrow{AB}$: ad ogni punto P essa associa il punto $P' = T(P)$ tale che i vettori $\overrightarrow{PP'}, \overrightarrow{AB}$ sono equipollenti, ovvero hanno uguale direzione, verso e lunghezza.



- Una **rotazione** $R = R_\alpha$ **di un angolo** α **attorno ad un punto** O in un determinato verso (orario o antiorario).



- Una **rototraslazione** F, ottenuta eseguendo prima una rotazione di angolo α centrata in O e poi una traslazione di vettore $\overrightarrow{AB}$, è una trasformazione del piano euclideo.



Traslazioni, rotazioni, e rototraslazioni sono isometrie del piano euclideo, poiché conservano la lunghezza dei segmenti e la misura degli angoli.

È utile rendersi conto di alcune proprietà delle trasformazioni di un insieme X in sé stesso ed anzi, più in generale, delle applicazioni tra insiemi.

Una applicazione $f : X \to Y$ si dice **biunivoca** se ogni elemento y di Y è associato ad uno ed un solo elemento x di X, e quindi $f(x) = y$. L'applicazione $f^{-1} : Y \to X$ definita come $f^{-1}(y) = x$ è la **trasformazione inversa** di f.
Tutte le trasformazioni considerate in precedenza, traslazioni, rotazioni, rototraslazioni, sono applicazioni biunivoche.

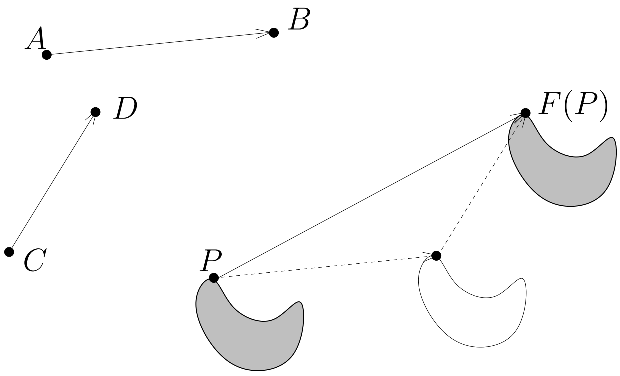
Esercizio A1.
- *È vero che la trasformazione T del piano euclideo ottenuta effettuando prima una traslazione di vettore $\overrightarrow{AB}$ e poi una rotazione di angolo α centrata in O è una traslazione oppure una rotazione? Se sì, determinare rispettivamente il corrispondente vettore di traslazione oppure il centro e l'angolo di rotazione.*
- *Chi è l'inversa di una rototraslazione F del piano euclideo ottenuta effettuando prima una rotazione centrata in O di angolo α e poi una traslazione di vettore $\overrightarrow{AB}$?*

Le trasformazioni di un insieme X in sé si possono sempre comporre, applicandole successivamente. Date due trasformazioni $S, T : X \to X$ la composizione, ovvero il **prodotto** ST è definito eseguendo successivamente T e poi S: per ogni elemento x di X,

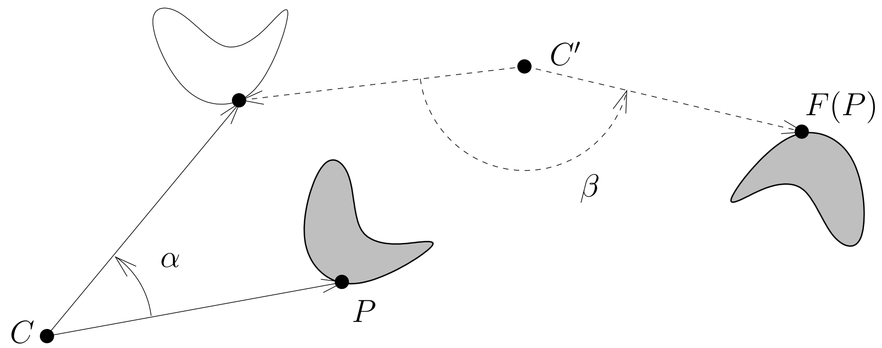
$$(ST)(x) \stackrel{def}{=} S(Tx) \quad .$$

Nel piano euclideo

- il prodotto F di due traslazioni (di vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$) è una traslazione;



- la composizione di due rotazioni (anche con centri diversi) è una isometria.



È utile, e quindi importante, rendersi conto della validità di certe **proprietà del prodotto di trasformazioni**. Per esempio, il prodotto di trasformazioni è **associativo**, cioè date tre trasformazioni T, S, U definite in X risulta

$$U(ST) = (US)T$$

e si può scrivere UST senza alcuna ambiguità.

Se $ST = TS$ si dice che le due trasformazioni **commutano**, ma ciò non avviene sempre.

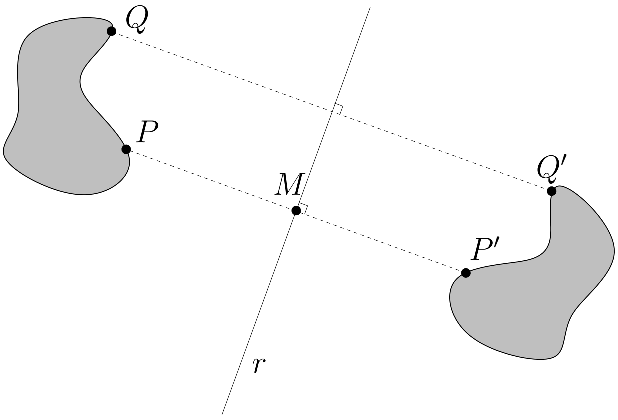
Esercizio B1. *Nei seguenti casi, dire quando le due trasformazioni indicate commutano:*

- *due traslazioni* T, T';
- *due rotazioni* R_α, R_β *attorno allo stesso punto* O;
- *una rotazione* R_α *e una traslazione* T;
- *due rotazioni* R_α, R'_β *attorno a punti* O, O' *diversi.*

2. Trasformazioni nel piano

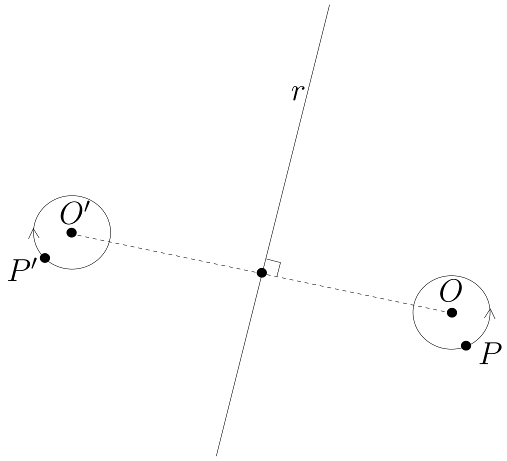
2.1. **Simmetrie ortogonali.** Una trasformazione elementare e fondamentale nel piano è la **simmetria ortogonale rispetto ad una retta** r [1] (quale quella che appare evidente nella figura qui appresso):

[1]Spesso si parla semplicemente di **simmetria rispetto ad una retta** r senza specificare altro, ma vedremo che in un contesto più generale tale specificazione può essere necessaria.

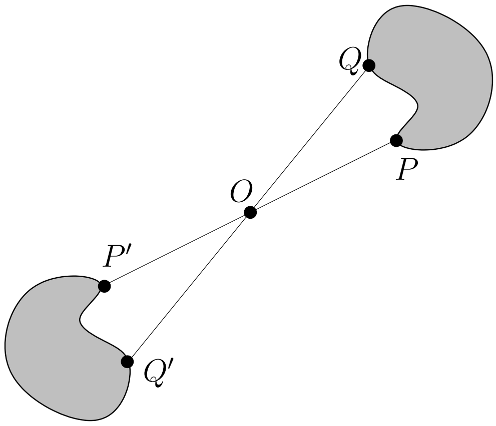


La simmetria ortogonale rispetto alla data retta r, detta **asse**, è la corrispondenza S che associa ad un punto P il punto P' che sta sulla perpendicolare da P a r e tale che il punto medio M del segmento PP' appartiene ad r ovvero, P' è il punto della perpendicolare da P a r che rispetto ad r stessa si trova nel semipiano opposto a quello cui appartiene P, alla stessa distanza di P da r.

Esercizio A2. *Verificare che la riflessione ortogonale S rispetto all'asse r è una isometria, che $S^2 = S \circ S = I$ e che S scambia le orientazioni del piano (cioè, se il punto P ruota attorno ad un punto O in un certo verso, ad es. orario, allora il corrispondente punto P' ruota nel verso opposto, ad es. antiorario, attorno al punto $O' = S(O)$.*



Una trasformazione elementare del piano è la **simmetria rispetto ad un punto** O, che associa ad ogni punto P il punto P' tale che O coincide con il punto medio del segmento PP'.



Esercizio B2. *Verificare che la composizione di due simmetrie ortogonali S, S' rispetto a corrispondenti rette r, r' ortogonali coincide con la simmetria rispetto al punto O intersezione delle due rette.*

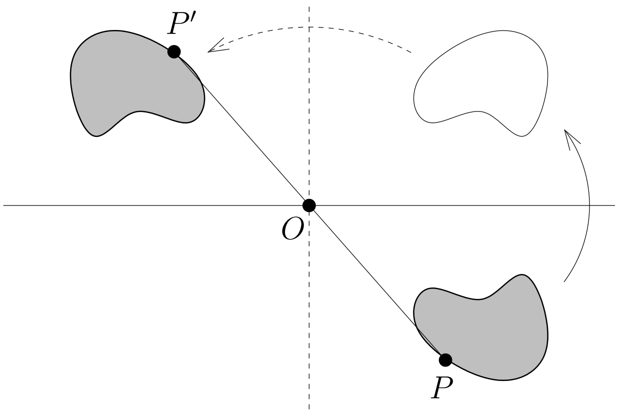
Esercizio B3. *Sia S una isometria del piano diversa dall'identità, $S \neq I$, che lascia fisso un punto O e ha quadrato uguale all'identità, ovvero $S^2 = I$. Dimostrare che S coincide con la simmetria rispetto al punto O oppure che S è una simmetria ortogonale.*

2.2. **Simmetrie ortogonali e isometrie del piano.** L'importanza delle simmetrie ortogonali per la geometria euclidea del piano sta nel fatto che **ogni isometria del piano euclideo stesso si può ottenere come composizione di simmetrie ortogonali**.

Esercizio A3. *Verificare che la traslazione T che porta il punto A in A' è prodotto di due simmetrie ortogonali.*

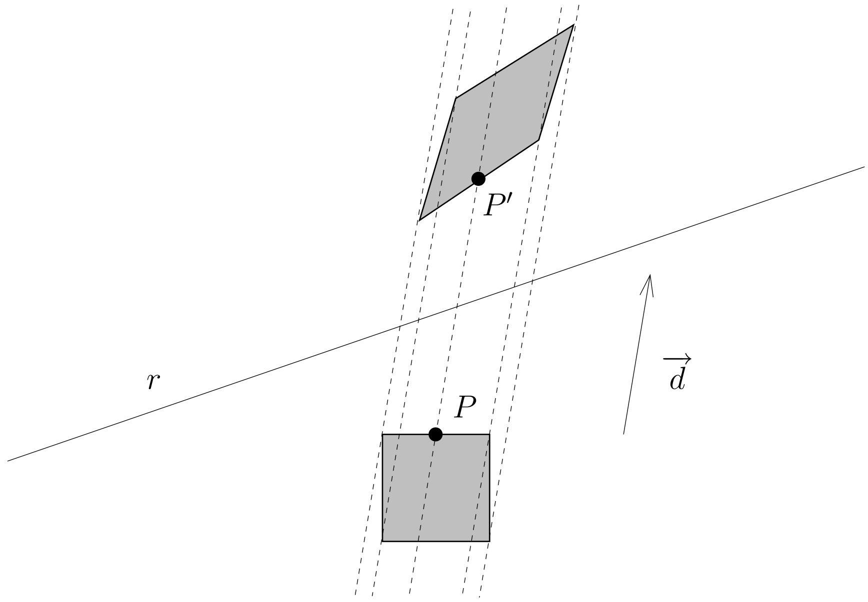
Esercizio A4. *Verificare che la rotazione $R = R_\alpha$ di angolo α attorno al punto O, ad es. nel verso antiorario, è prodotto di due simmetrie ortogonali.*

In particolare, come abbiamo visto nell'Esercizio B2, la simmetria rispetto ad un punto O, coincidente con la rotazione di 180° di centro O (in un determinato verso peraltro arbitrario), è ottenibile come prodotto di due simmetrie ortogonali rispetto a due rette (qualunque) che si incontrano ortogonalmente in O.



3. Trasformazioni lineari nel piano

3.1. **Simmetrie oblique.** Data una retta r nel piano ed una direzione diversa da quella da essa individuata (direzione che potremmo indicare con un vettore $\overrightarrow{d}$ non parallelo ad r) risulta definita una **simmetria S rispetto ad r parallelamente alla assegnata direzione**, come segue: l'immagine di un punto P è il punto P' tale che il segmento PP' è parallelo alla assegnata direzione $\overrightarrow{d}$ e il suo punto medio appartiene ad r.



Esercizio B4. *Dimostrare le seguenti proprietà:*

- $S^2 = I$;
- S *trasforma rette in rette e trasforma rette parallele in rette parallele;*
- S *conserva il rapporto delle lunghezze di segmenti paralleli;*
- S *conserva le aree;*
- S *conserva il punto medio, cioè associa al punto medio* M *di un segmento* PQ *il punto medio* M' *del segmento* $P'Q'$ *corrispondente, per il quale* $P' = S(P), Q' = S(Q)$.

3.2. **Equazioni di simmetrie e trasformazioni lineari.** Supponiamo il piano euclideo riferito ad un sistema di assi cartesiani (ortogonali e monometrici) che definiscono coordinate (x, y).

Esercizio B5. *Trovare le equazioni della*

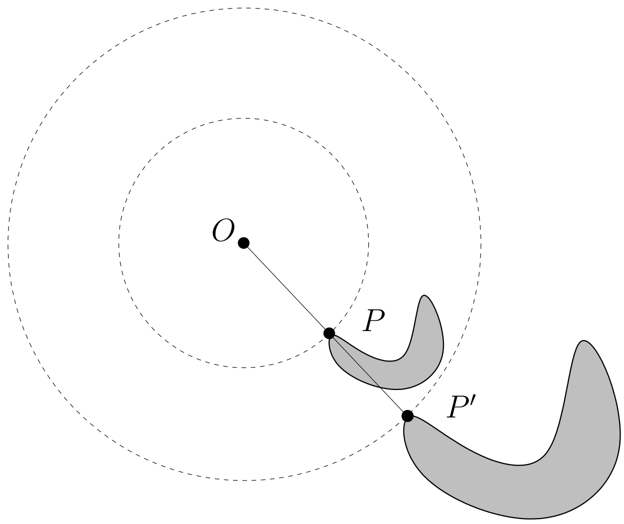
- *simmetria ortogonale rispetto all'asse* x *parallelamente all'asse* y;
- *simmetria obliqua* S *rispetto all'asse* x *parallelamente alla retta* r *di equazione* $y = mx$;
- *simmetria obliqua rispetto all'asse* $y = Mx$ *parallelamente alla retta* $y = mx$*, con* $m \neq M$.

Trovare le equazioni del prodotto delle simmetrie $S'S$*, dove* S' *è la simmetria obliqua rispetto all'asse* x *parallelamente alla retta* r' *di equazione* $y = m'x$.

Altri casi particolari di trasformazioni che ha interesse considerare sono le omotetie.

3.3. **Omotetie.** Un'omotetia di centro O è una trasformazione del piano euclideo che associa ad un punto P il punto P' sulla semiretta uscente da O e passante per P, tale che il rapporto tra le lunghezze di OP' e OP è costante, uguale ad un fissato numero positivo c. L'unico punto che corrisponde a se stesso, e che per questo si dice un **punto unito** è il punto O.

Il punto O è il **centro**, mentre c è il **rapporto dell'omotetia**. Questa trasformazione geometrica è anche chiamata **dilatazione**, se $c > 1$, **contrazione** se $c < 1$. Se $c = 1$ si ottiene ovviamente l'identità ovvero la trasformazione nella quale ogni punto corrisponde a se stesso.



L'omotetia è una particolare similitudine.

3.4. **Gruppo delle trasformazioni lineari.** Le trasformazioni del piano euclideo viste nel paragrafo precedente sono **applicazioni lineari** poiché, rispetto ad un fissato riferimento cartesiano, hanno equazioni della forma

$$\begin{cases} x' = & ax & +by & +h \\ y' = & cx & +dy & +k \end{cases}$$

ove a, b, c, d, h, k sono numeri reali dati.

Per le isometrie, le omotetie e le riflessioni oblique si ha inoltre

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc \neq 0$$

ove a primo membro si è posto il **determinante** della matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dei coefficienti di x, y.

Esercizio B6.

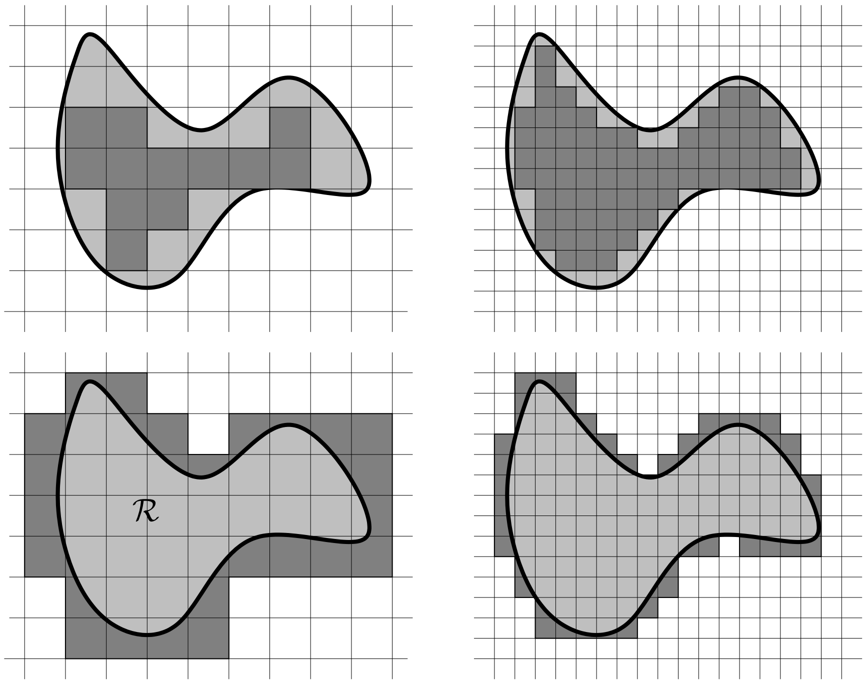
- *Dimostrare che un'applicazione lineare T come sopra è invertibile se e solo se $ad - bc \neq 0$. Verificare che, in questo caso, T^{-1} è anch'essa lineare.*
- *È vero che una trasformazione lineare T trasforma rette in rette?*
- *Dimostrare che, se S è una trasformazione lineare del piano diversa dall'identità, $S \neq I$, che lascia fisso l'origine O ed ha quadrato uguale all'identità, $S^2 = I$, allora coincide con la simmetria rispetto al punto O oppure è una simmetria rispetto ad una retta r per O parallelamente ad una data direzione.*

4. Calcolo di aree nel piano

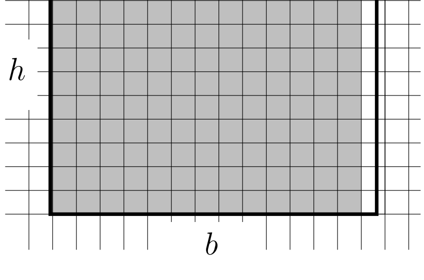
Stabiliamo che l'area di un quadrato con lato ℓ sia ℓ^2. Vogliamo inoltre che valga la **proprietà additiva dell'area**: se una regione $\mathcal{R}$ è unione disgiunta di $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ (oppure se l'area di $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ è zero, per esempio quando $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ è una curva), allora l'area $A(\mathcal{R}) = A(\mathcal{R}_1) + A(\mathcal{R}_2)$.

Per calcolare l'area di una regione piana $\mathcal{R}$, possiamo quindi suddividere il piano in un **reticolato** fatto di quadratini di lato ε e contare i quadratini che sono completamente contenuti in C: supponiamo siano N_ε. Concludiamo che l'area di $\mathcal{R}$ è almeno $A_\varepsilon = N_\varepsilon \cdot \varepsilon^2$: chiamiamo A_ε il **valore ε-approssimante per difetto** dell'area. Se contiamo invece il numero N'_ε dei quadratini che intersecano una parte di $\mathcal{R}$, allora possiamo concludere che l'area di $\mathcal{R}$ è al più $A'_\varepsilon = N'_\varepsilon \cdot \varepsilon^2$: chiamiamo A'_ε il **valore ε-approssimante per eccesso** dell'area.

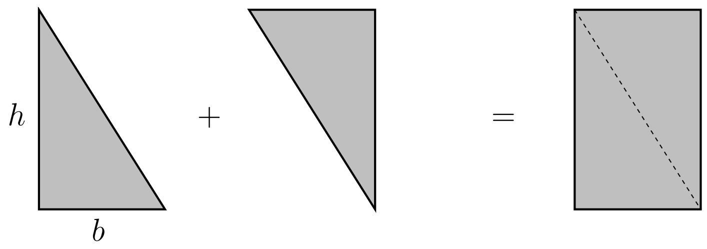
A mano a mano che riduciamo il passo ε del reticolato, le stime migliorano e, se la regione è sufficientemente regolare, si avvicinano sempre più all'**area** di $\mathcal{R}$.

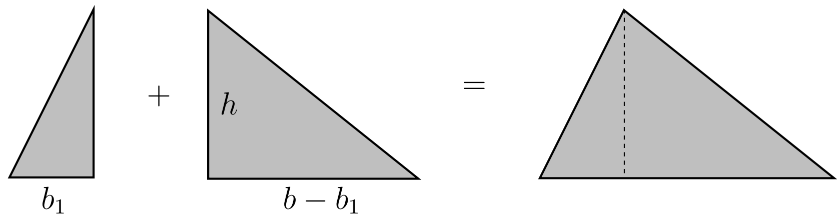


Esempio: l'area del rettangolo. Supponiamo che $\mathcal{R}$ sia un rettangolo di base b e altezza h. Se proviamo a riempirlo con quadratini di lato ε, scopriamo che $N_\varepsilon = \lfloor b/\varepsilon \rfloor \cdot \lfloor h/\varepsilon \rfloor$, dove $\lfloor x \rfloor$ è il più grande intero minore o uguale a x. Quindi $b - \varepsilon \leq \lfloor b/\varepsilon \rfloor \varepsilon \leq b$ e $h - \varepsilon \leq \lfloor h/\varepsilon \rfloor \varepsilon \leq h$. Concludiamo che $(b - \varepsilon)(h - \varepsilon) \leq A_\varepsilon \leq bh$. Un argomento analogo per il valore ε-approssimante per eccesso ci fornisce $bh \leq A'_\varepsilon \leq (b + \varepsilon)(h + \varepsilon)$. Quindi, per $\varepsilon \longrightarrow 0$, otteniamo $A_\varepsilon, A'_\varepsilon \longrightarrow bh$ e concludiamo che l'area del rettangolo $A(\mathcal{R}) = bh$.

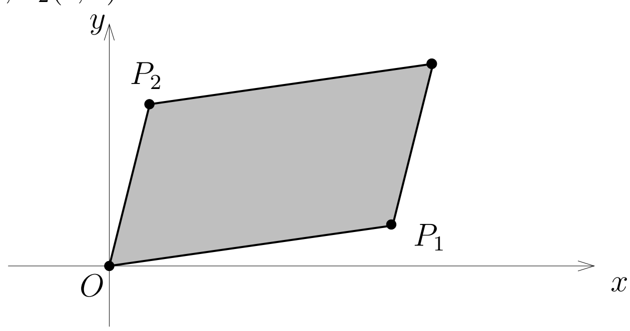


Esempio: l'area del triangolo. Sia T un triangolo rettangolo con base di lunghezza b e altezza di lunghezza h. Usando due copie di T e accostandole, possiamo ottenere un rettangolo di base b e altezza h. Dunque $2A(T) = bh$. Concludiamo che $A(T) = bh/2$. Se invece T non è rettangolo, tracciamo l'altezza di lunghezza h, dividendo T in due triangoli rettangoli T_1 (con base b_1 e altezza h) e T_2 (con base $b_2 = b - b_1$ e altezza h). Concludiamo che $A(T) = A(T_1) + A(T_2) = b_1 h/2 + (b - b_1)h/2 = bh/2$.





Esercizio A5. *Quanto vale l'area del parallelogramma con un vertice in* $O(0,0)$ *e due vertici opposti* $P_1(a,c), P_2(b,d)$*?*



Esercizio B7. *Sia* $\mathcal{Q}$ *il quadrato unitario di vertici* $O(0,0)$, $U_1(1,0)$, $U_2(0,1)$, $V(1,1)$ *e sia* T *la trasformazione del piano di equazioni*

$$\begin{cases} x' = & ax \\ y' = & by \end{cases} \qquad \text{con } a, b \neq 0$$

che associa al punto $P(x,y)$ *il punto* $P'(x',y')$.

- *Quanto vale l'area della regione piana in cui è trasformato il quadrato* $\mathcal{Q}$*?*
- *Qual è la curva* $\mathcal{E}$ *in cui* T *trasforma la circonferenza* $\mathcal{C}$ *di centro l'origine* O *e raggio* 1*?*
- *Quanto vale l'area della regione interna a* $\mathcal{E}$*?*
- *Se* T *è la trasformazione del piano di equazioni*

$$\begin{cases} x' = & ax + by \\ y' = & cx + dy \end{cases} \qquad \text{con } ad - bc \neq 0,$$

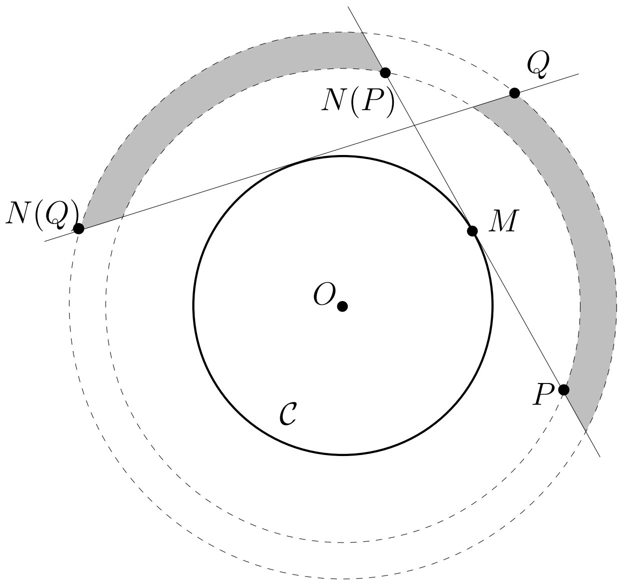
quanto vale l'area della regione piana in cui è trasformato il disco $\mathcal{D}$ *di raggio* 1 *e centro nell'origine* O*?*

5. Trasformazioni non lineari nel piano euclideo

Consideriamo la trasformazione N del piano in sé definita come segue a partire da una fissata circonferenza $\mathcal{C}$, ad esempio quella di raggio 1 e centro nell'origine O, e un dato verso di rotazione, ad esempio quello antiorario.

Dato un punto P del piano

- se P è interno oppure appartiene a $\mathcal{C}$ si ha $N(P) = P$;
- se P è esterno a $\mathcal{C}$, sicché per P passano due tangenti alla circonferenza, in due distinti punti, si considera la tangente t nel punto M tale che il verso di $\overrightarrow{PQ}$ sia concorde con il verso di rotazione scelto su $\mathcal{C}$ (vedi figura), e allora $N(P)$ coincide con il simmetrico di P rispetto al punto di tangenza M.



Esercizio B8.

- *Verificare che non sempre N conserva gli allineamenti.*
- *Vi sono rette che sono trasformate in rette da N?*
- *Vi sono circonferenze che sono trasformate in circonferenze da N?*

Esercizio C1. *È possibile dimostrare che N conserva le aree?*

6. Importanza delle trasformazioni lineari

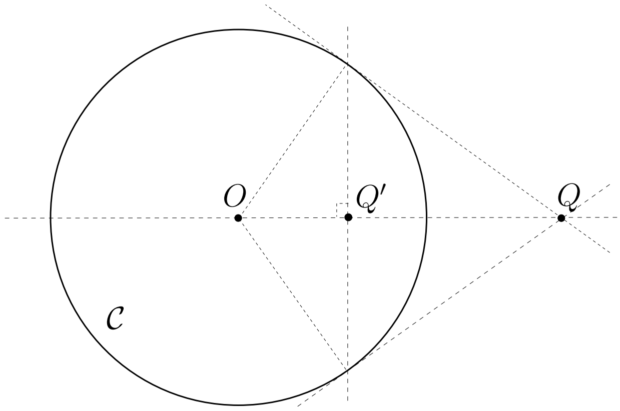
Data una trasformazione f del piano (sufficientemente regolare) e un punto $P(x_0, y_0)$, esiste un'unica trasformazione lineare A_P del piano che manda P in $f(P)$ e che meglio approssima f vicino a P. Questo vuol dire che, se Q è molto vicino a P, allora l'**errore** $|f(Q) - A_P(Q)|$ è molto piccolo rispetto a $|P - Q|$.

Esempio. Se $f(x, y) = (2x - y^2, (x + y)^2)$ e $P(2, -1)$, la trasformazione lineare A_P si calcola come segue. Sia $Q(2 + a, -1 + b)$ un punto qualunque. Allora $f(Q) = (2(2 + a) - (-1 + b)^2, (2 + a - 1 + b)^2) = (3 + 2a + 2b - b^2, 1 + 2a + 2b + a^2 + 2ab + b^2)$. Il punto Q è molto vicino a P quando a e b sono molto piccoli. In questo caso, i termini di grado > 1 in a, b sono trascurabili e quindi $A_P(Q) = (3 + 2a + 2b, 1 + 2a + 2b)$.

Esercizio A6. *Calcolare la trasformazione lineare che meglio approssima $f(x, y) = (x^3 - 3xy^2, 2xy)$ nel punto $P(1, 2)$.*

7. Inversione circolare

L'**inversione circolare** piana $\mathcal{I}$ di centro O e raggio r trasforma il piano privato del punto O in sé mandando un punto Q nel punto Q' situato lungo la semiretta $\overrightarrow{OQ}$ e tale che $|OQ| \cdot |OQ'| = r^2$. Segue dalla definizione che i punti situati sulla circonferenza $\mathcal{C}$ di centro O e raggio r sono punti uniti dell'inversione $\mathcal{I}$.



Esercizio B9. *Dimostrare che*

- $\mathcal{I}$ *è biunivoca,* $\mathcal{I}^2 = I$ *e* $\mathcal{I}$ *scambia la regione esterna a* $\mathcal{C}$ *con quella interna;*
- $\mathcal{I}$ *manda rette per* O *in sé.*

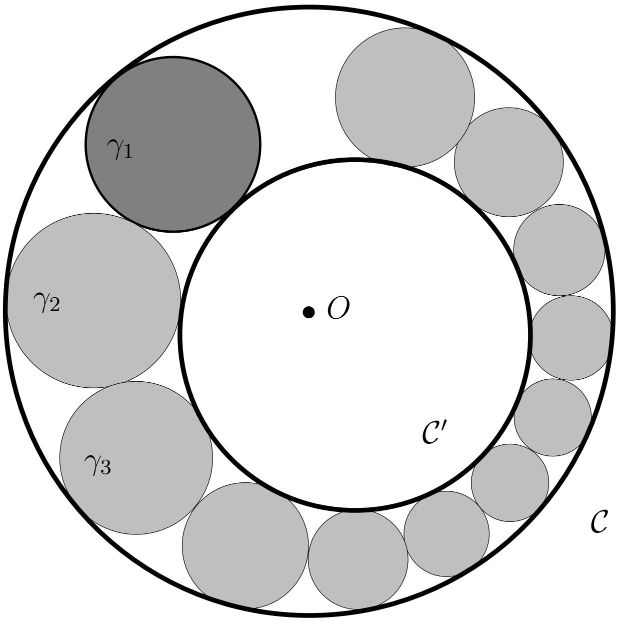
Esercizio C2. *Dimostrare che*

- $\mathcal{I}$ *manda rette non passanti per* O *in circonferenze passanti per* O *e viceversa;*
- $\mathcal{I}$ *trasforma circonferenze non passanti per* O *in circonferenze non passanti per* O*;*
- $\mathcal{I}$ *conserva gli angoli.*

Esercizio C3. *Dimostrare che, dati due cerchi* $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ *contenuti l'uno nell'altro, esiste un'inversione che manda* $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ *in due cerchi concentrici.* *(Suggerimento: considerare inversioni con centro lungo la retta che unisce i centri di* $\mathcal{C}$ *e* $\mathcal{C}'$*.)*

Esempio: il porisma di Steiner.

Siano $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ due circonferenze contenute una nell'altra. Data $\gamma = \gamma_1$ una circonferenza tangente a $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$, chiamiamo γ_2 una delle due circonferenze tangenti a $\gamma_1, \mathcal{C}, \mathcal{C}'$; chiamiamo poi γ_3 l'unica circonferenza tangente a $\gamma_2, \mathcal{C}, \mathcal{C}'$ diversa da γ_1 e così via. Diremo che $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots)$ è la *catena* di circonferenze generata da γ e che la catena *si chiude* all'n-esimo passo se e solo se $\gamma_n = \gamma_1$.



Porisma di Steiner. *Date γ e $\tilde{\gamma}$ circonferenze tangenti a $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$, la catena generata da γ si chiude all'n-esimo passo se e solo se la catena di $\tilde{\gamma}$ si chiude all'n-esimo passo.*

Esercizio B10. *Dimostrare che l'enunciato è vero quando $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ sono concentriche. Usare quindi il risultato dell'Esercizio C3 per concludere la dimostrazione del porisma.*

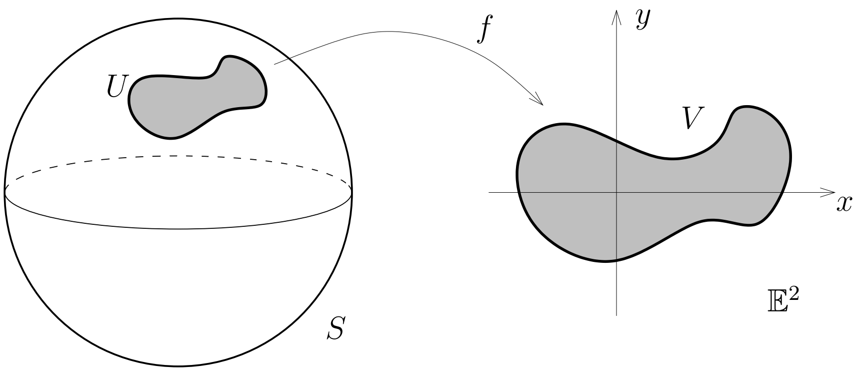
8. Carte geografiche

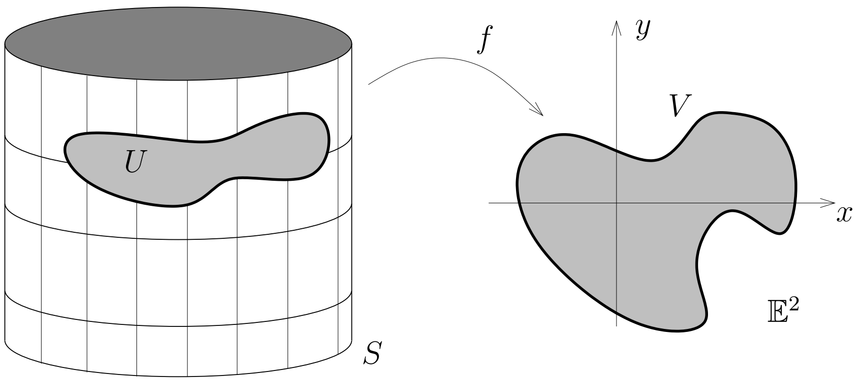
Sappiamo che una carta geografica del globo terrestre stabilisce una corrispondenza tra i punti di una regione della Terra e i punti di una porzione del piano.

Più precisamente, data una superficie qualunque S, diremo che una **regione** U di S è semplicemente una porzione di S delimitata da una curva semplice chiusa. Una regione V del piano è una porzione di $\mathbb{E}^2$ delimitata anch'essa da una curva semplice chiusa.

Una **carta (geografica)** della regione U di S è un'applicazione continua e biunivoca $f : U \longrightarrow V$ fra una regione $U \subset S$ e una regione del piano $V \subset S$, tale che la sua inversa f^{-1} sia continua.

Nel caso delle carte geografiche della superficie terrestre, la superficie S sarà una sfera di raggio r (in realtà, la Terra non è perfettamente sferica, ma questo per noi non avrà molta importanza).





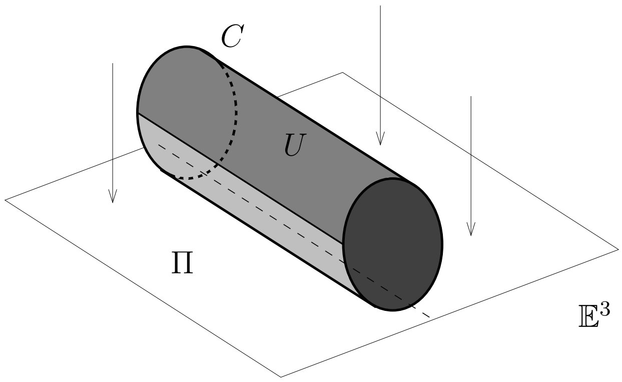
L'utilità delle carte geografiche è immediatamente ovvia a tutti: in particolare, per conoscere le posizioni e le rispettive distanze dei luoghi che ci interessano.

Diremo che la carta geografica $f : U \longrightarrow V$ è **isometrica** ovvero che **preserva le lunghezze** delle curve se, per ogni curva γ contenuta in U, la lunghezza di γ è uguale alla lunghezza di $f(\gamma)$.

Esercizio B11: il cilindro e il cono ammettono carte isometriche.

- *Sia C un cilindro infinito di raggio r e sia L una sua retta generatrice. Chiamiamo $U = C \setminus L$ il cilindro C privato della sua generatrice L. Costruire una carta geografica di U che preserva le lunghezze.*
- *Sia C' il cono infinito di angolo α ($0 < \alpha < 360°$) nel vertice e sia L' una sua semiretta generatrice. Chiamiamo U' il cono C' privato della sua generatrice L'. Costruire una carta geografica di U' che preserva le lunghezze.*

Il prossimo esercizio ci mostrerà che le carte geografiche più ovvie non preservano le lunghezze.



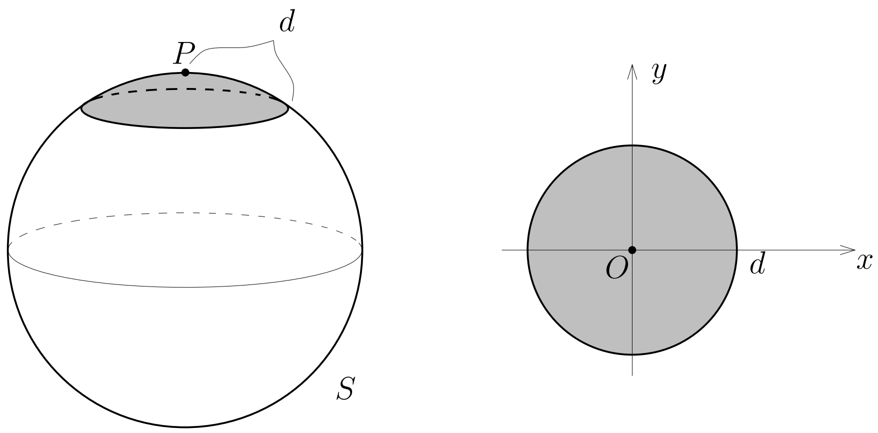
Esercizio A7.

- *Sia C un cilindro infinito di raggio r nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ e sia Π un piano tangente a C lungo una sua generatrice. Chiamiamo U la regione di C dei punti che distano almeno r da Π. Verificare che la proiezione ortogonale da U su Π non preserva le lunghezze.*
- *Sia S la sfera di raggio r in $\mathbb{E}^3$ centrata in $(0, 0, r)$ e sia Π il piano xy. Chiamiamo U la calotta di S individuata dai punti che distano almeno r da Π. Verificare che la proiezione ortogonale da U a Π non preserva le lunghezze.*

Il prossimo esercizio ci chiarirà che per la sfera non è possibile produrre una carta geografica che rispetti le lunghezze a meno di un fattore di scala costante $k > 0$. Questo è dovuto ad una caratteristica geometrica insita nella sfera, nota come **curvatura**.

Esercizio B12. *Sia P un punto su S. Calcolare la lunghezza ℓ_S della circonferenza che descrive i punti su S che distano d da P*[2]*. Calcolare la lunghezza ℓ di una circonferenza di raggio d nel piano. Confrontando ℓ_S con ℓ, concludere che non è possibile produrre una carta geografica (di una qualunque regione di S) che rispetti tutte le lunghezze.*

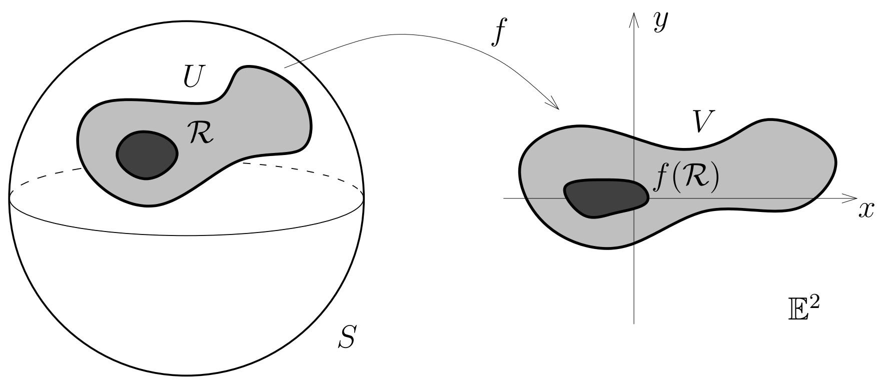
[2]Ricordiamo che sulla Terra S le distanze si calcolano percorrendo archi di cerchi massimi. Per semplicità possiamo pensare che P sia il polo nord e che questi cerchi massimi siano i meridiani.



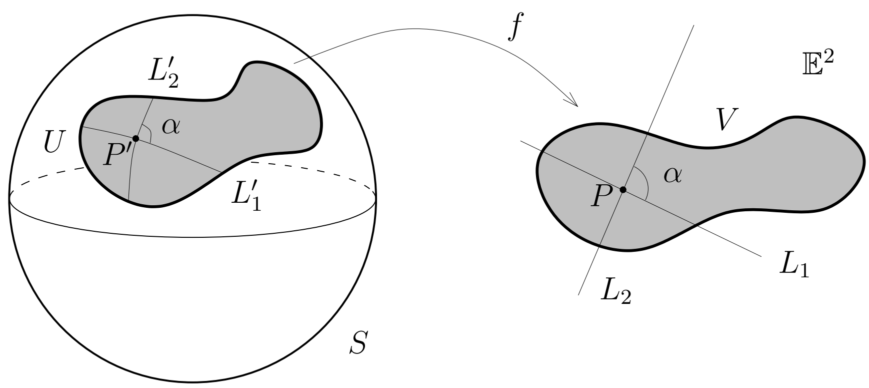
Domanda: la Terra S però è sferica: se le carte geografiche di S non rispettano le distanze, cosa ce ne facciamo allora?

Dobbiamo considerare le quantità che è possibile conservare nelle carte geografiche. Ci soffermeremo su due di queste: le aree e gli angoli.

- Diremo che una carta $f : U \longrightarrow V$ **conserva le aree** se, per ogni regione $\mathcal{R}$ contenuta in U, l'area di U è uguale all'area di $f(\mathcal{R})$.

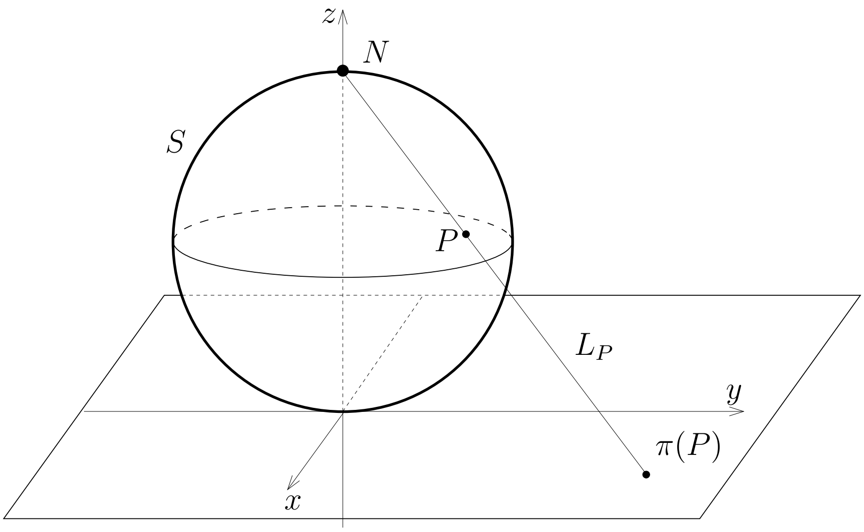


  Tali carte sono molto utili se, per esempio, si vuole suddividere un terreno, o un territorio, in parti che abbiano la stessa estensione, oppure le cui estensioni siano in un determinato rapporto.
- Diremo che una carta $f : U \longrightarrow V$ è **conforme** ovvero **preserva gli angoli** se, per ogni punto P di V e ogni coppia di semirette L_1, L_2 uscenti da P e formanti in P un angolo α, le rette tangenti in $P' = f^{-1}(P)$ alle due curve $L_1' = f^{-1}(L_1)$ e $L_2' = f^{-1}(L_2)$ formano un angolo α in P'.



Tali carte sono molto utili in navigazione. Infatti, la rotta più breve fra due punti su S è il cerchio massimo. Tuttavia, il cerchio massimo non interseca i meridiani sempre con lo stesso angolo: questo vuol dire che, se stiamo navigando, la bussola cambierà continuamente direzione. Le rotte nelle quali la bussola (ossia l'angolo formato con i meridiani) resta costante si dicono **lossodromiche**: chiaramente, per descrivere bene una tale rotta sulla mappa, abbiamo bisogno di una carta che preservi gli angoli.

8.1. **Proiezione stereografica.** Consideriamo la superficie sferica S di raggio r nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ e centrata nel punto $(0, 0, r)$. Chiamiamo *polo Nord* il punto $N(0, 0, 2r)$ e sia $\dot{S}$ la regione data da tutta la sfera S privata del polo N.



Identifichiamo $\mathbb{E}^2$ con il piano xy di $\mathbb{E}^3$. Allora la **proiezione stereografica** $\pi : \dot{S} \longrightarrow \mathbb{E}^2$ associa ad un punto P della sfera (diverso dal polo Nord) l'unico punto $\pi(P)$ di intersezione fra il piano xy e l'unica retta L_P passante per N e P.

FIGURA 1. Proiezione stereografica della Terra ottenuta proiettando dal polo sud sul piano tangente al polo nord.

Esercizio B13. *Dato un punto $P(x, y, z)$ della sfera S, determinare un'equazione parametrica per la retta L_P e trovare $\pi(P)$. Dimostrare che π è biunivoca e scrivere esplicitamente l'inversa $\pi^{-1} : \mathbb{E}^2 \longrightarrow \dot{S}$.*

Osservazione. Possiamo definire $\pi(X)$ per ogni punto dello spazio euclideo X tranne N, semplicemente come l'intersezione di $\mathbb{E}^2$ con l'unica retta L_X passante per N e X (in tal caso, l'applicazione da $\mathbb{E}^3 \setminus \{N\}$ a $\mathbb{E}^2$ non sarà biunivoca).

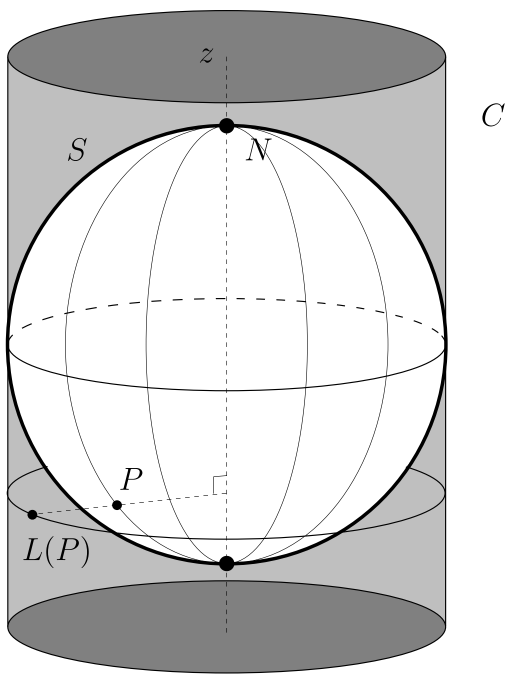
Esercizio C4: la proiezione stereografica è conforme.

- *Dimostrare che π trasforma circonferenze passanti per N in rette.*
- *Siano L_1, L_2 due rette nel piano $\mathbb{E}^2$ che si intersecano nel punto P formando un angolo α. Siano γ_1 e γ_2 le due circonferenze su S che vengono trasformate da π in L_1 e L_2. Dimostrare che γ_1, γ_2 si intersecano in N formando un angolo α.*
- *Dimostrare che γ_1 e γ_2 si intersecano in $\pi^{-1}(P)$ formando un angolo α, e che quindi π preserva gli angoli.*

Esercizio C5: la proiezione stereografica preserva le circonferenze. *Sia γ una circonferenza sulla sfera S non passante per N. Sia V il vertice del cono tangente a S in γ. Dimostrare che $\gamma' = \pi(\gamma)$ è una circonferenza con centro $V' = \pi(V)$. Concludere che π manda circonferenze (non passanti per N) in circonferenze.*

8.2. **Proiezione cilindrica di Lambert.** Consideriamo la nostra sfera S nello spazio euclideo centrata in $(0, 0, r)$, con polo nord $N(0, 0, 2r)$ e con polo sud O. Sia $\ddot{S}$ la sfera privata dei due poli e chiamiamo *equatore* di S il cerchio massimo ottenuto intersecando S con il piano $z = r$.

Consideriamo inoltre il cilindro infinito C con asse z e raggio r, che sarà quindi tangente a S all'equatore.



Definiamo la **proiezione cilindrica di Lambert** $L : \ddot{S} \longrightarrow C$ dove $L(P)$ è l'intersezione fra il cilindro C e la retta passante per P e perpendicolare all'asse z.

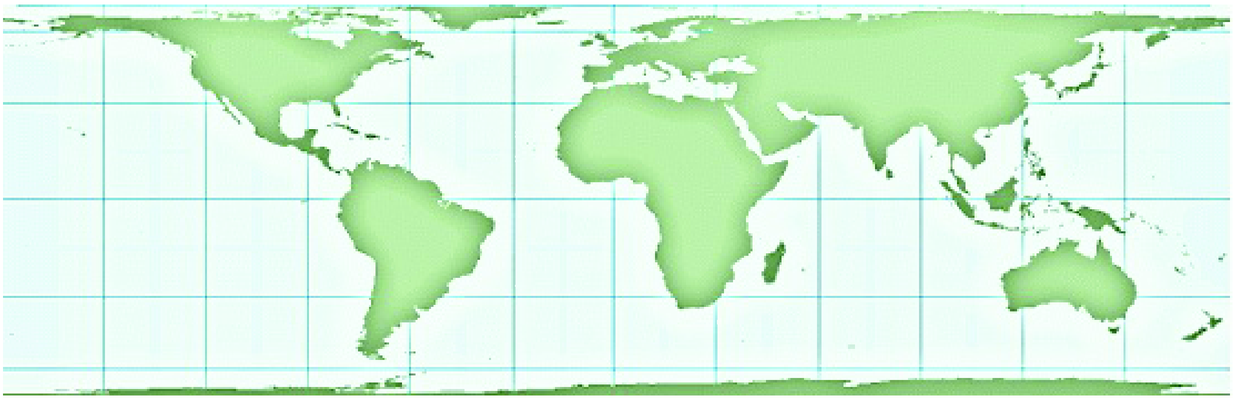


Figura 2. Sviluppo piano della proiezione cilindrica di Lambert della Terra.

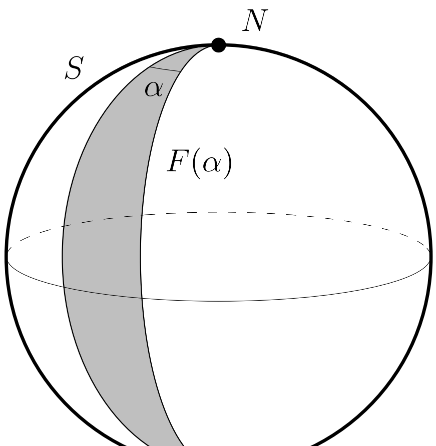
Esercizio C6: la proiezione di Lambert preserva le aree. *Dimostrare che, componendo L con carte isometriche del cilindro del tipo trovato all'Esercizio B11, si ottengono carte di regioni della sfera S che rispettano le aree.*

8.3. **Triangoli sferici.** L'impossibilità di avere una carta della sfera S che rispetti le distanze ci dice che la sfera S ha in effetti una **geometria** diversa da quella euclidea del piano.

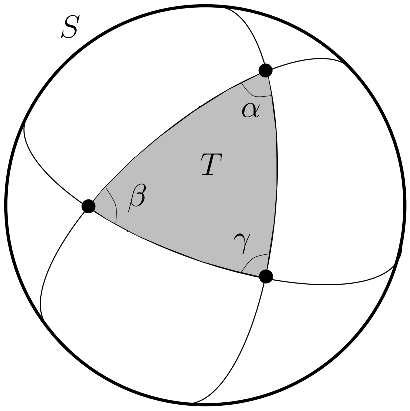
Per tentare un parallelo tra le due geometrie, il ruolo delle rette del piano è svolto dai cerchi massimi su S. Infatti, per due punti distinti nel piano passa una sola retta nel piano; similmente, per due punti distinti e non antipodali di S passa un solo cerchio massimo. Inoltre, i segmenti nel piano e gli archi di cerchio massimo sulla sfera descrivono le rotte di lunghezza minima. Tuttavia, data una retta L e un punto esterno Q nel piano, esiste ed è unica la rette parallela ad L passante per Q (*quinto postulato di Euclide*); mentre, dato un cerchio massimo C e un punto esterno P sulla sfera S **non esiste alcun cerchio massimo passante per P e parallelo a C.**

Un'altro caposaldo della geometria euclidea piana che viene a mancare nella geometria della sfera è che la somma degli angoli interni di un triangolo non è più 180°.

Un **fuso sferico** $F(\alpha)$ è una regione della sfera S delimitata da due semicerchi massimi che formano due angoli α nei loro punti di intersezione.



Un **triangolo sferico** $T(\alpha, \beta, \gamma)$ è una regione di S delimitata da tre archi di cerchi massimi che formano angoli α, β, γ nei loro punti di intersezione.



Esercizio B14. *Dimostrare che l'area del fuso sferico* $F(\alpha)$ *è* $2\alpha r^2$.

Esercizio C7. *Esprimere il triangolo sferico* $T(\alpha, \beta, \gamma)$ *come intersezione di fusi sferici e usare l'Esercizio B14 per concludere che l'area del triangolo è* $(\alpha+\beta+\gamma-\pi)r^2$. *Dedurne che* $\alpha + \beta + \gamma > \pi$.

Esercizio B15. *Due viaggiatori partono dal polo Nord su* S *e viaggiano lungo meridiani distinti (che formano un angolo* θ*) alla stessa velocità costante* v*, con l'intenzione di ritrovarsi al polo Sud. Stanchi dell'impresa, non essendosi ancora riuniti dopo un tempo* t*, decidono di reincontrarsi: il primo viaggiatore propone al secondo di fermarsi e di attendere che lui lo raggiunga seguendo la via lossodromica. Quanto tempo impiegherà? Se la terra fosse piatta (ovvero* $r = \infty$*), a cosa equivarrebbe la rotta lossodromica? Quanto tempo impiegherebbe il navigatore in questo caso?*