SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI SU SIMMETRIE E TRASFORMAZIONI NEL PIANO

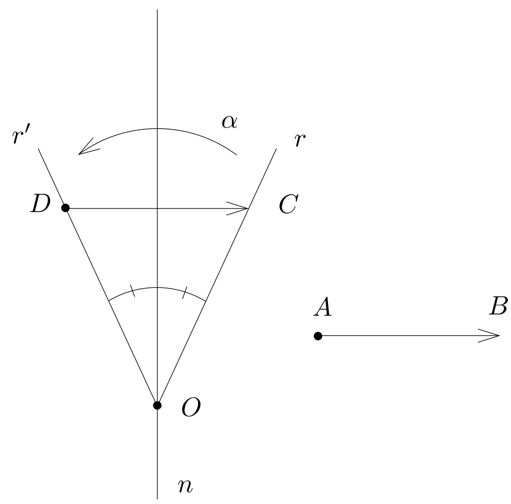
STEFANO MARCHIAFAVA, GABRIELE MONDELLO

18 dicembre 2009

1. Trasformazioni

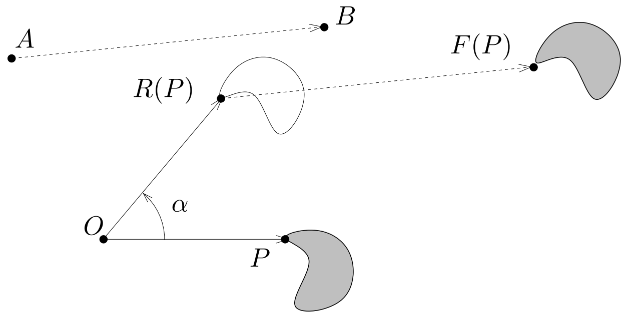
Esercizio A1.

- *È vero che la trasformazione T del piano euclideo ottenuta effettuando prima una traslazione di vettore $\overrightarrow{AB}$ e poi una rotazione di angolo α centrata in O è una traslazione oppure una rotazione? Se sì, determinare rispettivamente il corrispondente vettore di traslazione oppure l'angolo e il centro.*
- *Chi è l'inversa di una rototraslazione F del piano euclideo ottenuta effettuando prima una rotazione centrata in O di angolo α e poi una traslazione di vettore $\overrightarrow{AB}$?*



Soluzione A1:

- Se l'angolo α è nullo la trasformazione T coincide con la traslazione di vettore $\overrightarrow{AB}$; se $\overrightarrow{AB}$ è nullo, ovvero $A \equiv B$, T coincide con la rotazione di angolo α centrata in O. Altrimenti, consideriamo la retta n per O avente direzione perpendicolare a quella di $\overrightarrow{AB}$ e le rette r, r' per O che formano un angolo $\frac{\alpha}{2}$ con n. Esiste ed è unico il punto C su una delle due rette r, r' tale che, detto D il punto che si ottiene da C mediante la considerata rotazione di angolo α attorno ad O, il vettore $\overrightarrow{CD}$ ha direzione e lunghezza uguali a quelle di $\overrightarrow{AB}$, ma verso opposto (Nella figura il verso della rotazione si è supposto antiorario e il vettore $\overrightarrow{AB}$ volge da sinistra a destra). E' immediato rendersi conto che C viene lasciato fisso da T e considerata l'immagine mediante T di un qualunque punto P della retta OC, diverso da O e C, risulta che T coincide con la rotazione di angolo α attorno a C.
- L'inversa di F si ottiene applicando dapprima la traslazione di vettore $\overrightarrow{BA}$, inversa della traslazione $\overrightarrow{AB}$, e poi la rotazione inversa di quella assegnata, ovvero la rotazione di angolo α attorno ad O *nel verso opposto* a quello della rotazione assegnata.

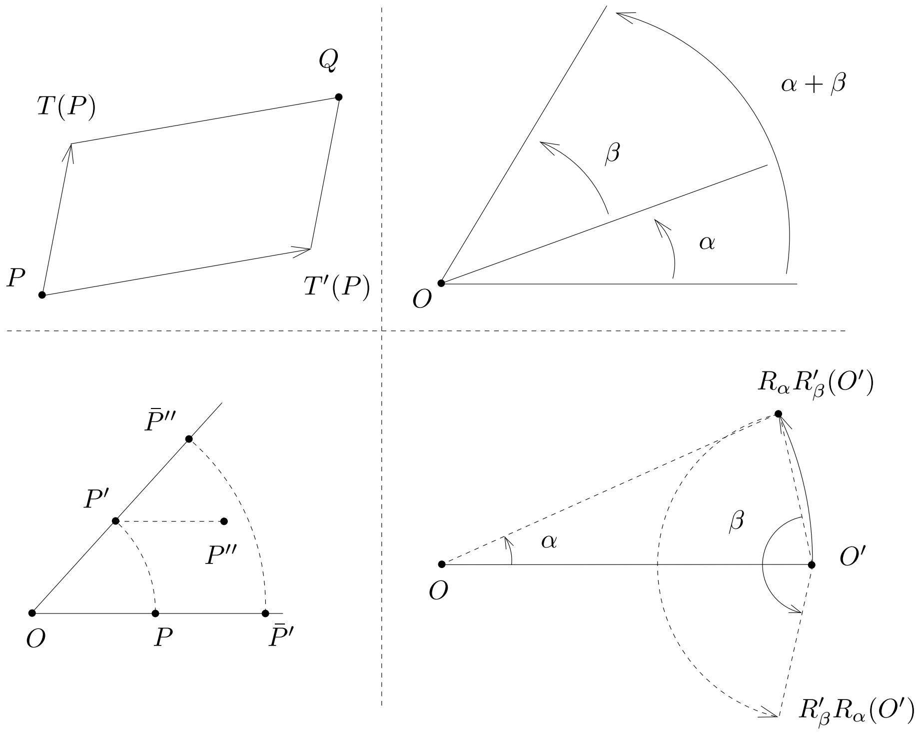


Esercizio B1. *Nei seguenti casi, dire quando le due trasformazioni indicate commutano:*

- *due traslazioni* T, T'*;*
- *due rotazioni* R_α, R_β *attorno allo stesso punto* O*;*
- *una rotazione* R_α *e una traslazione* T*;*
- *due rotazioni* R_α, R'_β *attorno a punti* O, O' *diversi.*

Soluzione B1:

- due traslazioni T, T' commutano sempre, poiché comunque si fissi un punto P i loro due possibili prodotti $TT', T'T$ coincidono con la traslazione definita dal vettore $\overrightarrow{PQ}$, ove $Q = T'(TP) = T(T'P)$;



- due rotazioni R_α, R_β attorno allo stesso punto O commutano sempre poiché, in qualunque ordine procediamo, il loro prodotto coincide 1) con la rotazione di angolo $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ attorno ad O nel verso orario o antiorario quando si tratta di rotazioni nello stesso verso, orario o antiorario rispettivamente, oppure, 2) con la rotazione di angolo $|\alpha - \beta|$ nel verso del maggiore dei due angoli se si tratta di rotazioni in versi opposti;
- una rotazione R_α e una traslazione T in generale non commutano: per un dato punto P i punti $P'' = TR_\alpha(P)$ e $\overline{P}'' = R_\alpha T(P)$, che gli corrispondono eseguendo i due possibili prodotti, sono diversi se $R_\alpha \neq I, T \neq I$.
- due rotazioni $R = R_\alpha, R' = R'_\beta$, di angoli non nulli (a meno di multipli interi di 2π), attorno a punti O, O' diversi non commutano. Per vederlo osserviamo che $R(O') = RR'(O')$, poiché $O' = R'(O')$. Inoltre, dalle ipotesi che nessuna delle due rotazioni coincida con l'identità, sarà certamente $R(O') \neq O'$ e, quindi, $R'R(O') \neq R(O')$, ovvero $R'R(O') \neq RR'(O')$. Dunque $R'R \neq RR'$ (affinché valga l'uguaglianza tra prodotti essi devono coincidere su ogni punto).

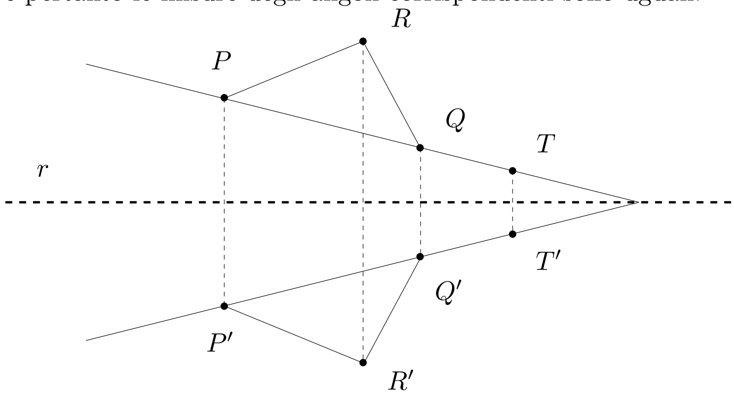
2. Trasformazioni nel piano

2.1. Simmetrie ortogonali.

Esercizio A2. *Verificare che la riflessione ortogonale S rispetto all'asse r è una isometria, che $S^2 = S \circ S = I$ e che S scambia le orientazioni del piano (cioè, se il punto P ruota attorno ad un punto O in un certo verso, ad es. orario, allora il corrispondente punto P' ruota nel verso opposto, ad es. antiorario, attorno al punto $O' = S(O)$).*

Soluzione A2:

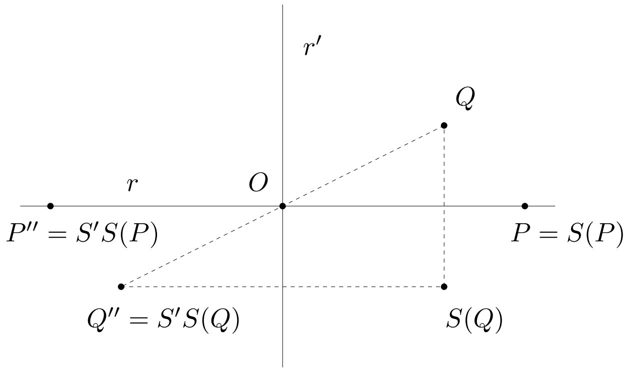
- S conserva la lunghezza dei segmenti, cioè se $P' = S(P)$, $Q' = S(Q)$ allora $\overline{P'Q'} = \overline{PQ}$. Inoltre S conserva gli allineamenti, trasformando rette in rette. Di conseguenza S conserva gli angoli, cioè se $R' = S(R)$ allora $\widehat{P'Q'R'} = \widehat{PQR}$: infatti i triangoli PQR, $P'Q'R'$ hanno lati corrispondenti di uguale lunghezza e pertanto le misure degli angoli corrispondenti sono uguali.



- Dalla definizione stessa di S è immediato riconoscere che se $P' = S(P)$ allora $S(P') = P$, ovvero $S^2(P) = P$ per ogni punto P del piano.
- Se pensiamo ad un orologio la cui lancetta delle ore è disposta lungo l'asse r, puntando in un certo verso, e la lancetta dei minuti volge verso l'interno di uno dei due semipiani determinati da r stessa, dopo avere applicato S la lancetta delle ore è rimasta fissa mentre quella dei minuti risulterà rivolta nel semipiano opposto. Quindi i versi orario e antiorario risulteranno scambiati da S.

Esercizio B2. *La composizione di due simmetrie ortogonali S, S' rispetto a corrispondenti rette r, r' ortogonali coincide con la simmetria rispetto al punto O intersezione delle due rette stesse.*

Soluzione B2: Consideriamo, ad esempio, il prodotto $S'S$: si tratta di una isometria, poiché ottenuta componendo successivamente due isometrie; inoltre conserva le orientazioni, scambiate due volte tra loro, e lascia fisso il punto O intersezione delle rette r, r'.

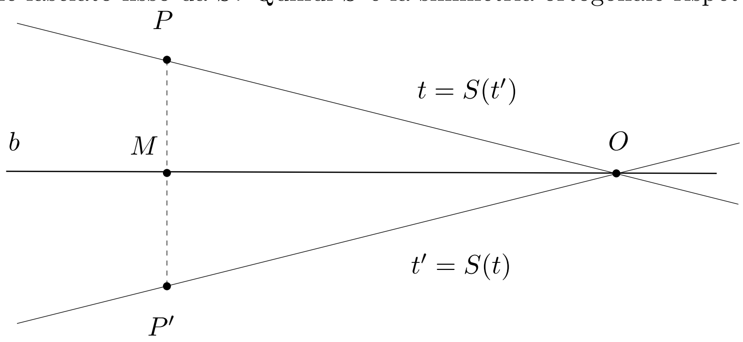


Quindi $S'S$ è una rotazione, di 180^0 attorno ad O come si vede osservando ad esempio che trasforma r (rispettivamente, r') in se stessa inducendovi la simmetria rispetto ad O.
(Notiamo che in questo caso si ha $S'S = SS'$, cioè S, S' commutano).

Esercizio B3. *Se S è una isometria del piano diversa dall'identità, $S \neq I$, che lascia fisso un punto O e ha quadrato uguale all'identità, ovvero $S^2 = I$, allora coincide con la simmetria rispetto al punto O*

oppure è una simmetria ortogonale.

Soluzione B3: Se ogni retta per O è trasformata in sé da S allora si tratta dell'identità oppure della simmetria rispetto ad O. Altrimenti, siano t, $t' = S(t)$ due rette diverse, necessariamente non parallele e passanti per O. Si osserva immediatamente che al variare del punto P su t, e quindi del corrispondente punto $P' = S(P)$ su t', il punto medio M del segmento PP' descrive una delle bisettrici, b, degli angoli formati da t, t' e viene lasciato fisso da S. Quindi S è la simmetria ortogonale rispetto a b.

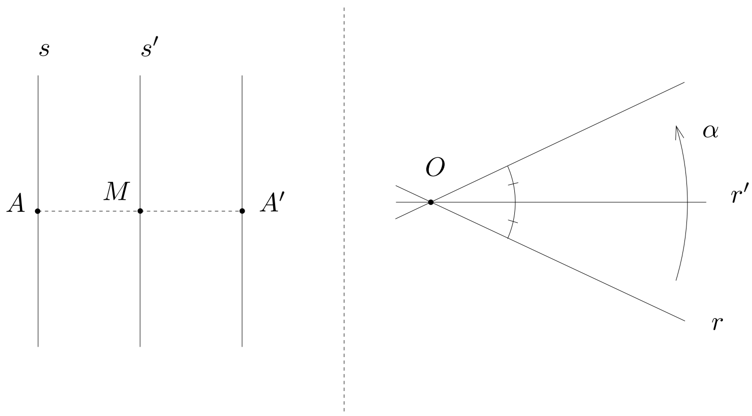


(Cosa si può dire di un'isometria S del piano che ha quadrato l'identità, $S^2 = I$?)

2.2. **Simmetrie ortogonali e isometrie del piano.**

Esercizio A3. *Verificare che la traslazione T che porta il punto A in A' è prodotto di due simmetrie ortogonali.*

Soluzione A3: Se $A = A'$ la traslazione coincide con l'identità, $T \equiv I$, e considerata qualunque simmetria ortogonale S rispetto ad una retta r per A il prodotto di S per se stessa uguaglia l'identità. Passiamo dunque al caso generico, quando $A \neq A'$. Considerate le rette s e s' perpendicolari al segmento AA', passanti rispettivamente per A e per il punto medio M del segmento AA', si vede subito che il prodotto $S'S$ delle simmetrie ortogonali S, S' di assi s, s' rispettivamente uguaglia T (basta applicare $S'S$ ai punti di s).



Esercizio A4. *Verificare che la rotazione $R = R_\alpha$ di angolo α attorno al punto O, ad es. nel verso antiorario, è prodotto di due simmetrie ortogonali.*

Soluzione A4: Se $R = I$ la verifica è stata già fatta in esercizio precedente. Assumiamo che R non coincide con l'identità e consideriamo due qualunque rette r, r' per O, formanti un angolo $\frac{\alpha}{2}$; siano poi S, S' le simmetrie ortogonali di assi r, r' rispettivamente. Allora uno dei prodotti $S'S, SS'$, inversi uno dell'altro, coincide con la rotazione R. Per rendersene conto si applichino i detti prodotti a r.

3. Trasformazioni lineari nel piano

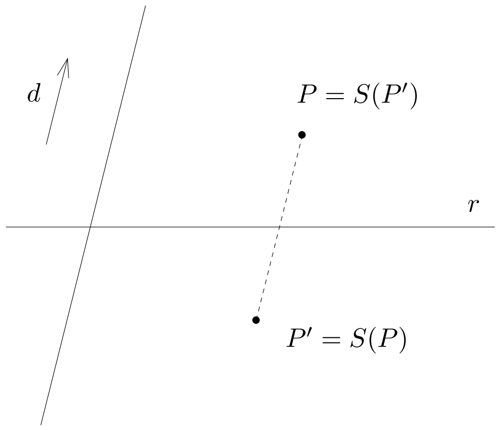
3.1. **Simmetrie oblique.**

Esercizio B4. *Dimostrare le seguenti proprietà di una simmetria obliqua S:*

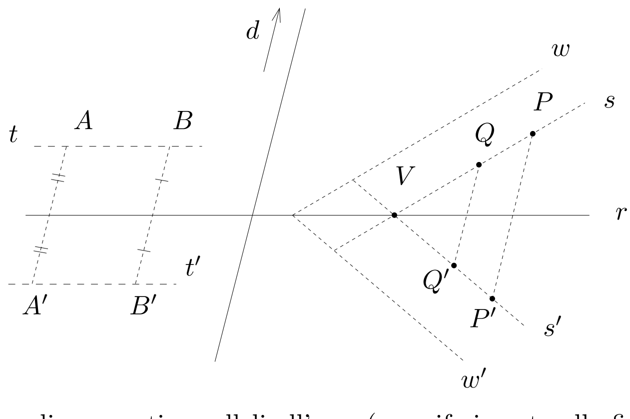
- *$S^2 = I$;*
- *S trasforma rette in rette e rette parallele in rette parallele;*
- *S conserva il rapporto delle lunghezze di segmenti paralleli;*
- *S conserva le aree;*
- *S conserva il punto medio, cioè associa al punto medio M di un segmento PQ il punto medio M' del segmento $P'Q'$ corrispondente, per il quale $P' = S(P), Q' = S(Q)$.*

Soluzione B4:

- Ragionando come per la simmetria ortogonale, osserviamo che se $P' = S(P)$ si ha $P = S(P')$, quindi $S[S(P)] = P$, ovvero appunto $S^2P = P$ per ogni punto P, cioè $S^2 = I$;



- Se t è una retta parallela all'asse r e A un punto di t, per il quale $S(A) = A'$, risulta che per ogni punto B di t il corrispondente punto $B' = S(B)$ varia sulla retta t' passante per A' e parallela a t, poiché il quadrilatero $ABB'A'$ deve essere un parallelogramma; in particolare, risulta che rette parallele all'asse r vengono trasformate in rette parallele allo stesso asse. Se s è una retta non parallela all'asse r, col quale quindi si interseca in un punto V, lasciato fisso da S, e Q è un punto di s diverso da V, per il quale $S(Q) = Q'$, risulta che per ogni punto P di s il corrispondente punto $P' = S(P)$ varia sulla retta s' passante per V e Q', poiché i triangoli QVQ', PVP' sono simili (si veda anche al punto seguente). Inoltre, sempre utilizzando proprietà di similitudine dei triangoli, ogni retta w parallela a s, intersecante r nel punto U, viene trasformata nella retta w' per U parallela a s'.



- S conserva la lunghezza di segmenti paralleli all'asse (con riferimento alla figura, i segmenti AB e $A'B'$, che S trasforma uno nell'altro, hanno la stessa lunghezza). Se si considerano due segmenti appartenenti ad una stessa retta non parallela ad r, ad esempio VQ, VP della retta s, applicando Talete, risulta che essi vengono trasformati da S in segmenti, VQ', VP' nel caso dell'esempio, per i quali il rapporto delle lunghezze resta uguale.
- Se consideriamo parallelogrammi con lati paralleli all'asse r e alla direzione $\overrightarrow{d}$ di S risulta subito che essi sono congruenti ai rispettivi trasformati mediante S, quindi hanno la stessa area dei trasformati. Se pensiamo di misurare le (approssimazioni delle) aree di una figura $\mathcal{F}$ e della sua corrispondente $\mathcal{F}' = S(\mathcal{F})$ usando di volta in volta reticolazioni che sono costituite da rette parallele all'asse r e alla direzione $\overrightarrow{d}$ di S e che si ottengono una dall'altra mediante S, ci rendiamo subito conto che

le corrispondenti approssimazioni delle aree di $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}' = S(\mathcal{F})$ sono uguali, quindi le aree di $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ sono uguali.
- Una conseguenza immediata del fatti, prima dimostrati, che S conserva gli allineamenti e il rapporto delle lunghezze di segmenti paralleli, è che S *conserva il punto medio.*

3.2. **Equazioni di simmetrie e trasformazioni lineari.**

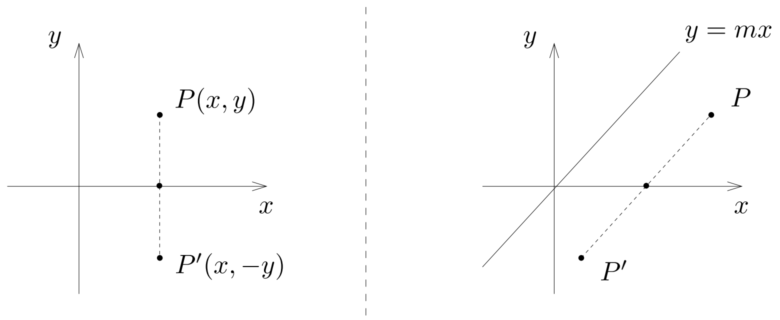
Il piano euclideo è supposto riferito ad un sistema di assi cartesiani (ortogonali e monometrici) che definiscono coordinate (x, y).

Nel seguito, salvo diversa menzione, in relazione ad una assegnata trasformazione del piano, assumeremo che se un punto ha coordinate (x, y) allora le coordinate del punto trasformato sono (x', y') e per equazioni della trasformazione intenderemo quelle che esprimono le coordinate (x', y') in funzione delle coordinate (x, y).

Esercizio B5. *Trovare le equazioni della*
- *simmetria ortogonale rispetto all'asse x parallelamente all'asse y;*
- *simmetria obliqua S rispetto all'asse x parallelamente alla retta $y = mx$;*
- *simmetria obliqua rispetto all'asse $y = Mx$ parallelamente alla retta $y = mx$, con $m \neq M$.*

Trovare le equazioni del prodotto delle simmetrie $S'S$, dove S' è la simmetria obliqua rispetto all'asse x, parallelamente alla retta di equazione $r' : y = m'x$.

Soluzione B5:
- Le equazioni della simmetria ortogonale rispetto all'asse x parallelamente all'asse y sono: $x' = x \quad , \quad y' = -y$;



- Le equazioni della simmetria obliqua rispetto all'asse x parallelamente alla retta $y = mx$, poiché deve aversi $y' = -y$ e $y' - y = m(x' - x)$, sono: $x' = x - \frac{2}{m}y \quad , \quad y' = -y \qquad ;$
- Detta S la simmetria obliqua rispetto all'asse $y = Mx$ parallelamente alla retta $y = mx$, con $m \neq M$, le coordinate (x, y), (x', y') dei punti $P, P' = S(P)$ debbono verificare le uguaglianze

$$\frac{y' + y}{2} = M(\frac{x' + x}{2}) \qquad , \qquad y' - y = m(x' - x)$$

traduzioni scalari dell'appartenenza del punto medio del segmento PP' all'asse $y = Mx$ e del parallelismo delle rette PP', $y = mx$ rispettivamente. Risolvendo rispetto a x', y' si trovano le equazioni di S:

$$\begin{cases} x' = & \frac{m+M}{m-M}x \quad - \frac{2}{m-M}y \\ \\ y' = & \frac{2mM}{m-M}x \quad - \frac{m+M}{m-M}y \end{cases}$$

Troviamo ora le equazioni del prodotto $S'S$ delle simmetrie S, S' rispetto all'asse x, parallelamente alle rette $r : y = mx, \quad r' : y = m'x$, rispettivamente.

Da quanto provato sopra, le equazioni della simmetria obliqua S rispetto all'asse x parallelamente alla retta $r : y = mx$ sono $x' = x - \frac{2}{m}y \quad , \quad y' = -y$ e quelle della simmetria obliqua S' rispetto all'asse x parallelamente alla retta $r' : y = m'x$, da applicare successivamente, sono $x'' = x' - \frac{2}{m'}y'$, $y'' = -y'$. Pertanto le equazioni del prodotto $S'S$ sono $x'' = [x - \frac{2}{m}y] - \frac{2}{m'}[-y]$, $y'' = -[-y]$ ovvero $x'' = x - [\frac{2}{m} - \frac{2}{m'}]y$, $y'' = y$.

3.3. Gruppo delle trasformazioni lineari.

Esercizio B6.

- *Dimostrare che un'applicazione lineare T come sopra è invertibile se e solo se risulta $ad - bc \neq 0$. Verificare che, quando questo si verifica, T^{-1} è anch'essa lineare.*
- *È vero che una trasformazione lineare T trasforma rette in rette?*
- *Dimostrare che, se S è una trasformazione lineare del piano diversa dall'identità, $S \neq I$, che lascia fisso l'origine O ed ha quadrato uguale all'identità, $S^2 = I$, allora coincide con la simmetria rispetto al punto O oppure è una simmetria rispetto ad una retta r per O parallelamente ad una data direzione.*

Soluzione B6:

- T è invertibile se e solo se per ogni dato punto $P'(x', y')$ del piano esiste uno ed un solo punto $P(x, y)$ tale che $P' = T(P)$ ovvero, per ogni coppia (x', y') fissata il sistema

$$\begin{cases} x' = & ax & +by & +h \\ y' = & cx & +dy & +k \end{cases},$$

che, avendo assunto x', y' assegnate, si può anche scrivere

$$\begin{cases} ax & +by = & x' - h \\ cx & +dy = & y' - k \end{cases},$$

ammette sempre una ed una sola soluzione (x, y). Ciò avviene appunto se e solo se il *determinante* della *matrice dei coefficienti* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è diverso da zero, cioè $ad - bc \neq 0$.

In tal caso, risolvendo il sistema, ad es. con le formule di Cramer o per sostituzione, si trova che le equazioni di T^{-1} sono anch'esse lineari:

$$\begin{cases} x = & a'x' & +b'y' & +h' \\ y = & c'x' & +d'y' & +k' \end{cases}$$

con

$$a' = \tfrac{d}{A} \quad , \quad b' = -\tfrac{b}{A} \quad , \quad c' = -\tfrac{c}{A} \quad , \quad d' = \tfrac{a}{A},$$

$$h' = \tfrac{-hd+bk}{A} \quad , \quad k' = \tfrac{-ak+ch}{A} \qquad ; \qquad A = ad - bc.$$

- Una retta r ha equazioni parametriche $x = \ell t + p \quad , \quad y = mt + q$, con $(\ell, m) \neq (0, 0)$, dove il parametro reale t varia da $-\infty$ a $+\infty$. Sostituendo nelle equazioni di T si trova che il luogo dei punti $P'(x', y')$ che sono trasformati dei punti $P(x, y)$ di r ha equazioni

$$\begin{cases} x' = & (a\ell + bm)t & +ap + bq & +h \\ y' = & (c\ell + dm)t & +cp + dq & +k \end{cases}$$

che sono della forma

$$\begin{cases} x' = & \ell' t & +p' \\ y' = & m' t & +q' \end{cases}$$

con $\ell' = a\ell + bm$, $m' = c\ell + dm$, $p' = ap + bq + h$, q'=cp+dq+k. Se T è invertibile sarà sempre $(\ell', m') \neq (0, 0)$ e quindi si tratta delle equazioni parametriche di una retta r', trasformata di r mediante T. Se invece T non è invertibile può accadere che per qualche direzione della retta r, in corrispondenza di valori di (ℓ, m) per i quali $a\ell + bm = 0$, $c\ell + dm = 0$, l'insieme delle immagini dei punti di r coincida con un solo punto, $x' = p'$, $y' = q'$. Possiamo comunque sempre dire che "T conserva gli allineamenti".

Un esempio di trasformazione lineare non invertibile è

$$\begin{cases} x' = & ax & +by \\ y' = & ax & +by \end{cases},$$

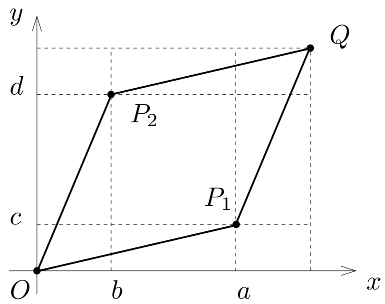
con $(a, b) \neq (0, 0)$, che trasforma un qualunque punto $P(x, y)$ in un punto $P'(x', y')$ con $y' = x'$, sempre appartenente alla bisettrice degli assi x, y. I punti della retta $r : ax + by = 0$ hanno tutti per immagine l'origine O. (Siete in grado di indicare un'altra retta per la quale i punti hanno immagini coincidenti con un unico punto?).

- (Notiamo che il fatto di lasciare fissa l'origine O equivale all'annullarsi dei termini h, k nelle equazioni di T). Consideriamo un punto P tale che $P' = S(P) \neq P$, certamente esistente poiché S è supposta diversa dall'identità. Supponiamo che O, P, P' non sono allineati. La retta s per O, P avrà per immagine un'altra retta s' per O. Una retta t parallela ad s verrà trasformata in una retta t' parallela a s', e l'intersezione di t, t' sarà un punto U, diverso da O. Non è difficile rendersi conto che la retta r per i punti O, U è luogo di punti fissi di T e coincide con il luogo dei punti medi dei segmenti QQ' al variare di Q su s, dove $Q' = S(Q)$. Per l'arbitrarietà di P, e quindi di s, si trova appunto che S è la simmetria rispetto alla retta r per O parallelamente alla direzione di $\overrightarrow{PP'}$.

4. Calcolo di aree nel piano

Esercizio A5. *Quanto vale l'area del parallelogramma con un vertice in $O(0,0)$ e due vertici opposti $P_1(a,c), P_2(b,d)$?*

Soluzione A5:



Consideriamo il caso in cui i punti P_1, P_2 si trovano nel primo quadrante come in figura. Guardando al rettangolo di lati paralleli agli assi x, y e vertici $O, Q_1(a+b, 0), Q_2(0, c+d), Q(a+b, c+d)$, che contiene il dato parallelogramma e ne differisce per alcuni rettangoli e triangoli a coppie congruenti, risulta che l'area $\mathcal{A}$ del parallelogramma vale $(a+b)(c+d) - 2bc - bd - ac$ ovvero $\mathcal{A} = ad - bc$. Se si scambia il ruolo dei due punti oppure si applica ai due punti stessi una simmetria ortogonale rispetto ad uno degli assi coordinati, oppure si scambia uno dei punti con il simmetrico rispetto ad O, il valore di $ad - bc$ si muta nell'opposto. Poiché le suddette trasformazioni operate sui punti P_1, P_2 non cambiano il valore dell'area, possiamo concludere che comunque siano diposti i punti P_1, P_2 l'area del parallelogramma da essi individuato è data da $\mathcal{A} = |ad - bc|$.

Prima di continuare osserviamo che quanto provato fornisce un *significato geometrico del valore assoluto del determinante di una matrice* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. In particolare, una trasformazione lineare che ha tale matrice dei coefficienti di x, y è invertibile se e solo se non è nulla l'area del parallelogramma determinato dai punti P_1, P_2 trasformati dei punti unità $U_1(1,0), U_2(0,1)$ sugli assi x, y rispettivamente. Sapreste dire quale è il *significato geometrico del segno del determinante* della matrice dei coefficienti di una trasformazione invertibile?

Esercizio B7. *Sia $\mathcal{Q}$ il quadrato unitario di vertici $O(0,0)$, $U_1(1,0)$, $U_2(0,1)$, $V(1,1)$ e sia T la trasformazione del piano di equazioni*

$$\begin{cases} x' = & ax \\ y' = & by \end{cases}$$

che associa al punto $P(x,y)$ il punto $P'(x',y')$.

- *Quanto vale l'area della regione piana in cui è trasformato il quadrato $\mathcal{Q}$?*
- *Qual è la curva $\mathcal{E}$ in cui T trasforma la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro l'origine O e raggio 1?*
- *Quanto vale l'area della regione interna a $\mathcal{E}$?*
- *Se T è la trasformazione del piano di equazioni*

$$\begin{cases} x' = & ax + by \\ y' = & cx + dy \end{cases},$$

quanto vale l'area della regione piana in cui è trasformato il disco $\mathcal{D}$ di raggio 1 e centro nell'origine O?

Soluzione B7:

- Il quadrato $\mathcal{Q}$ viene trasformato nel rettangolo $\mathcal{R}$ di lati OP_1, OP_2 ove $P_1 = T(U_1), P_2 = T(U_2)$ hanno coordinate rispettivamente $(a, 0), (0, b)$. Quindi l'area di $= T(\mathcal{Q})$ vale $|ab|$, che coincide anche con il valore assoluto del determinante della matrice dei coefficienti di T.
- La circonferenza $\mathcal{C}$ ha equazione $x^2 + y^2 = 1$. Un punto $P'(x', y')$ è il trasformato $P' = T(P)$ di un punto $P(x, y)$ di tale circonferenza se e solo se le sue coordinate verificano l'identità $(\frac{x'}{a})^2 + (\frac{y'}{b})^2 = 1$, quindi $\mathcal{E} = T(\mathcal{C})$ è l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, avente assi (di simmetria) gli assi x, y e semiassi uguali a $|a|, |b|$.
- Per semplicità assumiamo a, b positivi. L'area del trasformato del quadrato unitario vale ab e tale anche è il rapporto tra l'area di qualunque quadrato con lato parallelo all'asse x di lunghezza uguale ad una frazione intera dell'unità e l'area del rettangolo nel quale esso viene trasformato da T. Dunque, potendosi calcolare l'area del disco unitario interno a $\mathcal{C}$ usando, per approssimarla, reticolazioni via via più fitte con maglia quadrati di lati paralleli agli assi x, y ed essendovi una corrispondenza tramite T tra tali reticolazioni e reticolazioni con rettangoli per le quali ogni volta il rapporto tra un rettangolo e un quadrato della maglia per le regioni interne a $\mathcal{C}$ e $\mathcal{E}$ rispettivamente vale ab, dall'essere l'area del disco unitario uguale a π segue che *la regione interna all'ellisse ha area* πab.
- La trasformazione di equazioni

$$\begin{cases} x' = & ax + by \\ y' = & cx + dy \end{cases},$$

trasforma il quadrato unitario $\mathcal{Q}$ in un parallelogramma di area $|ad - bc|$ e rette parallele agli assi x, y in rette parallele ai lati di tale parallelogramma. Il rapporto tra l'area di un quadrato di lati paralleli agli assi x, y e l'area del parallelogramma in cui è trasformato da T si mantiene costante. Ragionando come sopra, poiché ad ogni approssimazione del valore dell'area del disco unitario $\mathcal{D}$ ottenuta utilizzando una reticolazione mediante quadrati con lati paralleli agli assi x, y corrisponde una approssimazione dell'area della regione $\mathcal{D}' = T(\mathcal{D})$ mediante parallelogrammi trasformati di detti quadrati, si può concludere che le aree di $\mathcal{D}'$ e $\mathcal{D}$ stanno nel rapporto $|ad - bc|$, ovvero Area($\mathcal{D}'$)= $\pi(|ad - bc|)$. In effetti, si potrebbe dimostrare in modo del tutto generale che una trasformazione lineare invertibile T trasforma la circonferenza unitaria $\mathcal{C}$ in un'ellisse, non necessariamente con assi paralleli agli assi del riferimento né con centro nell'origine.

5. Trasformazioni non lineari nel piano euclideo

Esercizio B8.

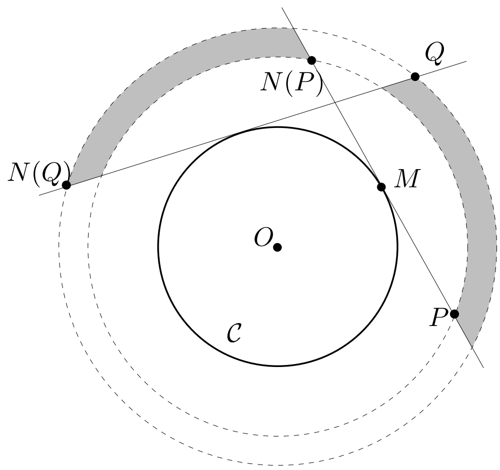
- *Verificare che non sempre N conserva gli allineamenti.*
- *Vi sono rette che sono trasformate in rette da N?*
- *Vi sono circonferenze che sono trasformate in circonferenze da N?*

Soluzione B8:

- Non è difficile rendersi conto che N non conserva tutti gli allineamenti. Ad esempio, se consideriamo una semiretta s uscente da O e su di essa un punto U interno e un punto P esterno a $\mathcal{C}$: infatti i punti O, U sono lasciati fissi da N mentre il punto P viene trasformato in un punto P' che non appartiene più alla semiretta s, evidentemente non tangente a $\mathcal{C}$. Anche se prendiamo su s un altro punto Q esterno a $\mathcal{C}$, per il quale $N(Q) = Q'$, è immediato verificare che le semirette OP' e OQ' stanno su rette diverse, formando un angolo diverso da 0 e da π.
- È immediato riconoscere che N conserva gli allineamenti di punti che si trovano all'interno di $\mathcal{C}$. Ci si rende anche conto facilmente che ci sono semirette trasformate da N in semirette: basta pensare ad una semiretta uscente da un punto M di $\mathcal{C}$ tangenzialmente a $\mathcal{C}$ stesso, nel verso opposto a quello scelto come positivo (Ad esempio, con riferimento alla figura, la semiretta uscente da M e passante per P. In effetti, al di fuori di questi casi non vi sono altri allineamenti che vengono conservati. Se
- N lascia fisse tutte le circonferenze che sono contenute all'interno di $\mathcal{C}$ e trasforma le circonferenze di centro coincidente con il centro O di $\mathcal{C}$ in se stesse. In effetti N lascia fissi tutti gli archi di

circonferenza che sono contenuti all'interno di $\mathcal{C}$, pur potendo essi appartenere a circonferenze che hanno punti esterni a $\mathcal{C}$: per tale motivo la curva immagine di una di tali circonferenze, $\mathcal{C}'$, non è una circonferenza, pur contenendo un arco di circonferenza: se P_1, P_2 sono i punti di $\mathcal{C}$ coincidenti con gli estremi dell'arco di $\mathcal{C}'$ che è contenuto in $\mathcal{C}$, il trasformato di un punto P dell'arco complementare che non appartiene all'intersezione di $\mathcal{C}'$ con la tangente a $\mathcal{C}$ nel punto di mezzo dell'arco P_1P_2 viene trasformato in un punto che non sta su $\mathcal{C}'$. Resta da verificare che ogni circonferenza esterna a $\mathcal{C}$ viene trasformata in una circonferenza solo se è concentrica a $\mathcal{C}$.

Esercizio C1. *È possibile dimostrare che N conserva le aree?*



Soluzione C1: In effetti N conserva le aree. Lo possiamo riconoscere pensando di calcolare approssimazioni (per eccesso o per difetto) dell'area di una figura piana $\mathcal{F}$ e della sua trasformata $N(\mathcal{F})$ utilizzando particolari reticolazioni del piano esterno a $\mathcal{C}$ (poiché all'interno di $\mathcal{C}$ le aree sono evidentemente conservate). Una di tali reticolazioni è fatta come segue, utilizzando di volta in volta rette tangenti a $\mathcal{C}$ e circonferenze concentriche a $\mathcal{C}$: per ogni intero positivo m si può considerare le tangenti in punti che suddividere la circonferenza in m archi uguali e le circonferenze concentriche a $\mathcal{C}$ che intersecano una fissata semiretta per il centro O e per un punto U di $\mathcal{C}$ in punti esterni che distano da U multipli interi di $1/m$. Guardando alla figura presente nel testo del problema ci si può rendere conto che le maglie di un tale reticolato, di diversa forma, vengono trasformate in regioni di stessa area.

6. Importanza delle trasformazioni lineari

Esercizio A6. *Calcolare la trasformazione lineare che meglio approssima $f(x,y) = (x^3 - 3xy^2, 2xy)$ nel punto $P(1,2)$.*

Soluzione A6: Se $Q(1+a, 2+b)$ è un punto vicino a P, si ha

$$\begin{aligned} f(Q) = &\ \big((1+a)^3 - 3(1+a)(2+b)^2, 2(1+a)(2+b)\big) \\ = &\ \big(-11 - 9a - 12b + \dots, 4 + 4a + 2b + \dots\big) \end{aligned}$$

ove con i puntini si intende di trascurare monomi in a, b complessivamente di grado ≥ 2. Quindi la trasformazione lineare che meglio approssima f in P è $A_P(Q) = (-11 - 9a - 12b, 4 + 4a + 2b)$.

7. Inversione circolare

Esercizio B9. *Dimostrare che*

- *$\mathcal{I}$ è biunivoca, $\mathcal{I}^2 = I$ e $\mathcal{I}$ scambia la regione esterna a $\mathcal{C}$ con quella interna;*
- *$\mathcal{I}$ manda rette per O in sé.*

Soluzione B9:

- Risulta immediatamente che se $Q' = \mathcal{I}(Q)$ allora $Q = \mathcal{I}(Q')$, e viceversa. Quindi si ha sempre $Q\mathcal{I}(\mathcal{I}(Q)) = Q$, ovvero $mathcal I^2 = I$ e $\mathcal{I}$ è inversa di se stessa; in particolare, $\mathcal{I}$ è biunivoca. Inoltre, poiché se $|OQ| > r$ si ha $|OQ'| = \frac{r^2}{|OQ|} < r$ e, viceversa, se $|OQ| < r$ si ha $|OQ'| > r$, $\mathcal{I}$ scambia la regione esterna a $\mathcal{C}$ con quella interna;

- Se Q appartiene ad una retta per O, il trasformato $Q' = \mathcal{I}(Q)$ appartiene, per definizione, alla stessa semiretta di origine O passante per Q, quindi una retta per O è complessivamente trasformata in sé.

Esercizio C2. *Dimostrare che*

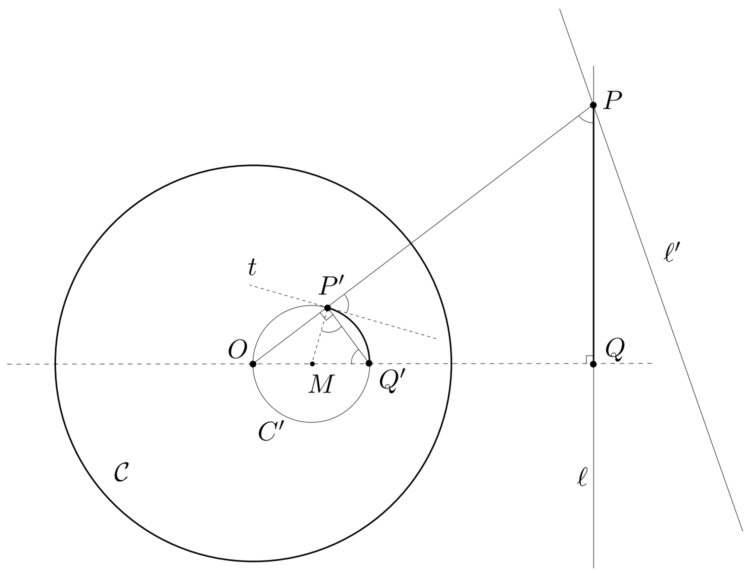
- *$\mathcal{I}$ manda rette non passanti per O in circonferenze passanti per O e viceversa;*
- *$\mathcal{I}$ trasforma cerchi non passanti per O in cerchi non passanti per O;*
- *$\mathcal{I}$ conserva gli angoli.*

Soluzione C2:

- Consideriamo l'inversione $\mathcal{I}$ di centro O che fissa i punti della circonferenza $\mathcal{C}$ di raggio r e siano ℓ e ℓ' due rette non passanti per O, che si incontrano nel punto P.

  Tracciamo la perpendicolare a ℓ passante per O e sia Q il punto di intersezione di questa retta con ℓ. Sia inoltre P un altro punto su ℓ distinto da Q.

  Chiamiamo poi $P' = \mathcal{I}(P)$ e $Q' = \mathcal{I}(Q)$ e sia M il punto medio del segmento OQ'. Vogliamo dimostrare che P' giace sulla circonferenza C' di centro M e raggio $|OM|$, il che farà concludere che ℓ *è trasformata da* $\mathcal{I}$ *nella circonferenza* C' *(privata del punto* O*)*.

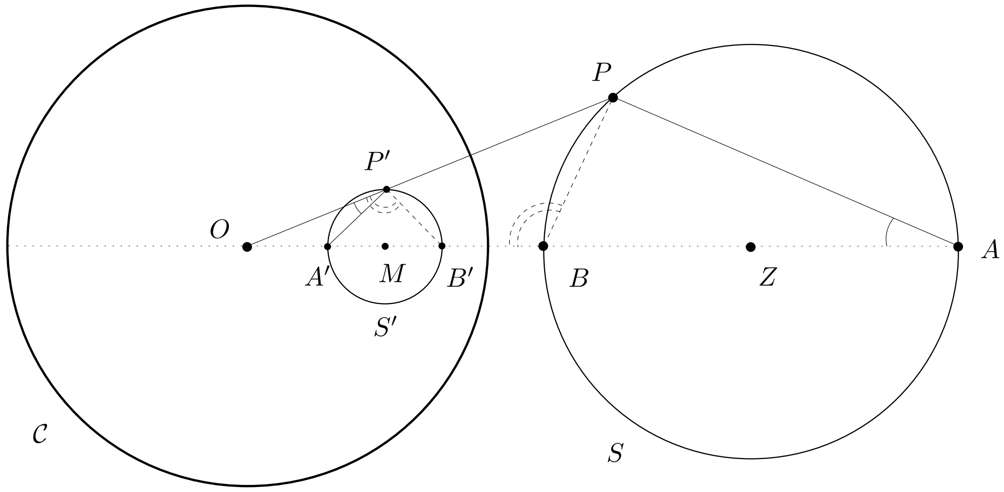


- Osserviamo che i triangoli $OP'Q'$ e OQP sono simili: infatti hanno l'angolo $\widehat{QOP}$ in comune e, per la definizione di inversione, $|OP| \cdot |OP'| = r = |OQ| \cdot |OQ'|$, ovvero $|OP|/|OQ| = |OQ'|/|OP'|$. Dunque, l'angolo $\widehat{OP'Q'}$ è uguale all'angolo $\widehat{OQP}$ che è retto. Nel segue che P' giace sulla circonferenza di centro M e raggio $|OM|$.

  Osserviamo che il segmento QP è trasformato da $\mathcal{I}$ nell'arco di circonferenza C' che va da Q' a P' (in senso anti-orario), mentre il segmento PP' è trasformato in sé.

  Tracciamo ora la retta t tangente a C' nel punto P', che sarà quindi perpendicolare al raggio OP'. Poiché OP e OQ' sono pure perpendicolari, ne segue che l'angolo formato dall'arco $Q'P'$ (ovvero dalla sua tangente t) con il segmento $P'P$ è uguale all'angolo $\widehat{MP'Q'}$, che è a sua volta uguale all'angolo $\widehat{OQ'P'}$, perché il triangolo $Q'MP'$ è isoscele (essendo MQ' e MP' raggi di C'. Per la similitudine dei triangoli $OQ'P'$ e OPQ, tale angolo è uguale a $\widehat{OPQ}$. Dunque $\mathcal{I}$ preserva gli angoli formati da una retta OP passante per O e una retta qualunque ℓ.

  Lo stesso argomento vale per l'angolo formato dalla retta OP e da ℓ'. Ne segue che $\mathcal{I}$ preserva l'angolo formato dalle rette ℓ e ℓ', e quindi *preserva gli angoli*.



- Per l'ultimo punto, consideriamo sempre l'inversione $\mathcal{I}$ rispetto alla circonferenza $\mathcal{C}$ di centro O e raggio r e sia S un'altra circonferenza di centro Z, non passante per O, e sia P un punto di S. Chiamiamo A e B i punti di intersezione di S con la retta che congiunge i centri O e Z. Siano infine $A' = \mathcal{I}(A)$, $B' = \mathcal{I}(B)$, $P' = \mathcal{I}(P)$ e sia S' la circonferenza con diametro $A'B'$ (che avrà quindi centro nel punto M medio di $A'B'$). Vogliamo dimostrare che P' giace su S' ed è sufficiente mostrare che l'angolo $\widehat{A'P'B'}$ è retto.

  Come nel caso precedente, dalla definizione di inversione abbiamo $|OP|\cdot|OP'| = r^2 = |OA|\cdot|OA'|$ e quindi $|OP|/|OA| = |OA'|/|OP'|$, e dunque i triangoli $P'OA'$ e AOP sono simili. Ne segue che gli angoli $\widehat{OP'A'}$ e $\widehat{OAP}$ sono uguali. In modo simile, gli angoli $\widehat{OP'B'}$ e $\widehat{OBP}$ sono uguali.

  Dato che il triangolo APB è rettangolo, ne segue che $\pi/2 = \widehat{ABP} + \widehat{OAP} = (\pi - \widehat{OBP}) + \widehat{OAP}$ e quindi $\pi/2 = \widehat{OBP} - \widehat{OAP} = \widehat{OP'B'} - \widehat{OP'A'} = \widehat{A'P'B'}$, che è quello che volevamo dimostrare.

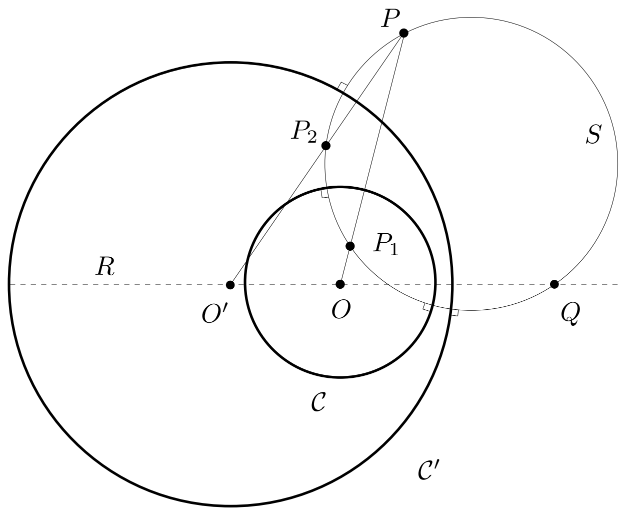
  Concludiamo che $\mathcal{I}(S) = S'$.

Esercizio C3. *Dimostrare che, dati due cerchi $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ contenuti l'uno nell'altro, esiste un'inversione che manda $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ in due cerchi concentrici.*

Soluzione C3: Facciamo un'osservazione preliminare: sia $\mathcal{I}$ l'inversione rispetto a $\mathcal{C}$. È facile vedere (ed è una conseguenza del fatto che $\mathcal{I}$ preserva gli angoli) che, se R è una curva che interseca $\mathcal{C}$ nel punto X e tale che $\mathcal{I}(R) = R$, allora l'angolo in X formato da $\mathcal{C}$ e R è retto. Analoga considerazione vale per l'inversione $\mathcal{I}'$ rispetto a $\mathcal{C}'$.

Per esempio, se R è la retta passante per i centri O, O' di $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$, allora R è trasformata in sé da $\mathcal{I}$ e $\mathcal{I}'$, e in effetti R interseca $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ perpendicolarmente.

Consideriamo ora un punto P non appartenente a né $\mathcal{C}$, né a $\mathcal{C}'$, né a R, e chiamiamo $P_1 = \mathcal{I}(P)$ e $P_2 = \mathcal{I}'(P)$. I punti P, P_1, P_2 sono distinti e non allineati, quindi appartengono ad una sola circonferenza non passante per O e O': sia essa S.



Poiché i punti P, P_1 sono uno interno e uno esterno a $\mathcal{C}$, ne segue che S interseca $\mathcal{C}$: sia X un punto di intersezione. Notiamo che $\mathcal{I}$ trasforma P in P_1, P_1 in P e X in X. Dunque, poiché l'inversione trasforma circonferenze in circonferenze, $\mathcal{I}$ trasforma l'unica circonferenza S passante per P, P_1, X in sé. Dunque S interseca $\mathcal{C}$ perpendicolarmente. Analogamente, $\mathcal{I}'$ trasforma S in sé e quindi S interseca $\mathcal{C}'$ perpendicolarmente.

Si può verificare che S e R si intersecano. In effetti, se così non fosse, S sarebbe tutta contenuta in uno dei semipiani determinati dalla retta R. Inoltre, le due semirette uscenti da O e passanti per $S \cap \mathcal{C}$ dovrebbero essere tangenti a S. Analogamente, anche le due semirette uscenti da O' e passanti per $S \cap \mathcal{C}'$ dovrebbero essere tangenti a S, e questo è impossibile.

Chiamiamo Q un punto di intersezione fra R e S e sia $\mathcal{C}''$ una circonferenza di centro Q. Asseriamo che l'inversione $\mathcal{I}''$ rispetto a $\mathcal{C}''$ manda $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ in circonferenze concentriche.

Infatti, poiché R interseca $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ perpendicolarmente, allora $\mathcal{I}''(R) = R$ interseca $\mathcal{I}''(\mathcal{C})$ e $\mathcal{I}''(\mathcal{C}')$ perpendicolarmente, e dunque R passa per i centri di $\mathcal{I}''(\mathcal{C})$ e $\mathcal{I}''(\mathcal{C}')$.

Inoltre, poiché S interseca $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ perpendicolarmente e passa per Q, allora $\mathcal{I}''(S)$ è una retta che interseca $\mathcal{I}''(\mathcal{C})$ e $\mathcal{I}''(\mathcal{C}')$ perpendicolarmente, e dunque $\mathcal{I}''(S)$ passa per i centri di $\mathcal{I}''(\mathcal{C})$ e $\mathcal{I}''(\mathcal{C}')$.

Concludiamo che $\mathcal{I}''(\mathcal{C})$ e $\mathcal{I}''(\mathcal{C}')$ hanno centro in $\mathcal{I}''(S) \cap R$ e dunque sono concentriche. Quindi $\mathcal{I}''$ è l'inversione cercata.

Porisma di Steiner. *Date γ e $\tilde{\gamma}$ circonferenze tangenti a $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$, la catena generata da γ si chiude all'n-esimo passo se e solo se la catena di $\tilde{\gamma}$ si chiude all'n-esimo passo.*

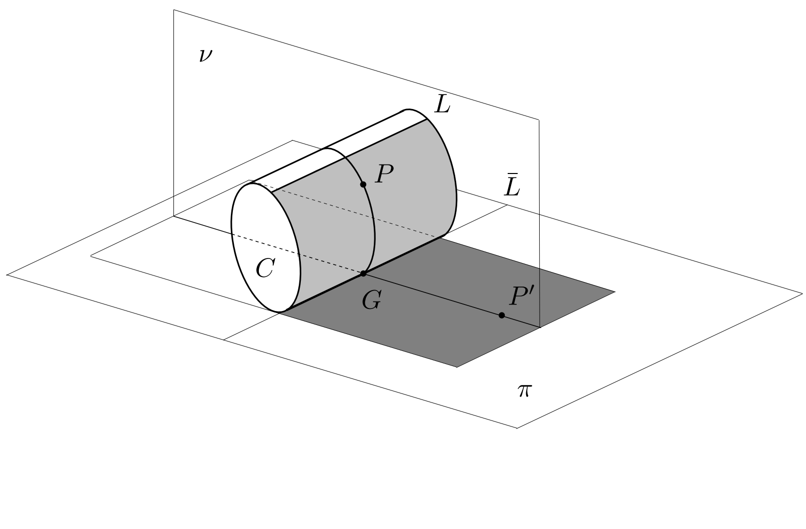
Esercizio B10. *Dimostrare che l'enunciato è vero quando $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ sono concentriche. Usare quindi il risultato dell'Esercizio C3 per concludere la dimostrazione del porisma.*

Soluzione B10: Osserviamo che l'enunciato è chiaramente vero se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ sono concentriche, di stesso centro O e raggi rispettivamente R, R', ad esempio con $r > r'$: infatti ogni circonferenza γ tangente a $\mathcal{C}$ internamente e a $\mathcal{C}'$ esternamente ha raggio costante $r = \frac{R-R'}{2}$ e centro a distanza $d = \frac{R+R'}{2}$ da O; se γ, γ' sono due tali circonferenze si può sempre trasformare una nell'altra con una rotazione di centro O, che trasforma in sé $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$; quindi la catena generata a partire da γ in quella generata a partire da γ'; pertanto tali catene si chiuderanno oppure no simultaneamente. Inoltre, notiamo che le inversioni preservano gli angoli (e quindi le condizioni di tangenza) e mandano cerchi in cerchi. Quindi l'enunciato è vero se e solo se lo è dopo aver applicato una inversione. Per l'Esercizio C3, esiste un'inversione che manda $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ in circonferenze concentriche e questo conclude.

8. Carte geografiche

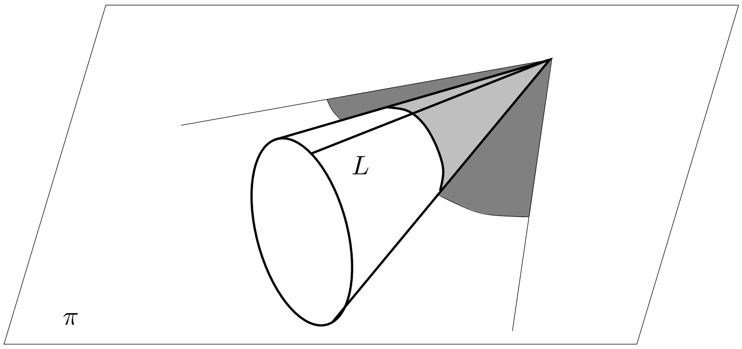
Esercizio B11: il cilindro e il cono ammettono carte isometriche.

- *Sia C un cilindro infinito di raggio r e sia L una sua retta generatrice. Chiamiamo $U = C \setminus L$ il cilindro C privato della sua generatrice L. Costruire una carta geografica di U che preserva le lunghezze.*
- *Sia C' il cono infinito di angolo α ($0 < \alpha < 360°$) nel vertice e sia L' una sua semiretta generatrice. Chiamiamo U' il cono C' privato della sua generatrice L'. Costruire una carta geografica di U' che preserva le lunghezze.*



Soluzione B11:

- Pensiamo il cilindro C appoggiato sul piano π tangente lungo la generatrice $\overline{L}$ simmetrica di L rispetto all'asse del cilindro stesso. Applichiamo la regione U del cilindro sul piano imitando quello che si fa per distendere un rotolo di carta sul piano stesso, flettendolo senza piegarlo, come segue. Dato un punto P di U consideriamo il piano ν per P ortogonale all'asse a di C, il quale interseca U secondo una circonferenza $\dot{\mathcal{C}}$ privata del punto su L e π in un segmento perpendicolare a $\overline{L}$. Sia G il punto di $\overline{L}$ intersezione con ν. P' è il punto sulla semiretta uscente da G perpendicolarmente a $\overline{L}$, a distanza d' uguale alla lunghezza dell'arco $\overset{\frown}{GP}$ ovvero, se φ è l'angolo tra i raggi di $\mathcal{C}$ per G e P, $d' = r\varphi$.
- Una costruzione analoga alla precedente fornisce uno *sviluppo del cono sul piano*, si veda la figura.



Esercizio B12. *Sia P un punto su S. Calcolare la lunghezza ℓ_S della circonferenza che descrive i punti su S che distano d da P*[1]*. Calcolare la lunghezza ℓ di una circonferenza di raggio d nel piano. Confrontando ℓ_S con ℓ, concludere che non è possibile produrre una carta geografica (di una qualunque regione di S) che rispetti tutte le lunghezze.*

Soluzione B12: Consideriamo un punto Q che dista d da P su S sicché, detto α l'angolo formato dai raggi della sfera per P, Q uscenti da O, sarà $d = r\alpha$. La circonferenza $\mathcal{C}$ descritta da Q sulla sfera S appartiene ad un piano, perpendicolare a OP, e su tale piano ha raggio $r' = r\sin\alpha$, quindi lunghezza $\ell_S = 2\pi r\sin\alpha$. D'altra parte, nel piano Euclideo una circonferenza $\overline{C}$ di raggio $d = r\alpha$ ha lunghezza $\ell = 2\pi r\alpha$. Dunque $\ell_S \neq \ell$ per ogni valore di $d = r\alpha, \quad 0 < \alpha \leq \pi$. Non è pertanto possibile che una regione U, pur piccola, di S si possa rappresentare su una porzione di piano (come una carta geografica) in modo tale che in tale rappresentazione tutte le lunghezze siano conservate: considerato sulla sfera un punto p_0 di U e una circonferenza $\mathcal{C}$ di raggio $r = \epsilon$ (sufficientemente piccola da essere) contenuta in U, la circonferenza $\mathcal{C}'$ luogo dei punti del piano che distano dal punto rappresentativo di p_0 una distanza uguale a ϵ ha una lunghezza diversa da quella di $\mathcal{C}$, della quale è immagine.

Esercizio A7.

- *Sia C un cilindro infinito di raggio r nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ e sia Π un piano tangente a C lungo una sua generatrice. Chiamiamo U la regione di C dei punti che distano almeno r da Π. Verificare che la proiezione ortogonale da U su Π non preserva le distanze.*
- *Sia S la sfera di raggio r in $\mathbb{E}^3$ centrata in $(0, 0, 2r)$ e sia Π il piano xy. Chiamiamo U la calotta di S individuata dai punti che distano almeno r da Π. Verificare che la proiezione ortogonale da U a Π non preserva le distanze.*

Soluzione A7:

- La regione U del cilindro, delimitata dalle generatrici g_1, g_2 che distano r da π si proietta ortogonalmente sulla striscia $\mathcal{S}$ del piano Π costituita dai punti interni alle rette parallele r_1, r_2 proiezioni ortogonali di g_1, g_2. Si osserva subito che la lunghezza di segmenti di generatrice si conserva tramite la proiezione. Si osserva però anche che qualunque arco di circonferenza di estremi P_1, P_2 su g_1, g_2 rispettivamente, intersezione di C con un piano perpendicolare all'asse, ha lunghezza $\ell = \pi r$ mentre la sua proiezione ortogonale ha lunghezza $\ell' = 2r \neq \ell$.
- La risposta al secondo quesito segue direttamente da quanto dimostrato in B12. D'altra parte, il fatto che la proiezione ortogonale da U a Π non preserva le distanze può vedersi ad esempio

[1] Ricordiamo che sulla Terra S le distanze si calcolano percorrendo archi di cerchi massimi. Per semplicità possiamo pensare che P sia il polo nord e che questi cerchi massimi siano i meridiani.

osservando che ogni semicerchio massimo della calotta U passante per il polo (nord) $N(0,0,2r)$ ha lunghezza $\ell = r\pi$ mentre la sua proiezione ortogonale sul piano è un segmento di lunghezza $\ell' = 2r$.

8.1. **Proiezione stereografica.**

Consideriamo la superficie sferica S di raggio r nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ e centrata nel punto $(0,0,r)$. Chiamiamo *polo Nord* il punto $N(0,0,2r)$ e sia $\dot{S}$ la regione data da tutta la sfera S privata del polo N. Identifichiamo $\mathbb{E}^2$ con il piano xy di $\mathbb{E}^3$. Allora la **proiezione stereografica** $\pi : \dot{S} \longrightarrow \mathbb{E}^2$ associa ad un punto P della sfera (diverso dal polo Nord) l'unico punto $\pi(P)$ di intersezione fra il piano xy e l'unica retta L_P passante per N e P.

Esercizio B13. *Dato un punto $P(x,y,z)$ della sfera S, determinare un'equazione parametrica per la retta L_P e trovare $\pi(P)$. Dimostrare che π è biunivoca e scrivere esplicitamente l'inversa $\pi^{-1} : \mathbb{E}^2 \longrightarrow \dot{S}$.*

Soluzione B13: Scriviamo le equazioni parametriche della retta $L_P : (tx, ty, tz + 2r(1-t))$, passante per $t = 0, t = 1$ rispettivamente per N, P. L_P incontra Π, di equazione $z' = 0$, quando $tz + 2r(1-t) = 0$, cioè per $t = 2r/(2r - z)$, sicché sostituendo si ha

$$\pi(P) = (\frac{2rx}{2r - z}, \frac{2ry}{2r - z}, 0)$$

Viceversa, dato un punto $Q(x_0, y_0, 0)$ del piano Π, la retta L_Q ha equazioni parametriche $x = tx_0, y = ty_0, z = 2r(1-t))$ e interseca S (oltre che in N per $t = 0$) in corrispondenza al valore di $t \neq 0$ per il quale $(t^2x_0^2 + t^2y_0^2 + [2r(1-t) - r]^2 = r^2$ ovvero, dovendosi escludere il valore 0 del parametro, $t = \frac{4r^2}{x_0^2+y_0^2+4r^2}$. Dunque

$$\pi^{-1}(Q) = \big(x = t_0x_0\,,\, y = t_0y_0\,,\, z = 2r(1-t_0)\big) \qquad , \qquad t_0 = \frac{4r^2}{x_0^2\,+\,y_0^2\,+\,4r^2}$$

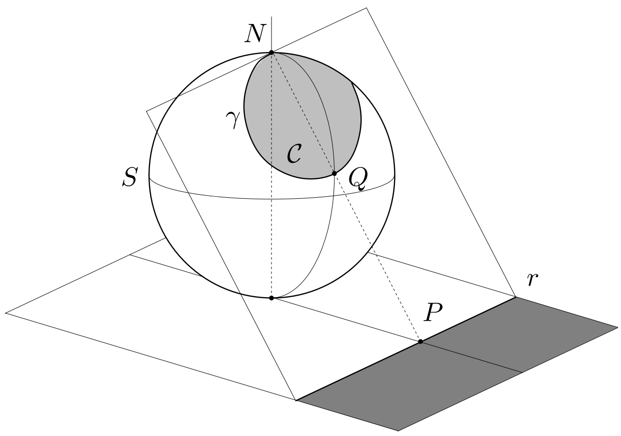
Poiché t_0 esiste sempre ed è unico, la corrispondenza π: $\dot{S} \to \Pi$ è biunivoca.

Esercizio C4: la proiezione stereografica è conforme.

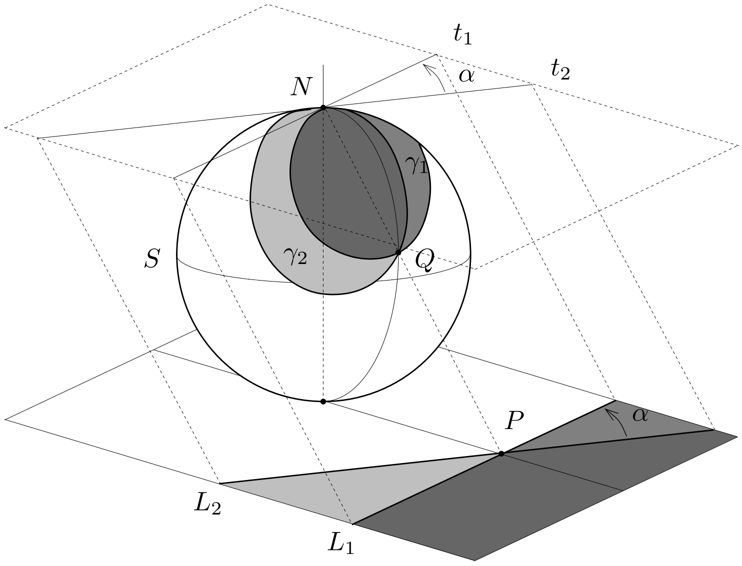
- *Dimostrare che π trasforma circonferenze passanti per N in rette.*
- *Siano L_1, L_2 due rette nel piano $\mathbb{E}^2$ che si intersecano nel punto P formando un angolo α. Siano γ_1 e γ_2 le due circonferenze su S che vengono trasformate da π in L_1 e L_2. Dimostrare che γ_1, γ_2 si intersecano in N formando un angolo α.*
- *Dimostrare che γ_1 e γ_2 si intersecano in $\pi^{-1}(P)$ formando un angolo α, e che quindi π preserva gli angoli.*

Soluzione C4:

- Se la circonferenza γ passa per N allora le rette che la proiettano da N stanno tutte sul piano di γ stessa, che interseca il piano (x,y) in una retta r immagine di γ. Viceversa, ogni retta r del piano x,y è immagine di una circonferenza $\mathcal{C}$ di S, passante per N, intersezione di S stessa con il piano passante per N e contenente r.



- I piani π_1, π_2 delle circonferenze γ_1, γ_2 si intersecano nella retta r per N, P e $Q = \pi^{-1}(P)$.

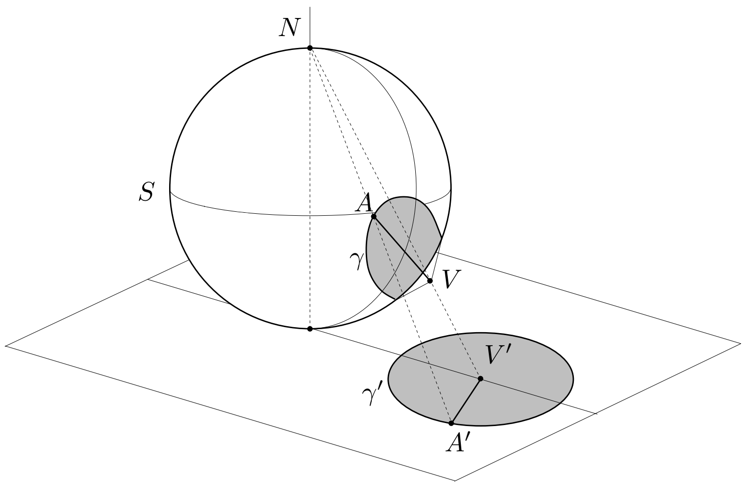


Le tangenti t_1, t_2 a γ_1, γ_2 in N rispettivamente giacciono sul piano tangente a S in N, che è parallelo al piano x, y, e quindi sono parallele a L_1, L_2. Pertanto l'angolo che t_1, t_2 formano è uguale all'angolo α di L_1, L_2.

- I punti $N, Q = \pi^{-1}(P)$ nei quali si intersecano γ_1, γ_2 appartengono a un diametro comune alle due circonferenze. Quindi le tangenti $\bar{t}_1, \bar{t}_2$ nel punto Q a γ_1, γ_2 rispettivamente, sono parallele a t_1, t_2 e formano ancora un angolo α.

Esercizio C5: la proiezione stereografica preserva le circonferenze. *Sia γ una circonferenza sulla sfera S non passante per N. Sia V il vertice del cono tangente a S in γ (V non appartiene a S), d la distanza fra V e γ lungo una generatrice del cono. Dimostrare che $\gamma' = \pi(\gamma)$ è una circonferenza con centro $V' = \pi(V)$.*

Concludere che π manda circonferenze (non passanti per N) in circonferenze.



Soluzione C5: Sia A un punto di γ e sia $A' = \pi(A)$. Il segmento VA è perpendicolare a γ e tangente a S in A. Quindi $V'A'$ sarà un segmento perpendicolare a γ' in A'. Dunque i due triangoli NAV e $NA'V'$ sono simili e $|A'V'|/d = |NV'|/|NV|$. I punti di γ' hanno distanza costante da V e costituiscono la circonferenza di centro V e raggio $d|NV'|/|NV|$.

8.2. **Proiezione cilindrica di Lambert.**

Consideriamo la nostra sfera S nello spazio euclideo centrata in $(0, 0, r)$, con polo nord $N(0, 0, 2r)$ e con polo sud $-N$. Sia $\ddot{S}$ la sfera privata dei due poli e chiamiamo *equatore* di S il cerchio massimo ottenuto intersecando S con il piano $z = r$.

Consideriamo inoltre il cilindro infinito C con asse z e raggio r, che sarà quindi tangente a S all'equatore.

Definiamo la **proiezione cilindrica di Lambert** $L : \ddot{S} \longrightarrow C$ dove $L(P)$ è l'intersezione fra il cilindro C e la retta passante per P e perpendicolare all'asse z.

Esercizio C6: la proiezione di Lambert preserva le aree. *Dimostrare che, componendo L con carte isometriche del cilindro del tipo trovato all'Esercizio B11, si ottengono carte di regioni della sfera S che rispettano le aree.*

Soluzione C6: Reticoliamo la sfera S usando meridiani e paralleli molto fitti. Notiamo che ogni meridiano (dal polo nord al polo sud) ha lunghezza πr e che il parallelo di latitudine ϕ ha lunghezza $r\cos(\phi)$. Allora la regione sferica $\mathcal{R}$ compresa fra i meridiani di longitudine θ e $\theta + \Delta\theta$ e fra i paralleli di latitudine ϕ e $\phi + \Delta\phi$ è approssimativamente un rettangolino con base $r\cos(\phi)\Delta\theta$ e altezza $r\Delta\phi$, che ha dunque area $r^2\cos(\phi)\Delta\theta \cdot \Delta\phi$.

La proiezione di Lambert, seguita dallo sviluppo piano del cilindro, trasforma $\mathcal{R}$ in un rettangolo con base $r\Delta\theta$ e con altezza $r(\sin(\phi + \Delta\phi) - \sin(\phi)) = r[\sin(\phi)(\cos(\Delta\phi) - 1) + \cos(\phi)\sin(\Delta\phi)] \approx r\cos(\phi)\Delta\phi$ (a meno di termini di ordine $(\Delta\phi)^2$, che si possono trascurare), la cui area è quindi $r^2\cos(\phi)\Delta\theta \cdot \Delta\phi$.

Ne segue che la carta preserva le aree.

8.3. **Triangoli sferici.**

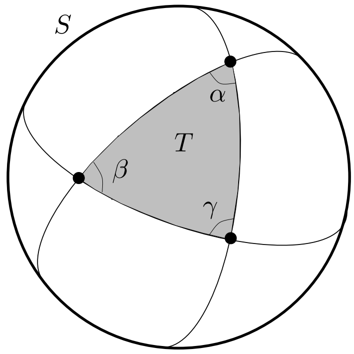
Esercizio B14. *Dimostrare che l'area del fuso sferico $F(\alpha)$ è $2\alpha r^2$.*

Soluzione B14: Ricordiamo che l'area della sfera S di raggio r è $4\pi r^2$. L'area di un fuso sferico $F(\alpha)$ è proporzionale (a r^2 e) all'angolo α; inoltre, se $\alpha = \pi$ essa deve essere uguale a metà dell'area di S. Quindi $\text{Area}(F(\alpha)) = 2\alpha r^2$.

Esercizio C7. *Esprimere il triangolo sferico $T(\alpha, \beta, \gamma)$ come intersezione di fusi sferici e usare l'Esercizio B14 per concludere che l'area del triangolo è $(\alpha + \beta + \gamma - \pi)r^2$. Dedurne che $\alpha + \beta + \gamma > \pi$.*

Soluzione C7: Il triangolo sferico di vertici A, B, C e angoli α, β, γ rispettivamente è contenuto nei fusi sferici $F(\alpha), F(\beta), F(\gamma)$ uscenti dai vertici A, B, C e di angoli α, β, γ. Ci si rende conto facilmente che la somma delle aree di tali fusi è somma di metà dell'area della sfera e del doppio dell'area $A(T)$ del triangolo, cioè risulta $2\pi r^2 + 2A(T) = 2(\alpha + \beta + \gamma)r^2$. Quindi $A(T) = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)r^2$.

Poiché l'area $A(T)$ è sempre positiva, risulta che la somma degli angoli interni di un triangolo sferico è sempre maggiore di π, $\alpha + \beta + \gamma > \pi$, diversamente da quanto accade nel piano euclideo, ove la somma degli angoli interni di un triangolo uguaglia π.



Esercizio B15. *Due viaggiatori partono dal polo Nord su S e viaggiano lungo meridiani distinti (che formano un angolo θ) alla stessa velocità costante v, con l'intenzione di ritrovarsi al polo Sud. Stanchi dell'impresa, non essendosi ancora riuniti dopo un tempo t, decidono di reincontrarsi: il primo viaggiatore propone al secondo di fermarsi e di attendere che lui lo raggiunga seguendo la via lossodromica. Quanto tempo impiegherà? Se la terra fosse piatta (ovvero $r = \infty$), a cosa equivarrebbe la rotta lossodromica? Quanto tempo impiegherebbe il navigatore in questo caso?*

Soluzione B15: Dopo il tempo t ciascuno dei due viaggiatori ha percorso, a partire da N, un arco di meridiano di lunghezza $\ell = vt$ e si trovano sullo stesso parallelo, coincidente con la lossodromica che li congiunge. L'angolo corrispondente a tali archi di meridiano è $\alpha = \frac{vt}{r}$. Il raggio del parallelo su cui si trovano i due viaggiatori è $r' = r\sin\alpha$ e dunque l'arco L di parallelo che uno di essi deve percorrere per raggiungere l'altro ha lunghezza $\ell' = r\theta sin(\frac{vt}{r})$. Evidentemente, il tempo occorrente, viaggiando a velocità costante v, sarà $T = \frac{r\theta\sin(\frac{vt}{r})}{v}$.

Consideriamo il piano Π tangente a S in N. Quando il raggio r di S tende all'infinito la sfera S tende al piano Π e i meridiani per N tendono alle rette di Π per N stesso. I paralleli di S tendono a circonferenze di centro N. In generale, nel piano Π centrato in N, una curva che taglia le rette uscenti da O con angolo costante è una spirale (logaritmica).