1 Azione del normalizzatore $N(H)$ su $\widetilde{X}_H$

Notazioni preliminari. Assumiamo $\widetilde{X}$ e X di Hausdorff, connessi per archi e localmente connessi per archi e anche localmente semplicemente connessi. Sia $p : (\widetilde{X}, \tilde{x}) \to (X, x)$ un rivestimento universale. Sia H un sottogruppo di $\pi_1(X, x)$ e siano $\widetilde{X}_H := \widetilde{X}/H$ e $\tilde{x}_H := [\tilde{x}]$, cosicché abbiamo il rivestimento $p_H : (\widetilde{X}_H, \tilde{x}_H) \to (X, x)$ con $\mathrm{Im}(p_{H,*}) = H$. Denotiamo con $N(H)$ il normalizzatore di H in $\pi_1(X, x)$, ossia il più grande sottogruppo di $\pi_1(X, x)$ nel quale H è normale, che si può anche descrivere come

$$N(H) := \{\gamma \in \pi_1(X, x) \mid \gamma H = H\gamma\}$$

dove γ è da intendersi come un cammino a meno di omotopia ad estremi fissati (indichiamo di solito con e l'elemento neutro di un gruppo).

Lemma 1.1 (Automorfismi non banali di rivestimento non hanno punti fissi)**.** *Sia $p' : \widetilde{X}' \to X$ un rivestimento, in cui gli spazi sono connessi per archi e localmente connessi per archi. Se $f \in \mathrm{Aut}(p')$ fissa un qualunque punto di $\widetilde{X}'$, allora f è l'identità.*

Proof. Supponiamo $f(\tilde{x}') = \tilde{x}'$ per un certo $\tilde{x}' \in \widetilde{X}'$, e sia $x = p'(\tilde{x}')$. Allora

$$\begin{array}{ccc} & & (\widetilde{X}', \tilde{x}') \\ & & \downarrow p' \\ (\widetilde{X}', \tilde{x}') & \xrightarrow{F = p'} & (X, x) \end{array}$$

ed esiste un'unica $\widetilde{F} : (\widetilde{X}', \tilde{x}') \to (\widetilde{X}', \tilde{x}')$ che sollevi $F = p'$ e che soddisfi $\widetilde{F}(\tilde{x}') = \tilde{x}'$. Poiché l'identità di $\widetilde{X}'$ soddisfa le richieste, per unicità segue che $f = \widetilde{F} = \mathrm{Id}_{\widetilde{X}'}$. ☐

Scopo: azione del normalizzatore di H su $\widetilde{X}$. Vogliamo definire $\tau_\gamma \in \mathrm{Homeo}(\widetilde{X}_H)$ per certi $\gamma \in \pi_1(X, x)$.

Tentativo di definizione. Sia $\gamma \in \pi_1(X, x)$ e sia $\tilde{z} \in \widetilde{X}_H$. Vogliamo definire $\tau_\gamma(\tilde{z}) \in \widetilde{X}_H$. Scegliamo $\tilde{\alpha}$ cammino in $\widetilde{X}_H$ da $\tilde{x}_H$ a $\tilde{z}$ e sia $\alpha = p_H \circ \tilde{\alpha}$ un cammino in X da x a $z = p_H(\tilde{z})$. Poniamo $\tau_\gamma(\tilde{z}) := \widetilde{\alpha * \gamma * \alpha^{-1}}(1)$, dove $\widetilde{\alpha * \gamma * \alpha^{-1}}$ è l'unico sollevamento di $\alpha * \gamma * \alpha^{-1}$ che parte in $\tilde{z}$.

Per quali γ il τ_γ è ben definito? Sia $\tilde{\alpha}'$ un altro cammino in $\widetilde{X}_H$ da $\tilde{x}_H$ a $\tilde{z}$ e sia $\tilde{\beta} := \tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}' \in \pi_1(\widetilde{X}_H, \tilde{x}_H)$. Allora $\alpha' * \gamma * (\alpha')^{-1} = \alpha * (\beta * \gamma * \beta^{-1}) * \alpha^{-1}$. Inoltre, $\widetilde{\alpha * \gamma * \alpha^{-1}}(1) = \widetilde{\alpha * (\beta * \gamma * \beta^{-1}) * \alpha^{-1}}(1)$ se e solo se $\widetilde{\beta * \gamma * \beta^{-1}}(1) = \widetilde{\gamma}(1)$ (dove i sollevamenti di questi ultimi due cammini sono fatti a partire da $\tilde{x}_H$), ovvero se e solo se $\beta * \gamma * \beta^{-1} * \gamma^{-1} \in H$. Quest'ultima condizione è equivalente a $\gamma * \beta^{-1} * \gamma^{-1} \in H$. Poiché questo deve valere per ogni scelta di $\tilde{\alpha}'$, e quindi per ogni scelta di $\beta \in H$, otteniamo che la buona definizione è equivalente a $\gamma H = H\gamma$, ossia a $\gamma \in N(H)$.

Il gruppo $N(H)/H$ agisce su $\widetilde{X}$ con automorfismi di rivestimento. Abbiamo quindi ottenuto una applicazione $N(H) \to \mathrm{Homeo}(\widetilde{X})$, che in effetti finisce negli automorfismi $\mathrm{Aut}(p_H)$ del rivestimento p_H. Chiaramente $\tau([\gamma])$ con $\gamma \in H$ corrisponde ad un automorfismo banale, perché $\gamma \in H$ si solleva in $\widetilde{X}$ ad un cammino chiuso. Dunque abbiamo $\tau : N(H)/H \to \mathrm{Aut}(p_H)$. Vogliamo mostrare che τ è un isomorfismo.

Iniettività di τ. L'azione di $N(H)$ sulla fibra $p_H^{-1}(x) \cong \pi_1(X, x)/H$ si identifica con la moltiplicazione a sinistra di $N(H)$ su $\pi_1(X, x)$ e dunque l'azione di $N(H)/H$ su $p_H^{-1}(x)$ è libera, da cui segue che τ è iniettiva.

Suriettività di τ. Per verificare che τ è suriettiva, sia $f : \widetilde{X}_H \to \widetilde{X}_H$ un automorfismo di p_H. Consideriamo $\tilde{\beta}$ un cammino in $\widetilde{X}_H$ da $\tilde{x}_H$ a $f(\tilde{x}_H)$ e sia $\beta = p_H \circ \tilde{\beta} \in \pi_1(X, x)$. Vogliamo dimostrare che $\beta \in N(H)$ e che quindi è ben definito $\tau_\beta \in \mathrm{Aut}(p_H)$, ed inoltre che $f = \tau_\beta$.
Osserviamo che le seguenti mappe sono isomorfismi

$$\pi_1(\widetilde{X}_H, \tilde{x}_H) \xrightarrow{f_*} \pi_1(\widetilde{X}_H, f(\tilde{x}_H)) \xrightarrow{\widetilde{B}} \pi_1(\widetilde{X}_H, \tilde{x}_H)$$

dove $\widetilde{B}$ è l'isomorfismo $\widetilde{B}(\tilde{\gamma}) := \tilde{\beta}^{-1} * \tilde{\gamma} * \tilde{\beta}$. Dunque $H = \mathrm{Im}(p_{H,*}) = \mathrm{Im}(p_{H,*} \circ \widetilde{B} \circ f_*)$. Se $\tilde{\gamma} \in \pi_1(\widetilde{X}_H, \tilde{x}_H)$ e $\gamma = p_{H,*}(\tilde{\gamma}) \in H$, allora $(p_{H,*} \circ \widetilde{B} \circ f_*)(\tilde{\gamma}) = p_{H,*}(\tilde{\beta}^{-1} * f_*(\tilde{\gamma}) * \tilde{\beta}) = \beta^{-1} * \gamma * \beta$. Dunque $\mathrm{Im}(p_{H,*} \circ \widetilde{B} \circ f_*) = \beta^{-1} H \beta$. Ne segue che $H = \beta^{-1} H \beta$ e dunque $\beta \in N(H)$.
Poiché $\tau_\beta(\tilde{x}_H) = f(\tilde{x}_H)$, l'automorfismo $f^{-1} \circ \tau_\beta$ di $\widetilde{X}_H$ fissa $\tilde{x}_H$ e quindi è l'identità. Ne segue che $f = \tau_\beta$.

Proposizione 1.2 (Automorfismi di rivestimento)**.** *Sia $p_H : (\widetilde{X}_H, \tilde{x}_H) \to (X, x)$ rivestimento come sopra.*

(a) La fibra $p_H^{-1}(x)$ si identifica con $\big(H \backslash \pi_1(X, x)\big) \cdot \tilde{x}_H$ come $N(H)/H$-moduli.

(b) $\tau : N(H)/H \to \mathrm{Aut}(p_H)$ è un isomorfismo.

(c) Se H è normale in $\pi_1(X, x)$, allora $\mathrm{Aut}(p_H) \cong \pi_1(X, x)/H$. Se $H = \{e\}$, ossia p_H è un rivestimento universale, allora $\mathrm{Aut}(p_H) \cong \pi_1(X, x)$.

(d) p_H è normale $\iff$ $\mathrm{Aut}(p_H)$ agisce transitivamente sulla fibra $p_H^{-1}(x)$.

Proof. Nel rivestimento universale $p : (\widetilde{X}, \tilde{x}) \to (X, x)$ abbiamo $p^{-1}(x) = \pi_1(X, x) \cdot \tilde{x}$ come $\pi_1(X, x)$-moduli, su cui $\pi_1(X, x)$ agisce a sinistra. Poiché $\widetilde{X}_H := H \backslash \widetilde{X}$, otteniamo $p_H^{-1}(x) = (H \backslash \pi_1(X, x)) \cdot \tilde{x}_H$. Inoltre, se $\beta \in N(H)$, allora $\beta \cdot (H\gamma) \cdot \tilde{x}_H = (\beta H)\gamma \cdot \tilde{x}_H = (H\beta)\gamma \cdot \tilde{x}_H = H(\beta\gamma) \cdot \tilde{x}_H$. Questo dimostra (a).
La (b) è stata mostrata sopra, e da essa segue anche la (c).
Infine, per (a) l'azione di $\mathrm{Aut}(p_H)$ su $p_H^{-1}(x)$ si identifica con l'azione di $N(H)/H$ su $H \backslash \pi_1(X, x)$, e dunque è transitiva se e solo se $N(H) = \pi_1(X, x)$, ossia se e solo se H è normale (e quindi p_H è un rivestimento normale). Questo dimostra la (d). □

Corollario 1.3 (Rivestimenti normali sono quozienti per azioni di gruppi)**.** *Un rivestimento $p' : (\widetilde{X}', \tilde{x}') \to (X, x)$ è normale se e solo se $\overline{p}' : \widetilde{X}'/G \to X$ è un omeorfismo con $G = \mathrm{Aut}(p')$.*

2 Azioni libere e propriamente discontinue di gruppi discreti

La definizione più standard di azione propriamente discontinua di un gruppo topologico G su uno spazio topologico X richiede che l'applicazione $G \times X \to X \times X$ che manda $(g,\ x) \to (x,\ g \cdot x)$ sia propria.
Noi adottiamo la seguente definizione non standard, che però è ritagliata meglio per le nostre necessità.

Definizione 2.1 (Definizione non standard)**.** Sia G un gruppo discreto che agisce su $\widetilde{X}$. Diciamo che l'azione è **propriamente discontinua** se per ogni $\tilde{z} \in \widetilde{X}$ esiste un intorno $\widetilde{U} \subset \widetilde{X}$ di $\tilde{z}$ tale che $\sigma(\widetilde{U}) := \{g \in G \mid \widetilde{U} \cap (g \cdot \widetilde{U}) \neq \emptyset\}$ sia finito.

Con la definizione non standard sopra, non è necessaria alcuna ipotesi di locale compattezza per $\widetilde{X}'$ nell'enunciato seguente.

Lemma 2.2 (Quozienti per azioni libere e propriamente discontinue sono rivestimenti)**.** *Sia G un gruppo discreto che agisce in modo libero e propriamente discontinuo su $\widetilde{X}'$. Allora*

(a) $p' : \widetilde{X}' \to \widetilde{X}'/G$ è un rivestimento.

(b) p' è un rivestimento normale e $\mathrm{Aut}(p') \cong G$.

Proof. Per la (a), sia $z \in \widetilde{X}'/G$ e sia $\tilde{z} \in (p')^{-1}(z)$. Sia $\widetilde{U} \subset \widetilde{X}'$ un intorno compatto di $\tilde{z}$ tale che $\sigma(\widetilde{U})$ sia finito. Sia $\sigma(\widetilde{U}) = \{g_0 = e, g_1, \dots, g_k\}$.
Per la proprietà di Hausdorff, esiste $\widetilde{Z} \subset \widetilde{X}'$ intorno chiuso di $\tilde{z}$ tale che $\widetilde{Z} \cap (G \cdot \tilde{z}) = \tilde{z}$.
Allora $\widetilde{W} := \widetilde{U} \cap \widetilde{Z}$ è un intorno compatto di $\tilde{z}$ tale che $\widetilde{W} \cap (G \cdot \tilde{z}) = \tilde{z}$ e quindi $\tilde{z} \notin g \cdot \widetilde{W}$ per ogni $g \in G \setminus \{e\}$.
Chiamiamo $\mathrm{int}(\widetilde{W})$ la parte interna di $\widetilde{W}$, che è un intorno aperto di $\tilde{z}$, e sia ora $\widetilde{V} := \widetilde{W} \setminus \bigcup_{i=1}^k \big(g_i \cdot \mathrm{int}(\widetilde{W})\big)$, che è un intorno compatto di $\tilde{z}$.
Chiaramente $\widetilde{V} \cap (g \cdot \widetilde{V}) = \emptyset$ se $g \notin \sigma(\widetilde{U})$ ed inoltre $\widetilde{V} \cap (g_i \cdot \widetilde{V}) \subseteq \widetilde{V} \cap (g_i \cdot \widetilde{W}) = \emptyset$ per $i = 1, \dots, k$. Da cui segue che $\sigma(\widetilde{V}) = \{e\}$.

Chiamiamo $V := p'(\widetilde{V}) \ni z$, cosicché $(p')^{-1}(V) = (p')^{-1}(p'(V)) = \bigcup_{g\in G}(g \cdot \widetilde{V})$. Quindi V è un intorno di z ben rivestito da p'. Poiché questo argomento vale per ogni punto $z \in \widetilde{X}'/G$, la mappa p' è un rivestimento.

Per la (b), osserviamo che l'azione di G su $\widetilde{X}'$ definisce un omomorfismo $G \to \mathrm{Aut}(p')$. Tale omomorfismo è iniettivo, perché l'azione è libera. Inoltre, G agisce transitivamente sulle fibre di p'. Per la proposizione precedente, p' è un rivestimento normale e quindi $G \cong \mathrm{Aut}(p')$. □

Esercizio 1. Sia S una superficie connessa, compatta, orientabile, non omeomorfa a S^2 o al toro, e sia $b \in S$. Siano $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_g, \beta_g$ generatori standard del $\pi_1(S, b)$. Fissato $n \geq 2$, sia H il sottogruppo di $\pi_1(S, b)$ generato da $\alpha_1, \beta_1^n, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_g, \beta_g$. Provare a disegnare $\widetilde{S}_H$ e il rivestimento $p_H : \widetilde{S}_H \to S$. Dire inoltre se p_H sia normale.