Esercizi di topologia algebrica (16 dicembre 2018)

Esercizio 1. Sia Σ_g una superficie compatta, connessa e orientata di genere $g \geq 0$ e sia S_k la superficie ottenuta come somma connessa[1] di k copie di $\mathbb{RP}^2$. Calcolare l'anello di coomologia di Σ_g e di S_k a coefficienti in $\mathbb{Z}$ e in $\mathbb{Z}/2$ (considerare prima i casi $g = 1$ e $k = 1$).

Esercizio 2. Sia $d \geq 1$ e sia $F : \mathbb{CP}^n \to \mathbb{CP}^n$ la mappa $F([Z_0 : Z_1 : \cdots : Z_n]) := [Z_0^d : Z_1^d : \cdots : Z_n^d]$. Calcolare $F^* : H^*(\mathbb{CP}^n; \mathbb{Z}) \to H^*(\mathbb{CP}^n; \mathbb{Z})$, iniziando prima dal caso $n = 1$.

Esercizio 3. Siano $k, l \geq 1$. Calcolare tutte le possibili $f^* : H^*(S^k \times S^l; \mathbb{Z}) \to H^*(S^{k+l}; \mathbb{Z})$ al variare delle mappe $f : S^{k+l} \to S^k \times S^l$.

Esercizio 4. Siano $X = S^3 \times \mathbb{CP}^\infty$ e $Y = (S^1 \times \mathbb{CP}^\infty)/(S^1 \times \{P\})$, dove $P = [1 : 0 : 0 : \cdots : 0]$. Dire se le R-algebre di coomologia $H^*(X; R)$ e $H^*(Y; R)$ sono isomorfe, per $R = \mathbb{Z}$ e per $R = \mathbb{Z}/p$.

Esercizio 5. Sia X un complesso di celle e sia $\Sigma X := X \times [0, 1]/\sim$ la sua sospensione, dove $(x, 0) \sim (x', 0)$ e $(x, 1) \sim (x', 1)$ per ogni coppia $x, x' \in X$. Calcolare l'anello di coomologia $H^*(\Sigma X; R)$ in funzione di $H^*(X; R)$ per $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p$.

Def. Considerare la successione esatta corta $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2 \to 0$ indotta dalla moltiplicazione per 2. Per ogni spazio topologico X, è indota una successione esatta lunga in coomologia $\ldots \to H^i(X; \mathbb{Z}) \to H^i(X; \mathbb{Z}) \to H^i(X; \mathbb{Z}/2) \to H^{i+1}(X; \mathbb{Z}) \to \ldots$. L'applicazione $b : H^i(X; \mathbb{Z}/2) \to H^{i+1}(X; \mathbb{Z})$ è detta *omomorfismo di Böckstein*.

Esercizio 6.

(a) Calcolare $H^*(\mathbb{RP}^3; \mathbb{Z}/2)$ come $\mathbb{Z}/2$-algebra e $H^*(\mathbb{RP}^3 \times \mathbb{RP}^3; \mathbb{Z})$ come gruppo abeliano.

(b) Calcolare l'immagine dell'omomorfismo di Böckstein $b : H^*(X; \mathbb{Z}/2) \to H^{*+1}(X; \mathbb{Z})$ per $X = \mathbb{RP}^3$ e per $X = \mathbb{RP}^3 \times \mathbb{RP}^3$.

(c) Calcolare il morfismo di anelli $H^*(\mathbb{RP}^3 \times \mathbb{RP}^3; \mathbb{Z}) \to H^*(\mathbb{RP}^3 \times \mathbb{RP}^3; \mathbb{Z}/2)$.

(d) Calcolare l'anello di coomologia $H^*(\mathbb{RP}^3 \times \mathbb{RP}^3; \mathbb{Z})$.

[1] La somma connessa $M_1 \# M_2$ di due varietà M_1, M_2 di dimensione n si ottiene considerando due dischi chiusi $D_1 \subset M_1$ e $D_2 \subset M_2$ di dimensione n e incollando $M_1 \setminus \mathring{D}_1$ con $M_2 \setminus \mathring{D}_2$ tramite un omeomorfismo $\partial D_1 \to \partial D_2$.