# Esercizi di topologia algebrica (27 settembre 2018)

**Def.** Il *cono* $\mathrm{Cone}(K)$ con *base* il complesso simpliciale $K$ è il join di $K * \{v\}$, dove $\{v\}$ è un complesso simpliciale con il solo 0-simplesso $v$, che si dice *vertice del cono.*

**Esercizio 1.** Sia $s$ un simplesso del complesso simpliciale $K$. Dimostrare che il cono $|\mathrm{Cone}(\dot{s})|$ è omeomorfo a $|s|$.

**Esercizio 2.** Sia $K$ un complesso simpliciale. Dimostrare che le seguenti proprietà sono equivalenti.

(a) $K$ è localmente finito (ossia ogni simplesso $s \in K$ è faccia di numero finito di simplessi più grandi)

(b) $|K|$ è localmente compatto

(c) l'identità $|K| \to |K|_d$ è un omeomorfismo

(d) $|K|$ è metrizzabile

(e) $|K|$ soddisfa il primo assioma di numerabilità (ossia ogni punto di $|K|$ ha un sistema fondamentale di intorni numerabile).

**Esercizio 3.** Sia $K$ un complesso simpliciale. Dato un simplesso $s = \{v_0, \dots, v_q\} \in K$, sia $\mathrm{st}(s) := \mathrm{st}(v_0) \cap \cdots \cap \mathrm{st}(v_q) \subseteq |K|$.

(a) Dimostrare che $\mathrm{st}(s)$ è un intorno aperto del simplesso aperto $\langle s \rangle$.

(b) Dimostrare che $\mathrm{st}(s)$ è contraibile (ossia esistono $\beta \in \mathrm{st}(s)$ e $F : \mathrm{st}(s) \times [0,1] \to \mathrm{st}(s)$ tali che $F(\alpha, 0) = \beta$ e $F(\alpha, 1) = \alpha$ per ogni $\alpha \in \mathrm{st}(s)$).

**Def.** Un *cammino simpliciale da $v$ a $v'$* su $K$ è una collezione ordinata $v_\bullet = (v = v_0, v_1, v_2, \dots, v_N = v')$ di vertici di $K$ tali che $\{v_{i-1}, v_i\} \in K_1$ per ogni $i = 1, \dots, N$. Il cammino si dice *semplice* se tutti i $v_0, v_1, \dots, v_N$ sono distinti, e si dice *chiuso* se $v = v'$. Ad ogni cammino simpliciale $v_\bullet$ possiamo associare una 1-catena simpliciale $\sum_{i=1}^{N} [v_{i-1}, v_i] \in C_1(K)$.

**Esercizio 4.** Sia $K$ un complesso simpliciale.

(a) Dimostrare che $|K|$ è connesso se e solo se $|K|$ è connesso per archi.

(b) Dimostrare che $|K|$ è connesso per archi se e solo se per ogni coppia di vertici $v, v'$ di $K$ esiste un cammino simpliciale da $v$ a $v'$.

(c) Sia $\{v_k\}$ una collezione di vertici di $K$ tali che esista esattamente un $\delta_{v_k} \in |K|$ in ogni componente connessa di $|K|$. Dimostrare che l'omomorfismo $\bigoplus_k \mathbb{Z} v_k \to H_0(K)$ che manda $v_k$ nella classe della 0-catena $[v_k]$ è un isomorfismo.

(d) Dimostrare che il gruppo abeliano $Z_1(K)$ degli 1-cicli simpliciali è generato dalle 1-catene associate a cammini simpliciali semplici chiusi.