Esercizi di Geometria 1

Foglio 2 - Alcune soluzioni

Esercizio 9

(a) Considerare $W = \mathbb{C}^3$ con il prodotto hermitiano h standard. Utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt, ortonormalizzare la seguente base di W rispetto ad h:

$$\mathcal{B} = \left\{ w_1 = \begin{pmatrix} i \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ i \end{pmatrix}, \right\}$$

(b) Calcolare la matrice che rappresenta (rispetto alla base $\mathcal{B}$) la riflessione ortogonale rispetto al sottospazio U generato da $\{w_2, w_3\}$.

Svolgimento

(a) Per Gram-Schmidt, la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{C}^3$ definita come segue

$$v_1 := w_1, \quad v_2 := w_2 - \frac{h(w_2, v_1)v_1}{h(v_1, v_1)}, \quad v_3 := w_3 - \frac{h(w_3, v_1)v_1}{h(v_1, v_1)} - \frac{h(w_3, v_2)v_2}{h(v_2, v_2)}$$

è ortogonale. Dunque una base ortonomale $\mathcal{C} = \{z_1, z_2, z_3\}$ si ottiene ponendo

$$z_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}, \quad z_2 := \frac{v_2}{\|v_2\|}, \quad z_3 := \frac{v_3}{\|v_3\|}.$$

Per determinare v_2 calcoliamo $h(v_1, v_1) = 2$ e $h(w_2, v_1) = -1$, da cui

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} i \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per determinare v_3 calcoliamo $h(w_3, v_1) = -1$, $h(w_3, v_2) = \frac{1}{2}$ e $h(v_2, v_2) = \frac{1}{2}$, da cui

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ i \end{pmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} i \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1/2}{1/2} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$$

e calcoliamo ancora $h(v_3, v_3) = 1$. Quindi

$$z_1 = \frac{v_1}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}i \\ 0 \end{pmatrix}, \; z_2 = \sqrt{2}v_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ 0 \end{pmatrix}, \; z_3 = \frac{v_3}{1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}.$$

(b) Sia $r : W \to W$ la riflessione ortogonale rispetto ad $U = \mathrm{Span}\{w_2, w_3\}$.

Si calcola facilmente che un vettore ortogonale a U è e_1, in quanto $h(e_1, w_2) = h(e_1, w_3) = 0$. Dunque $\{e_1\}$ è una base di $U^\perp$ e notiamo che $h(e_1, e_1) = 1$.

Dato quindi un vettore $w \in W$, la proiezione ortogonale di w su $U^\perp$ è $\pi_{U^\perp}(w) = h(w, e_1)e_1$ e la proiezione ortogonale su U è dunque $\pi_U(w) = w - h(w, e_1)e_1$. Ne segue che $r(w) = \pi_U(w) - \pi_{U^\perp}(w) = w - 2h(w, e_1)e_1$.

Applicando tale calcolo a w_1, considerando che $h(w_1, e_1) = i$, otteniamo

$$r(w_1) = w_1 - 2h(w_1, e_1)e_1 = w_1 - 2i\, e_1 = \begin{pmatrix} -i \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} = -w_1 - 2w_2$$

Chiaramente $r(w_2) = w_2$ e $r(w_3) = w_3$, in quanto $w_2, w_3 \in U$.

Concludiamo che

$$[r]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 10

Considerare lo spazio vettoriale reale $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ dei polinomi di grado al più 2 nella indeteminata t e sia

$$b(p, q) := p(0)q(0) - p(-1)q(-1) + \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

una forma bilineare simmetrica su V.

(a) Trovare una base ortogonale per V rispetto a b e determinare gli indici di positività, negatività e nullità di b.

(b) Sia $U \subset V$ il sottospazio vettoriale dei polinomi costanti. Descrivere $U^\perp$ per mezzo di una equazione lineare.

(c) Calcolare l'applicazione π di proiezione ortogonale su U ed esibire la matrice $[\pi]_{\mathcal{C}}$ che la rappresenta rispetto alla base canonica $\mathcal{C} = \{p_0 = 1, p_1 = t, p_2 = t^2\}$.

Svolgimento

(a-b) Prendiamo la base canonica $\mathcal{C} = \{p_0 = 1, p_1 = t, p_2 = t^2\}$ di V. Rispetto a tale base canonica, calcoliamo

$$[b]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{4} \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{4} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Cerchiamo una base ortogonale $\mathcal{B} = \{q_0, q_1, q_2\}$ *di* V *per* b.

Il vettore p_0 *non è isotropo per* b. *Possiamo dunque porre* $q_0 := p_0$ *e* $U = \mathbb{R}q_0$.

Calcoliamo $U^\perp$, *ossia lo spazio dei polinomi* $p = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ *tali che* $b(p, q_0) = 0$. *Otteniamo*

$$b(p, q_0) = a_0 + \frac{3}{2}a_1 - \frac{2}{3}a_2 = 0$$

ossia $U^\perp = \{p = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid 6a_0 + 9a_1 - 4a_2 = 0\}$.

Un vettore non isotropo in $U^\perp$ *è per esempio* $q_1 = 3 - 2t$, *che soddisfa* $b(q_1, q_1) = -\frac{35}{3} \neq 0$.

Troveremo infine q_2 *in* $U^\perp \cap (\mathbb{R}q_1)^\perp$. *I polinomi in* $(\mathbb{R}q_1)^\perp$ *sono quei* $p = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ *tali che* $0 = b(q_1, p) = 3a_0 + 3a_1\frac{3}{2} - 3a_2\frac{2}{3} - 2a_0\frac{3}{2} + 2a_1\frac{2}{3} - 2a_2\frac{5}{4} = \frac{35}{6}a_1 - \frac{9}{2}a_2$, *ossia* $35a_1 + 27a_2 = 0$. *Si calcola quindi che una soluzione è* $q_2 = 383 - 162t + 210t^2$.

Concludiamo che una base ortogonale è

$$\mathcal{B} = \{q_0 = 1, q_1 = 3 - 2t, q_2 = 383 - 162t + 210t^2\}.$$

Per calcolare gli indici, abbiamo $b(q_0, q_0) = 1 > 0$. *Inoltre* $b(q_1, q_1) < 0$ *come visto sopra. Infine,* $\det([b]_\mathcal{C}) = \frac{247}{240} + \frac{11}{20} - \frac{103}{108} > 0$. *Ne segue che* $b(q_2, q_2) < 0$ *e dunque*

$$n_0 = 0,\ n_+ = 1,\ n_- = 2.$$

(c) La proiezione ortogonale $\pi : V \to V$ *su* U *si scrive come*

$$\pi(q) := \frac{b(q, p_0)}{b(p_0, p_0)}p_0 = b(p, p_0)p_0$$

Dunque $\pi(p_0) = b(p_0, p_0)p_0 = p_0$, $\pi(p_1) = b(p_1, p_0)p_0 = \frac{3}{2}p_0$ *e* $\pi(p_2) = b(p_2, p_0)p_0 = -\frac{2}{3}p_0$, *e concludiamo che*

$$[\pi]^\mathcal{C}_\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$