Esercizi di Geometria 1

Foglio 1 - Alcune soluzioni

Esercizio 2.4

Siano q_1, q_4 le forme quadratiche

(i-$\mathbb{R}$)	$q_1(x) = 8x_2^2 - 3x_1^2 + 2x_1x_2$	in $V = \mathbb{R}^2$;
(i-$\mathbb{C}$)	$q_1'(x) = 8x_2^2 - 3x_1^2 + 2x_1x_2$	in $V = \mathbb{C}^2$;
(iv)	$q_4(x) = \|x_1\|^2 - \|x_2\|^2 + \|x_3\|^2 + ix_1\bar{x}_3 - ix_3\bar{x}_1$	in $V = \mathbb{C}^3$.

Per ciascuna delle forme bilineari simmetriche b associate a q_1 o delle forme hermitiane h associate a q_1', q_4', rispondere ai seguenti quesiti.

(a) Scrivere la matrice $[b]_{\mathcal{E}}$ (risp. $[h]_{\mathcal{E}}$), dove $\mathcal{E}$ è la base standard di V.

(b) Trovare almeno un vettore isotropo per b (risp. per h).

(c) Determinare $\mathrm{Rad}(b)$ (risp. $\mathrm{Rad}(h)$) e una sua base $\mathcal{B}_0$.

(d) Trovare un complementare U di $\mathrm{Rad}(b)$ (risp. di $\mathrm{Rad}(h)$) in V.

(e) Determinare una base $\mathcal{B}$ di V che sia di Sylvester per b (risp. per h).

(f) Scrivere la matrice di b (risp. di h) e la forma quadratica associata rispetto alla base $\mathcal{B}$, e determinarne gli indici di nullità τ_0, negatività τ_- e positività τ_+.

(g) Verificare che $([id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}})^t\,[b]_{\mathcal{E}}[id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = [b]_{\mathcal{B}}$ (risp. $([id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}})^t\,[h]_{\mathcal{E}}\overline{[id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}} = [h]_{\mathcal{B}}$).

Svolgimento

(a) Denotiamo con B_1 la matrice simmetrica associata a b_1 e con H_1, H_4 le matrici hermitiane associate a h_1', h_4. Abbiamo allora

$$B_1 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad H_1 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad H_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & -1 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e in effetti

$$\begin{aligned} b_1(v,w) &= -3v_1w_1 + v_1w_2 + v_2w_1 + 8v_2w_2 \\ h_1(u,z) &= -3u_1\bar{z}_1 + u_1\bar{z}_2 + u_2\bar{z}_1 + 8u_2\bar{z}_2 \\ h_4(u,z) &= u_1\bar{z}_1 + iu_1\bar{z}_3 - iu_3\bar{z}_1 - u_2\bar{z}_2 + u_3\bar{z}_3 \end{aligned}$$

Per definizione, $[b_1]_{\mathcal{E}} = B_1$, $[h_1]_{\mathcal{E}} = H_1$ e $[h_4]_{\mathcal{E}} = H_4$.

(b) *Nel caso (i-$\mathbb{R}$), cerchiamo* $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq 0$ *tale che* $0 = q_1(x) = -3x_1^2 + 2x_1x_2 + 8x_2^2$. *Poiché un tale vettore con* $x_2 = 0$ *non esiste, possiamo supporre che* $x_2 \neq 0$ *e quindi, a meno di riscalare* x*, possiamo supporre* $x = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$. *L'equazione diventa dunque* $-3t^2 + 2t + 8 = 0$, *da cui* $t = -2, \frac{4}{3}$. *Dunque* $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *oppure* $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ *sono isotropi. D'altra parte,* $\det(B_1) = -25 \neq 0$, *dunque* b_1 *è non degenere e* $\mathrm{Rad}(b) = \{0\}$. *Quindi gli* x *trovati sono isotropi ma non nel radicale.*

Nel caso (i-$\mathbb{C}$), lo stesso conto ci dà lo stesso risultato: $z = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *oppure* $z = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ *sono isotropi ma non nel radicale di* h_1.

Nel caso (iv), i vettori e_1 *e* e_2 *sono ortogonali e hanno* $h_4(e_1, e_1) = 1$ *e* $h_4(e_2, e_2) = -1$. *Ne segue che* $z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 + e_2$ *è isotropo. D'altra parte,* $h_4(z, e_1) = h_4(e_1 + e_2, e_1) = 1$ *e dunque* $z \notin \mathrm{Rad}(b)$.

(c) *Come discusso in (b),* b_1 *e* h_1 *sono non degeneri e dunque* $\mathrm{Rad}(b_1) = \{0\}$ *e* $\mathrm{Rad}(h_1) = \{0\}$.

Per quanto riguarda h_4*, ricordiamo che* $\mathrm{Rad}(h_4) = \overline{\ker(H_4)} = \ker(\overline{H}_4)$. *La matrice* $\overline{H}_4$ *invece ha rango chiaramente* 2 *e il suo nucleo è generato da* $u_0 = e_3 + ie_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Ne segue che, in questo caso,* $\mathcal{B}_0 = \{u_0\}$.

(d) *Nel caso (i) reale o complesso, abbiamo* $U = V$.

Nel caso (iv), completiamo $\mathcal{B}_0$ *ad una base di* $V = \mathbb{C}^3$ *usando vettori della base canonica, per esempio* $\{u_0, e_1, e_2\}$. *Dunque possiamo prendere* $U = \mathrm{Span}\{e_1, e_2\}$ *e chiaramente* $V = \mathrm{Rad}(h_4) \oplus U$.

(e) *Nel caso (i-$\mathbb{R}$), il vettore* e_1 *non è isotropo: dunque possiamo porre* $v_1 := e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Ora un vettore ortogonale a* v_1 *avrà la forma* $e_2 + te_1$ *per qualche* $t \in \mathbb{R}$. *Calcoliamo* $b_1(v_1, e_2 + te_1) = -3t + 1$ *e dunque* $e_2 + \frac{1}{3}e_1$ *(e anche il suo triplo* $e_1 + 3e_2$*) è ortogonale a* v_1. *Poniamo quindi* $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. *Ne segue che* $\{v_1, v_2\}$ *è una base* b_1*-ortogonale di* V. *Calcoliamo ora* $b(v_1, v_1) = -3$ *e* $b(v_2, v_2) = -3 + 48 + 6 = 51$ *e dunque poniamo* $\hat{v}_1 := \frac{v_1}{\sqrt{3}}$ *e* $\hat{v}_2 := \frac{v_2}{\sqrt{51}}$, *ottenendo così la base di Sylvester* $\mathcal{B}_1 = \{\hat{v}_1, \hat{v}_2\}$ *per* b_1.

Nel caso (i-$\mathbb{C}$), lo stesso conto di cui sopra ci dà la base ortogonale $\{z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\}$. *Ora definiamo* $\hat{z}_1 := \frac{z_1}{\sqrt{3}}$ *e* $\hat{z} := \frac{z_2}{\sqrt{51}}$. *Dunque* $\mathcal{B}_1' = \{\hat{z}_1, \hat{z}_2\}$ *è una base di Sylvester per* h_1.

Nel caso (iv), notiamo che la base trovata $\{e_1, e_2\}$ *di* U *è già ortogonale per* $h_4|_U$*, e inoltre* $h_4(e_1, e_1) = 1$ *e* $h_4(e_2, e_2) = -1$*. Prendiamo allora* $u_1 := e_1$ *e* $u_2 := e_2$*. Ne segue che* $\mathcal{B}_4 = \{u_0, u_1, u_2\}$ *è una base di Sylvester per* h_4*.*

(f) Dal calcolo precedente in (e) si ha

$$[b_1]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [h_1]_{\mathcal{B}'_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [h_4]_{\mathcal{B}_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Da cui $\tau_0(b_1) = \tau_0(h_1) = 0$*,* $\tau_+(b_1) = \tau_+(h_1) = 1$ *e* $\tau_-(b_1) = \tau_-(h_1) = 1$*. Inoltre,* $\tau_0(h_4) = \tau_+(h_4) = \tau_-(h_4) = 1$*.*

(g) Facciamo questa verifica, come esempio, solo nel caso (iv).

$$[id]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}_4} = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e la sua coniugata è

$$\overline{[id]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}_4}} = \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e ora

$$\begin{aligned} ([id]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}_4})^t \, [h_4]_{\mathcal{E}} \overline{[id]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}_4}} &= \begin{pmatrix} i & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & -1 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & i \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = [h_4]_{\mathcal{B}_4} \end{aligned}$$