Esercizi di Geometria 1

Foglio 0 - Alcune soluzioni

Esercizio 3

Si consideriano i seguenti punti di $\mathbb{R}^3$ al variare del parametro reale t:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \; D_t = \begin{pmatrix} t \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il valore $t = \bar{t}$ per il quale $A, B, C, D_{\bar{t}}$ appartengano ad uno stesso piano affine $\Pi \subset \mathbb{R}^3$. Esibire un'equazione cartesiana per Π.

Svolgimento

Poiché $\Pi = \mathrm{Span}_{aff}\{A, B, C\}$, *si ha* $\overrightarrow{\Pi} = \mathrm{Span}\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ *dove* $\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ *e* $\overrightarrow{AC} = C - A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dal calcolo $\mathrm{Ann}(\overrightarrow{\Pi}) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 19 & -7 & 2 \end{pmatrix}$, *si ottiene che* $\overrightarrow{\Pi} = \{v \in \mathbb{R}^3 \,|\, 19v_1 - 7v_2 + 2v_3 = 0\}$. *Dato che* $(19e_1^* - 7e_2^* + 2e_3^*)(A) = 12$, *abbiamo anche* $\boxed{\Pi = \overrightarrow{\Pi} + A = \{P \in \mathbb{R}^3 \,|\, 19p_1 - 7p_2 + 2p_3 = 12\}}$.

Sostituendo le coordinate di D_t *nell'equazione di* Π *otteniamo* $D_t \in \Pi \iff 19t - 35 - 10 = 12$, *ossia se e solo se* $\boxed{t = 3}$. *Ne segue che*

$$\boxed{D = D_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}}.$$

(b) Verificare che $\mathcal{P} = (A, B, C)$ è un riferimento affine per Π. Calcolare le coordinate baricentriche $[D]_{\mathcal{P}}$ del punto $D = D_{\bar{t}}$ rispetto a $\mathcal{P}$. È vero che D appartiene all'inviluppo convesso di $\{A, B, C\}$?

Svolgimento

Essendo $\overrightarrow{AB}$ *e* $\overrightarrow{AC}$ *non nulli e non proporzionali,* $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ *è un insieme di vettori linearmente indipendenti e dunque genera un sottospazio vettoriale* $\overrightarrow{\Pi} \subset \mathbb{R}^3$ *di dimensione* 2. *Ne segue che* $\{A, B, C\}$ *sono un riferimento affine del piano affine* Π.

Vogliamo determinare $a, b, c \in \mathbb{R}$ *con* $a+b+c = 1$ *tali che* $aA+bB+cC = D$, *o equivalentemente* $\overrightarrow{AD} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$. *Poiché* $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$, *la condizione può scriversi come*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Questo è un sistema di tre equazioni lineari con due incognite, ma sappiamo già che tale equazione ha un'unica soluzione (essendo A, B, C un riferimento affine di Π). Dunque è sufficiente guardare due equazioni indipendenti tra le tre, ovvero selezionare due righe indipendenti della matrice: per esempio le prime due. Otteniamo dunque il sistema in due equazioni e due incognite

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

che ha soluzione

$$\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

E dunque $a = 1-(b+c) = 0$. Ne segue che le coordinate baricentriche di D rispetto al riferimento affine (A, B, C) di Π sono $\boxed{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}$.

Poiché non è vero che tutte le coordinate baricentriche a, b, c appartengono all'intervallo $[0, 1]$, ne segue che $\boxed{\textit{D non appartiene all'inviluppo convesso di } \{A, B, C\}}$.

(c) Calcolare equazioni cartesiane per le rette L per A, B e L' per C, D. Calcolare $L \cap L'$.

Svolgimento

$\overrightarrow{L} = \mathbb{R}\overrightarrow{AB} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\operatorname{Ann}(\overrightarrow{L}) = \ker(0\ 2\ 7) = \operatorname{Span}\{e_1^*, 7e_2^* - 2e_3^*\}$.

Dunque $\overrightarrow{L} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v_1 = 0,\ 7v_2 - 2v_3 = 0\}$ *e* $\boxed{L = \overrightarrow{L} + A = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid p_1 = 1,\ 7p_2 - 2p_3 = 7\}}$, *dato che* $e_1^*(A) = 1$ *e* $(7e_2^* - 2e_3^*)(A) = 7$.

Similmente, $\overrightarrow{L}' = \mathbb{R}\overrightarrow{CD} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$ *e* $\operatorname{Ann}(\overrightarrow{L}') = \ker(1\ 1\ -6) = \operatorname{Span}\{e_1^* - e_2^*, 6e_1^* + e_3^*\}$. *Dunque* $\overrightarrow{L}' = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v_1 - v_2 = 0,\ 6v_1 + v_3 = 0\}$ *e* $\boxed{L' = \overrightarrow{L}' + C = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid p_1 - p_2 = -2,\ 6p_1 + p_3 = 13\}}$, *dato che* $(e_1^* - e_2^*)(C) = -2$ *e* $(6e_1^* + e_3^*)(C) = 13$.

Infine $L \cap L' = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid p_1 = 1,\ 7p_2 - 2p_3 = 7,\ p_1 - p_2 = -2,\ 6p_1 + p_3 = 13\}$ *e si trova facilmente che* $\boxed{L \cap L' = \{B\}}$.

(d) Determinare l'applicazione affine $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B$, $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = C$, $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = D$.

Svolgimento

Notiamo che $\overrightarrow{f}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=\overrightarrow{f}(e_2)=\overrightarrow{BD}=\begin{pmatrix}2\\2\\-12\end{pmatrix}$ *e che* $\overrightarrow{f}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=\overrightarrow{f}(e_1)=D-C=\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}1\\1\\-6\end{pmatrix}$. *Ne segue che* $\overrightarrow{f}=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\\-6&-12\end{pmatrix}$.

Infine, se $f(P)=\overrightarrow{f}(\overrightarrow{OP})+v$, *determiniamo* v *imponendo per esempio che* $f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=B$, *ovvero che* $\overrightarrow{f}(e_1)+v=\begin{pmatrix}1\\1\\-6\end{pmatrix}+v=\begin{pmatrix}1\\3\\7\end{pmatrix}$, *da cui otteniamo* $v=\begin{pmatrix}1\\3\\7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\13\end{pmatrix}$. *Concludiamo che*

$$\boxed{f(P)=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\\-6&-12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2\\13\end{pmatrix}}.$$

Esercizio 4

Si consideriano i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$:

$$R=\left\{x\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;\begin{array}{l}x_1-x_3=-1,\\x_2-1=0\end{array}\right\}$$

$$R'=\left\{x\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;\begin{array}{l}x_2-3x_1=-5,\\x_3-4x_1=-10\end{array}\right\}$$

$$\Pi=\left\{x\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;4x_1+x_2-5x_3=-4\right\}$$

$$\Pi'=\left\{x\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;5x_1+18x_2-16x_3=-55\right\}$$

(a) Esibire, se esiste, un'affinità $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tale che $f(R)\subseteq R'$ e $f(\Pi)\subseteq\Pi'$.

Svolgimento

Analizziamo intanto le posizioni reciproche di R *e* Π. *Abbiamo* $\overrightarrow{R}=\{v\in\mathbb{R}^3\,|\,v_1-v_3=0,\ v_2=0\}$ *e* $\overrightarrow{\Pi}=\{v\in\mathbb{R}^3\,|\,4v_1+v_2-5v_3=0\}$. *Poiché* $\det\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\4&1&-5\end{pmatrix}\neq 0$, *ne segue che le tre equazioni lineari sono indipendenti e quindi* $\overrightarrow{R}\oplus\overrightarrow{\Pi}=\mathbb{R}^3$. *Abbiamo visto in classe che questo implica che* $R\cap\Pi$ *consista esattamente di un punto: chiamiamolo* P.

Similmente, analizziamo le posizioni reciproche di R' e Π'. Abbiamo $\overrightarrow{R}' = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid -3v_1 + v_2 = 0,\ -4v_1 + v_3 = 0\}$ e $\overrightarrow{\Pi}' = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid 5v_1 + 18v_2 - 16v_3 = 0\}$. Poiché $\det \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ 5 & 18 & -16 \end{pmatrix} \neq 0$, *ne segue che le tre equazioni lineari sono indipendenti e quindi $\overrightarrow{R}' \oplus \overrightarrow{\Pi}' = \mathbb{R}^3$. Come sopra, esiste un unico punto in $R' \cap \Pi'$, che chiameremo P'.*

Scegliamo ora una base $\{v_1\}$ di $\overrightarrow{R}$ e una base $\{v_2, v_3\}$ di $\overrightarrow{\Pi}$, in modo che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ sia una base di $\mathbb{R}^3$ e $(P, \mathcal{B})$ sia un riferimento affine di $\mathbb{R}^3$.

In modo simile, scegliamo $\{v_1'\}$ una base di $\overrightarrow{R}'$ e $\{v_2', v_3'\}$ una base di $\overrightarrow{\Pi}'$, in modo che $\mathcal{B}' = \{v_1', v_2', v_3'\}$ sia una base di $\mathbb{R}^3$ e $(P', \mathcal{B}')$ sia un riferimento affine di $\mathbb{R}^3$.

Sappiamo che esiste ed è unica l'affinità $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che manda $(P, \mathcal{B})$ in $(P', \mathcal{B}')$. Essa inoltre soddisferà $f(R) = R'$ e $f(\Pi) = \Pi'$ per costruzione.

Per determinarla numericamente, calcoliamo $P = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *e* $P' = \begin{pmatrix} 25 \\ 70 \\ 90 \end{pmatrix}$. *Inoltre possiamo scegliere* $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2' = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $v_3' = \begin{pmatrix} 18 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Poiché $\begin{pmatrix} 1 & 16 & 18 \\ 3 & 0 & -5 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ *rappresenta l'automorfismo lineare di $\mathbb{R}^3$ che manda la base canonica in $\mathcal{B}'$ e* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *rappresenta l'automorfismo lineare di $\mathbb{R}^3$ che manda la base canonica in $\mathcal{B}$, abbiamo* $\overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} 1 & 16 & 18 \\ 3 & 0 & -5 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$. *Calcoliamo quindi* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 5 \\ 5 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ *e* $\overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} 148 & 33 & -147 \\ -32 & -8 & 35 \\ 9 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

Infine, se $f(Q) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OQ}) + w$, calcoliamo w imponendo $f(P) = P'$, ossia $w = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OP})$ da cui $w = \begin{pmatrix} 25 \\ 70 \\ 90 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 148 & 33 & -147 \\ -32 & -8 & 35 \\ 9 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 207 \\ 33 \\ 104 \end{pmatrix}$. *Concludendo,* $\boxed{f(Q) = \begin{pmatrix} 148 & 33 & -147 \\ -32 & -8 & 35 \\ 9 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 207 \\ 33 \\ 104 \end{pmatrix}}$.

(b) Ammesso che esista, dire se una tale f è unica. Se è unica, dimostrarlo; se f non è unica, esibire due applicazioni distinte che soddisfino le condizioni al punto (a).

Svolgimento

Dalla discussione svolta al punto (a), è chiaro che tale f esiste ma non è unica. In effetti, fissati v_1, v_2, v_3 esiste esattamente una f per ogni scelta della tripla $\{v_1', v_2', v_3'\}$, dove $\{v_1'\}$ è una base di $\overrightarrow{R}'$ e $\{v_2', v_3'\}$ è una base di $\overrightarrow{\Pi}'$.

Con le scelte fatte in (a), è sufficiente prendere gli stessi P, P' e $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ e scegliere una nuova $\mathcal{B}' = \{2v_1', v_2', v_3'\}$ per ottenere un'altra applicazione affine che soddisfi le condizioni richieste.