Esercizi di Geometria 1

Foglio 6 (7 gennaio 2016)

(esercizi analoghi potranno essere chiesti all'esame scritto o orale)

11 Proiettività.

Esercizio 11.1

Mostrare che l'applicazione

$$\begin{aligned} \mathrm{Aff}(\mathbb{K}^n) &\hookrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{KP}^n) \\ f &\longmapsto \hat{f} \end{aligned}$$

che associa ad ogni affinità $f(X) = AX + b$ la proiettività $\hat{f}[X_0 : X] := [X_0 : AX + bX_0]$ è un omomorfismo iniettivo di gruppi.

Esercizio 11.2

Siano $E_i = [e_i] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ per $i = 0, 1, 2$ ed $U = [1 : 1 : 1]$. Si consideri la proiettività $F : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che $F(E_0) = U$, $F(E_1) = E_0$, $F(E_2) = E_1$ e $F(U) = E_2$.

(i) Determinare $F[X_0 : X_1 : X_2]$ e una matrice che rappresenta F.

(ii) Calcolare i punti fissi di F.

(iii) Se $\check{F} : \mathbb{R}^2 \dashrightarrow \mathbb{R}^2$ è la restrizione di F alla parte affine di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, calcolare il dominio $D(\check{F})$ e l'immagine $Im(\check{F})$ di $\check{F}$.

Esercizio 11.3

Sia $F : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ proiettività rappresentata da $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) Calcolare $F[X_0 : X_1 : X_2]$ e $F^{-1}[X_0 : X_1 : X_2]$.

(ii) Determinare l'equazione cartesiana della retta r passante per $P_1 = [1 : 0 : 1]$ e $P_2 = [1 : 1 : 0]$, e l'equazione cartesiana della sua immagine $F(r)$.

(iii) Calcolare l'equazione cartesiana di $F(s)$, dove s è la retta $\{X_0 - X_1 + X_2 = 0\}$.

(iv) Calcolare $D(\check{F})$ e $Im(\check{F})$ della restrizione $\check{F}$ di F alla (X_0-)parte affine di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (ossia al complementare della retta proiettiva di equazione $X_0 = 0$).

Esercizio 11.4

Siano $H_1 \neq H_2$ due iperpiani paralleli di $\mathbb{K}^n$, e $C \notin H_1 \cup H_2$. La *proiezione centrale di H_1 su H_2 da C* è l'applicazione

$$\begin{aligned} \pi_C :\ H_1 &\longrightarrow H_2 \\ P &\longmapsto r_{CP} \cap H_2 \end{aligned}$$

dove r_{CP} è la retta passante per C e P.

(i) Mostrare che per ogni $P \in H_1$ effettivamente $r_{CP} \cap H_2$ è un punto.

(ii) Scegliere coordinate affini su H_1 ed H_2 e mostrare che π_C è un'applicazione affine (che applicazione affine è?).

Esercizio 11.5
Siano $H_1 \neq H_2$ iperpiani non paralleli di $\mathbb{K}^n$, e $C \notin H_1 \cup H_2$.
La *proiezione centrale di* H_1 *su* H_2 *da* C è definita come nell'Esercizio 11.3.

(i) Mostrare che, in questo caso, $\pi_C : H_1 \dashrightarrow H_2$ è definita solo su $H_1 \setminus R_1$, dove $R_1 = H_1 \cap (C + \vec{H}_2)$ è l'iperpiano di H_1 ottenuto intersecando H_1 con l'iperpiano $C + \vec{H}_2$ parallelo a H_2 e passante per C.

(ii) Mostrare che π_C è iniettiva ma non suriettiva, e $Im(\pi_C) = H_2 \setminus R_2$, dove $R_2 = (C + \vec{H}_1) \cap H_2$ è l'iperpiano di H_2 ottenuto intersecando H_2 con l'iperpiano $C + \vec{H}_1$ parallelo a H_1 e passante per C.

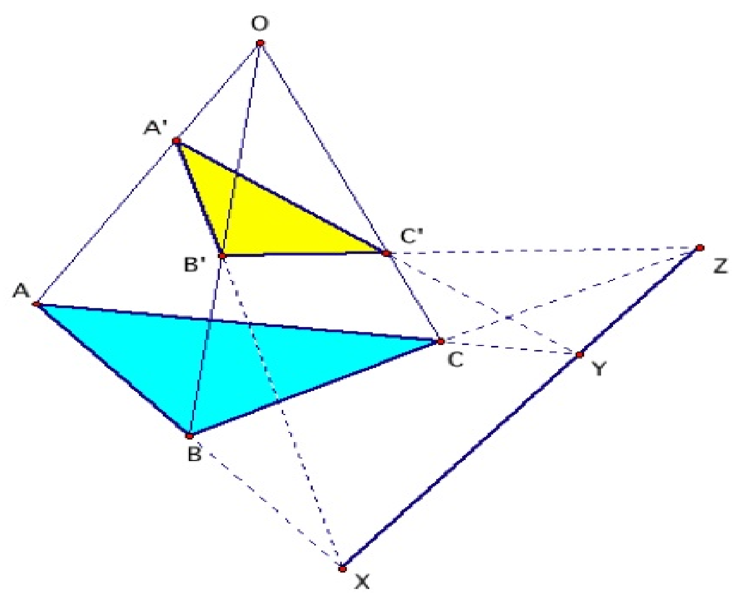
(iii) Scelte coordinate affini su H_1 ed H_2 (identificandoli così con $\mathbb{K}^{n-1}$), mostrare che $\pi_C : H_1 \setminus R_1 \to H_2 \setminus R_2$ è la restrizione di un'applicazione proiettiva (ossia del tipo $X \mapsto \frac{AX}{p(x_1,\dots,x_n)}$, con $p \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ polinomio di grado 1).

Nota. La *proiezione centrale* può essere definita con maggiore facilità in ambito proiettivo: dati $H_1 \neq H_2$ iperpiani di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ e $C \notin H_1 \cup H_2$, la proiezione centrale di H_1 su H_2 da C è la mappa $\pi_C : H_1 \to H_2$ data da $\pi_C(P) = r_{CP} \cap H_2$. Nel caso proiettivo, π_C è definita su tutto H_1 !

Esercizio 11.7
Siano (A, B, C) e (A', B', C') due triangoli di $\mathbb{R}^n$.
I due triangoli si dicono *in prospettiva centrale da un punto* O se le rette su cui giacciono AA', BB' e CC' si incontrano tutte in O.
I due triangoli si dicono *in prospettiva assiale dalla retta* r se i tre punti $x = r_{A,B} \cap r_{A',B'}$, $y = r_{A,C} \cap r_{A',C'}$ e $z = r_{B,C} \cap r_{B',C'}$ sono allineati su r.

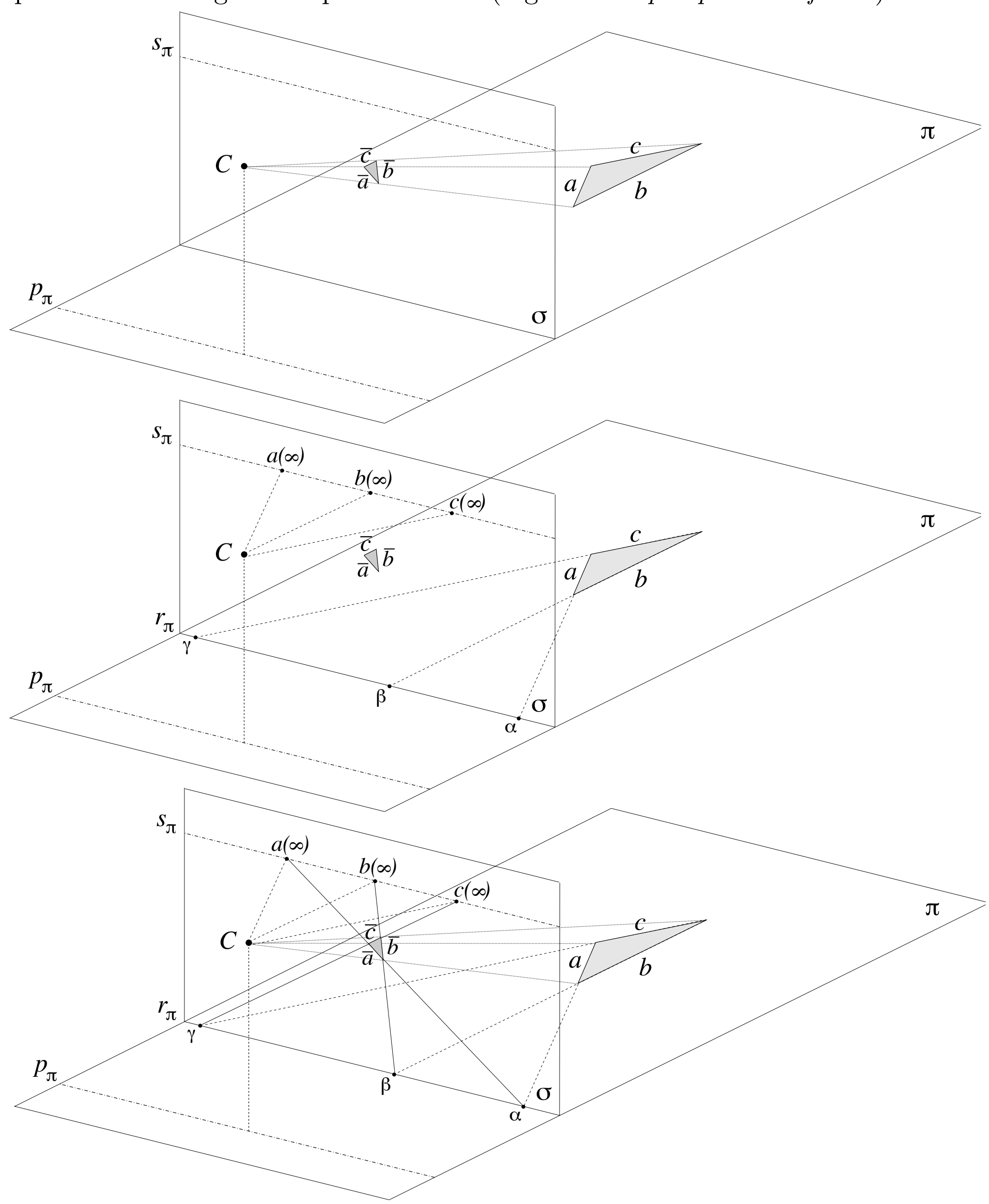
(a) Ragionando sulla figura riportata qui di seguito dimostrare il
Teorema di Desargues (in $\mathbb{R}^2$): *due triangoli* (A, B, C) *e* (A', B', C') *sono in prospettiva centrale se e solo se sono in prospettiva assiale.*
Suggerimento: interpretare la figura qui sotto come una proiezione di una figura tridimensionale.

(b) Dire se $\mathrm{CR}(A, C, D, Y) = \mathrm{CR}(A', C', D', Y)$, dove $D = OB \cap AC$ e $D' = OB' \cap A'C'$.



Note.
1. In realtà il Teorema di Desargues vale in $\mathbb{R}^2$ *a meno di alcune eccezioni evidenti* (...quali?). L'ambito naturale nel quale esso è valido senza eccezioni è $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.
2. Il Teorema di Desargues vale in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, per ogni $n \geq 2$.

Esercizio 11.8 *(Regole della prospettiva)*
Ricordarsi le regole per la costruzione prospettica studiate a scuola.
Quindi interpretare lo schema seguente che rappresenta la costruzione, sul piano di disegno σ, di un triangolo in prospettiva $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ a partire da un triangolo reale abc posto su un piano π. In particolare:
(i) dire cosa rappresenta matematicamente la "linea di orizzonte" s_π associata a π, e cosa rappresentano i "punti di fuga" $a(\infty), b(\infty), c(\infty)$ associati ad a, b, c;
(ii) enunciare chiaramente la regola per la costruzione del triangolo $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ a partire dalla sola conoscenza dei punti α, β, γ e dei punti di fuga $a(\infty), b(\infty), c(\infty)$;
(iii) dedurre matematicamete tale regola dal teorema di Desargues;
(iv) fissati due punti di fuga F, F' su s_π (cosa rapresentano?), spiegare come riportare su σ un generico punto P di π (regole della *prospettiva bifocale*).



12 Coniche proiettive.

Esercizio 12.1 Consideriamo le forme quadratiche nell'Esercizio 2.3 e 2.4(i)-(ii)-(iii) del Foglio 2. Interpretarle come equazioni di quadriche proiettive, determinarne la forma canonica proiettiva (su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$) e, in ciascun caso, una proiettività di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ che le porti in forma canonica.

Esercizio 12.2 Consideriamo la chiusura proiettiva algebrica delle coniche negli Esercizi 6.5 e 6,6 del Foglio 4. In ciascun caso, determinare una proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ che le porti in forma canonica (per $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$).
Stesse domande per la chiusura proiettiva delle quadriche reali all'Esercizio 7.2 del Foglio 4: determinare una proiettività di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ che le porti in forma canonica.
Come si può stabilire la forma canonica proiettiva reale/complessa di ciascuna di esse senza trovare esplicitamente una proiettività che le porta in forma canonica?

Esercizio 12.3 Siano $\mathcal{C}$ una conica irriducibile ed r una retta di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$:
(i) mostrare che si ha sempre $1 \leq \text{card}(\mathcal{C} \cap r) \leq 2$;
(ii) mostrare che il caso $1 = \text{card}(\mathcal{C} \cap r)$ è "*eccezionale*": e cioè che, in tal caso, per ogni $\epsilon > 0$ piccolo a piacere, esiste una conica $\mathcal{C}_\epsilon$ la cui equazione ha coefficienti che differiscono da quelli di C di meno di ϵ, e $\text{card}(\mathcal{C}_\epsilon \cap r) = 2$;
(iii) trovare controesempi (irriducibili!) ad (i) nel caso di coniche e rette in $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{C}^2$ e $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Nota. $\mathcal{C}$ *irriducibile* (sul $\mathbb{K}$) significa che se $g = 0$ è la sua equazione, allora $g \neq g_1 \cdot g_2$ con g_i polinomi non costanti di grado inferiore (a coefficienti in $\mathbb{K}$).
Quali sono le coniche affini reali e le coniche proiettive reali irriducibili?
Quali sono le coniche affini complesse e le coniche proiettive complesse irriducibili?

Esercizio 12.4 Siano $\mathcal{C} \neq \mathcal{C}'$ due coniche irriducibili di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$:
(i) mostrare che si ha sempre $1 \leq \text{card}(\mathcal{C} \cap \mathcal{C}') \leq 4$;
(ii) mostrare che i casi $\text{card}(\mathcal{C} \cap \mathcal{C}') \leq 3$ sono "eccezionali" nel senso sopra specificato
(iii) trovare controesempi ad (i) nel caso di coniche in $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{C}^2$ e $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.
Questo spiega che l'ambiente più naturale per trattare le coniche (e le curve algebriche in generale) è lo spazio proiettivo complesso, che tiene conto sia dei possibili punti all'infinito, sia delle possibili soluzioni non reali.

Suggerimento per (i): utilizzare il fatto che esiste una proiettività che trasforma la conica $\mathcal{C}$ in una conica la cui (x_0-)parte affine ha equazione $x_1 = x_2^2$ (perché?), e discutere le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \mathcal{C}: & x_1 = x_2^2 \\ \mathcal{C}': & \sum_{i,j=1,2} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1,2} b_i x_i + c = 0 \end{cases}$$

tenendo conto che le intersezioni possono anche trovarsi sulla retta all'infinito H_0....

Nota. Questo è un caso particolare del celebre *Teorema di Bezout*:
"*due curve irriducibili $\mathcal{C} \neq \mathcal{C}'$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, di gradi p e p' rispettivamente, si incontrano in al più $p \cdot p'$ punti; e i punti di intersezione, se contati con la giusta molteplicità sono precisamente $p \cdot p'$*"
(per una definizione precisa di "molteplicità" per i punti di intersezione).

Altri esercizi utili sullo spazio proiettivo, sottospazi, proiettività e coniche proiettive *con soluzioni dettagliate*, possono essere trovati nel libro:

Fortuna-Frigerio-Pardini: "Geometria proiettiva: problemi risolti e richiami".