Esercizi di Geometria 1

Foglio 5 (18 dicembre 2015)

(esercizi analoghi potranno essere chiesti all'esame scritto o orale)

9. Punti all'infinito e chiusura proiettiva.

Esercizio 9.1

Si determini l'insieme $S(\infty)$ dei punti di aderenza all'infinito dei sottoinsiemi $S \subset \mathbb{R}^2_{x,y}$ seguenti:

(i) il grafico della funzione $f(x) = \sin x$;

(ii) il grafico della funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$;

(iii) il grafico della funzione $f(x) = x \sin x$;

(iv) la *spirale logaritmica*, parametrizzata da $\alpha(t) = e^{(1+i)t} = e^t(\cos t, \sin t)$;

(v) la *cissoide*, di equazione $y^2 = \frac{x^3}{(2-x)}$;

(vi) la *parabola cubica*, di equazione $y^3 = x^2$.

Dire in quali casi $S(\infty) = \widehat{S} \cap H_0$, dove $\widehat{S}$ è la chiusura proiettiva algebrica e H_0 è l'iperpiano all'infinito.

Esercizio 9.2

Si determini l'insieme dei punti all'infinito:

(i) di ciascuna delle coniche euclidee (degeneri e non degeneri) in forma canonica;

(ii) delle coniche dell' esercizio 7.2 del Foglio 4;

(iii) delle coniche affini complesse in forma canonica.

Esercizio 9.3

Si determini l'insieme dei punti all'infinito di ciascuna delle quadriche di $\mathbb{R}^3$ (degeneri e non degeneri) in forma canonica. Identificare H_0 con $\mathbb{RP}^2$, e descrivere in ciascun caso cosa sia geometricamente l'insieme $Q(\infty) = \widehat{Q} \cap H_0$.

Esercizio 9.4

Determinare l'insieme dei punti all'infinito e le equazioni cartesiane della chiusura proiettiva (algebrica) dei seguenti sottospazi affini di $\mathbb{K}^n$:

(i) la retta r di $\mathbb{K}^3$ passante per $P = (1, 0, 1)$ e parallela a $v = (1, -1, 0)$;

(ii) il sottospazio T di $\mathbb{K}^4$ di equazioni $x_1 - x_2 = x_3 + 2x_4 - 2 = x_1 + x_3 + 1 = 0$.

Esercizio 9.5

Determinare l'insieme dei punti all'infinito e le equazioni cartesiane della parte affine (rispetto all'immersione $j_0 : \mathbb{K}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ data da $j_0(x_1, \dots, x_n) = [1 : x_1 : \dots : x_n]$) dei seguenti sottospazi proiettivi:

(i) il piano π di $\mathbb{P}^3(\mathbb{K})$ di equazione $X_1 - X_2 + X_3 = 0$;

(ii) la retta r di $\mathbb{P}^3(\mathbb{K})$ di equazioni $X_0 - X_1 = X_2 - X_3 = 0$;

(iii) il sottospazio S di $\mathbb{P}^5(\mathbb{K})$ di equazioni $X_0 - X_5 = X_1 + X_2 + X_3 = 0$.

In ciascun caso determinare la dimensione dell'insieme dei punti all'infinito.

Esercizio 10.1
Dimostrare che:
(i) dati due punti distinti $P = [p_0, p_1, p_2], Q = [q_0, q_1, q_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ esiste una e una sola retta di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ che contiene P e Q, e determinare la sua equazione cartesiana nelle coordinate omogenee standard $[X_0 : X_1 : X_2]$;
(ii) dati due punti distinti $P = [p_i], Q = [q_i] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ esiste una e una sola retta di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ che contiene P e Q, e determinare sue equazioni cartesiane nelle coordinate omogenee standard $[X_0 : X_1 : \cdots : X_n]$.

Esercizio 10.2
Dimostrare che:
(i) dati tre punti non allineati $P = [p_i], Q = [q_i], R = [r_i] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{K})$ (cioè non contenuti in una retta proiettiva) esiste uno e un solo piano di $\mathbb{P}^3(\mathbb{K})$ che li contiene, e determinare la sua equazione cartesiana nelle coordinate omogenee standard $[X_0 : X_1 : X_2 : X_3]$;
(ii) dati $n+1$ punti distinti $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, sotto quale condizione (algebrica, nelle coordinate omogenee dei P_k) esiste uno e un solo iperpiano che li contiene tutti?

Esercizio 10.3
Dimostrare che due rette distinte di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ si incontrano sempre in uno e un solo punto.
È vero che due rette di $\mathbb{P}^3(\mathbb{K})$ si incontrano sempre? E due piani di $\mathbb{P}^4(\mathbb{K})$? E due piani di $\mathbb{P}^5(\mathbb{K})$? (Dare delle dimostrazioni o esibire dei controesempi.)

Esercizio 10.4
Scrivere equazioni cartesiane del sottospazio proiettivo S di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ costituito dal solo punto $[1 : 2 : 1]$.

Esercizio 10.5
Assegnati i punti di $\mathbb{P}^3(\mathbb{K})$:

$$P_0 = [0 : 1 : 1 : 0], \quad P_1 = [1 : 0 : 1 : 0], \quad P_2 = [1 : -1 : 0 : 1], \quad P_3 = [0 : 2 : 2 : -1],$$

verificare che $\mathrm{Span}_{\mathbb{P}}\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ è un piano proiettivo, e determinarne un'equazione cartesiana.

Esercizio 10.6
Siano assegnati $P = [1 : 0 : 0 : 1] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{K})$ e le due rette

$$r : X_0 + X_1 = X_1 + X_2 = 0 \qquad s : X_2 = X_3 = 0$$

(i) Verificare che r ed s sono sghembe, e che $P \notin r \cup s$;
(ii) determinare l'unica retta t passante per P ed incidente r ed s.

Esercizio 10.7
Date le rette di $\mathbb{P}^4(\mathbb{K})$ di equazioni

$$r : X_0 = X_1 - X_2 = X_3 = 0 \qquad s : X_4 = X_2 - X_3 = X_0 - X_3 = 0$$

determinare equazioni cartesiane per $r \cap s$ e per $\mathrm{span}_{\mathbb{P}}(r \cup s)$.

Esercizio 10.8
Siano assegnati i due sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}^4(\mathbb{K})$:

$$S = \{[a : b : a : 0 : b] \in \mathbb{P}^4(\mathbb{K}) \mid \forall a, b \in \mathbb{K}, (a, b) \neq (0, 0)\}$$

$$T = \{[X_0 : X_1 : X_2 : X_3 : X_4] \in \mathbb{P}^4(\mathbb{K}) \mid X_0 - X_4 = X_1 - X_2 = 0\}$$

(i) Scrivere equazioni cartesiane per S;

(ii) calcolare la dimensione di S e di T;

(iii) determinare equazioni cartesiane per $\mathrm{span}_{\mathbb{P}}(S \cup T)$ e la sua dimensione.

Esercizio 10.9
Si consideri $T = \{[a : a : 1 : 0 : 0] \in \mathbb{P}^4(\mathbb{K}) \mid \forall a \in \mathbb{K}\} \subset \mathbb{P}^4(\mathbb{K})$:
(i) mostrare che T non è un sottospazio proiettivo;

(ii) scrivere equazioni cartesiane per $\mathrm{span}_{\mathbb{P}}(T)$ e calcolarne la dimensione;

(iii) determinare l'insieme $\mathrm{span}_{\mathbb{P}}(T) \setminus T$.

Esercizio 10.10 *(Fasci di rette e iperpiani)*
(i) Consideriamo l'insieme $\mathcal{F}^1(\mathbb{K}^2)$ di tutte le rette di $\mathbb{K}^2$: si trovi una parametrizzazione di $\mathcal{F}(1, \mathbb{K})$ dipendente da due parametri;
(cioè: una mappa biiettiva $\phi : U \subset \mathbb{K}^2 \to \mathcal{F}^1(\mathbb{K}^2)$, dove U è un aperto di $\mathbb{K}^2$)

(ii) consideriamo invece l'insieme $\mathcal{F}^1(\mathbb{P}^2(\mathbb{K}))$ di tutte le rette di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$: si trovi una mappa biiettiva $\phi : \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \to \mathcal{F}^1(\mathbb{P}^2(\mathbb{K}))$.

(iii) Consideriamo l'insieme $\mathcal{F}^1_r(\mathbb{K}^2)$ di tutte le rette di $\mathbb{K}^2$ parallele ad una retta r assegnata (detto *fascio improprio di rette*): si trovi una biiezione di $\mathcal{F}^1_r(\mathbb{K}^2)$ con $\mathbb{K}^2$; consideriamo invece l'insieme $\mathcal{F}^1_P(\mathbb{K}^2)$ di tutte le rette di $\mathbb{K}^2$ passanti per un punto P assegnato (*fascio proprio di rette*): esiste una biiezione di $\mathcal{F}^1_P(\mathbb{K}^2)$ con $\mathbb{K}^2$?

(iv) Consideriamo ora l'insieme $\mathcal{F}^1_P(\mathbb{P}^2(\mathbb{K}))$ di tutte le rette di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ passanti per un punto P assegnato: si trovi una biiezione esplicita tra $\mathcal{F}^1_P(\mathbb{P}^2(\mathbb{K}))$ e $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$.

(v) Consideriamo infine l'insieme $\mathcal{F}^{n-1}(\mathbb{P}^n(\mathbb{K}))$ di tutti gli iperpiani di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$: si trovi una biiezione $\phi : \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \to \mathcal{F}^{n-1}(\mathbb{P}^n(\mathbb{K}))$.
(vi) Dimostrare che l'insieme dei piani di $\mathbb{P}^3(\mathbb{K})$ passanti per un punto P fissato si identifica in modo naturale con uno spazio proiettivo. Di quale dimensione?

Esercizio 10.11 *(Fasci di quadriche)*
(i) Consideriamo l'insieme $\mathcal{C}(\mathbb{K}^2)$ di tutte le coniche di $\mathbb{K}^2$: tale insieme si può identificare (esplicitamente) con uno spazio affine?
(ii) Mostrare che l'insieme $\mathcal{C}(\mathbb{P}^2(\mathbb{K}))$ di tutte le coniche di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ si può identificare in modo naturale con $\mathbb{P}^5(\mathbb{K})$.
(iii) Mostrare che l'insieme $\mathcal{Q}(\mathbb{P}^n(\mathbb{K}))$ di tutte le quadriche di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ si può identificare in modo naturale con uno spazio proiettivo; di quale dimensione?