Esercizi di Geometria 1

Foglio 4 (24 novembre 2015)

(esercizi analoghi potranno essere chiesti all'esame scritto o orale)

6. Coniche.

Esercizio 6.1 *(Definizione intrinseca di ellisse, iperbole e parabola)*
Siano F_+, F_- due punti di un piano euclideo $\mathbb{E}^2$.

1) Per $s > 2f = d(F_+, F_-)$ fissato, sia $\mathcal{E}_{f,s}$ l'insieme dei $P \in \mathbb{E}^2$ tali che:

$$d(P, F_+) + d(P, F_-) = s$$

(i) mostrare che esistono coordinate cartesiane (x, y) su $\mathbb{E}^2$ rispetto alle quali $\mathcal{E}_{f,s}$ ha equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $a > b > 0$;

(ii) mostrare che $a = \frac{s}{2}$ e $b = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - f^2}$, i.e. $f^2 = a^2 - b^2$;

(iii) determinare tutti i centri e gli assi di simmetria di $\mathcal{E}_{f,s}$, ed il suo gruppo di simmetrie rigide $Simm_{\mathbb{E}^2}(\mathcal{E}_{f,s})$.

2) Per $s < 2f = d(F_+, F_-)$ fissato, sia $\mathcal{I}_{f,s}$ l'insieme dei P di $\mathbb{E}^2$ tali che:

$$|d(P, F_+) - d(P, F_-)| = s$$

(i) mostrare che esistono coordinate cartesiane (x, y) su $\mathbb{E}^2$ rispetto alle quali $\mathcal{I}_{f,s}$ ha equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (e non necessariamente $a > b$);

(ii) mostrare che $a = \frac{s}{2}$ e $b = \sqrt{f^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2}$, i.e. $f^2 = a^2 + b^2$;

(iii) determinare tutti i centri e gli assi di simmetria di $\mathcal{I}_{f,s}$, ed il suo gruppo di simmetrie rigide $Simm_{\mathbb{E}^2}(\mathcal{I}_{f,s})$;

(iv) le rette di equazioni $r_+ = \frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ e $r_- : \frac{x}{a} = -\frac{y}{b}$ sono dette *asintoti* $\mathcal{I}_{f,s}$: dimostrare che se $P = (x, y) \in \mathcal{I}_{f,s}$, si ha $\lim_{x \to \pm\infty} d(P, r_+ \cup r_-) = 0$.

3) Sia r una retta non contenente F, e sia $2f = d(F, r)$. Consideriamo l'insieme $\mathcal{P}_f$ dei punti P di $\mathbb{E}^2$ tali che:

$$d(P, F) = d(P, r)$$

(i) mostrare che esistono coordinate cartesiane (x, y) su $\mathbb{E}^2$ rispetto alle quali $\mathcal{P}_f$ ha equazione $y = cx^2$;

(ii) mostrare che $c = \frac{1}{4f}$, e che la retta r ha equazione $y = -f$;

(iii) determinare tutti i centri e gli assi di simmetria di $\mathcal{P}_f$, ed il suo gruppo di simmetrie rigide $Simm_{\mathbb{E}^2}(\mathcal{P}_f)$;

Nel caso di ellisse e iperbole, i punti $F_\pm$ sono detti i *fuochi* della conica; i punti a distanza minima e massima dai fuochi (che per l'ellisse hanno rispettivamente coordinate $(\pm a, 0), (0, \pm b)$, e per l'iperbole $(\pm a, 0)$) sono detti i *vertici*; l'asse di simmetria contente i fuochi è detto *asse principale* di simmetria.
Nel caso della parabola, il punto F è detto il *fuoco* e la retta r è detta *direttrice*; il *vertice* è sempre il punto di $\mathcal{P}_c$ a distanza minima dal fuoco (e coincide con l'origine nelle coordinate (x, y)).
Il numero $e = f/a > 1$ è detto, nei casi di ellisse e iperbole, l'*eccentricità* della conica; la parabola ha invece per definizione eccentricità uguale a 1.
Come varia la forma di $\mathcal{E}_{f,s}$ e di $\mathcal{I}_{f,s}$ al variare di e?

Esercizio 6.2 *(Direttrici di ellisse e iperbole)*
Sia $\mathcal{E}$ un'ellisse di fuochi F, F'. Mostrare che:
(i) se esistono una retta r ed una costante c tali che $d(P,r)/d(P,F) = c \ \forall P \in \mathcal{E}$, allora r è parallela ad un asse;

(ii) non esistono rette parallele all'asse principale di $\mathcal{E}$ con la proprietà (i);

(iii) esiste un'unica retta parallela all'asse secondario di $\mathcal{E}$ con la proprietà (i), ed è detta *direttrice* di $\mathcal{E}$.

Analogo esercizio per un'iperbole $\mathcal{I}$ con fuochi F, F'.

Nota. Esiste chiaramente anche la direttrice di $\mathcal{E}$, $\mathcal{I}$ relativa ad F', con proprietà analoga, che è la simmetrica della direttrice sopra descritta rispetto al secondo asse di simmetria di $\mathcal{E}$, $\mathcal{I}$.

Esercizio 6.3 *(Proprietà focale della parabola)*
(i) Sia $\mathcal{P}$ una parabola di direttrice d, asse a e fuoco F.
Sia r una retta parallela all'asse, che incontra $\mathcal{P}$ in P e d in D.
Mostrare che $\overrightarrow{FD}$ è perpendicolare alla tangente t a $\mathcal{P}$ in P.

(ii) Mostrare che l'angolo tra r e t è uguale all'angolo tra $\overrightarrow{FP}$ e t.
Cosa vuol dire questo fisicamente?

Suggerimento per (ii): utilizzare (i).

Esercizio 6.4 *(Proprietà focale dell'ellisse)*
(i) Mostrare il Teorema di Erone: data una retta r in $\mathbb{E}^2$ e due punti F, F' dalla stessa parte di r, il punto P che minimizza la somma $\overline{PF} + \overline{PF'}$ verifica $\measuredangle \overrightarrow{PF}, r = \measuredangle \overrightarrow{PF'}, r$ (e viceversa).

(ii) Mostrare che se $\mathcal{E}$ è un'ellisse di fuochi F, F' e $P \in \mathcal{E}$, allora i vettori $\overrightarrow{PF}$ e $\overrightarrow{PF'}$ formano angoli uguali con la retta tangente all'ellisse in P.
Cosa vuol dire questo fisicamente?

Suggerimento per (ii): utilizzare (i).

Esercizio 6.5 *(Portare una conica reale in forma canonica)*
Sia C la conica euclidea di $\mathbb{E}^2$ di equazione

$$g(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2 + 16\sqrt{2}x_1 + 38 = 0.$$

(i) Determinare se C è non vuota ed il suo tipo affine, utilizzando solo gli invarianti affini e i semi-invarianti affini (cioè gli insiemi $\{\tau_+, \tau_-\}$ degli indici di inerzia delle forma quadratiche associate);
(ii) determinare delle coordinate cartesiane (y_1, y_2) rispetto alle quali C abbia equazione euclidea canonica;
(iii) determinare eventuali fuochi, direttrici o asintoti di C;
(iv) determinare centri ed assi di simmetria di C.
Ripetere l'esercizio per $C : g(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 2\sqrt{6}x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 = 0$.
Ripetere a piacere per un qualunque polinomio di grado 2 a coefficienti reali.

Esercizio 6.6 *(Portare una conica complessa in forma canonica)*
Sia C la conica affine di $\mathbb{C}^2$ di equazione

$$g(z_1, z_2) = 4z_1^2 - 2iz_1z_2 + 2z_2^2 = 0.$$

(i) Determinare che tipo di conica complessa è, utilizzando solo invarianti affini;
(ii) determinarecoordinate affini rispetto alle quali C abbia equazione affine canonica.
Ripetere a piacere per un qualunque polinomio di grado 2 a coefficienti in $\mathbb{C}$.

Esercizio 6.7 *(Parametrizzazioni di ellissi e iperboli)*
Si considerino le seguenti coniche:

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad\qquad \mathcal{I} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(i) Trovare una parametrizzazione $f(t)$ per $\mathcal{E}$ ed una per il ramo $\mathcal{I}^+$ di $\mathcal{I}$ contenuto nel semipiano $x > 0$, usando le funzioni goniometriche $(\cos t, \sin t)$ ed iperboliche $(\cosh t, \sinh t)$; sono parametrizzazioni *regolari*?

(ii) Consideriamo ora la circonferenza $\mathcal{C}$ che si ottiene da $\mathcal{E}$ per $a = b = 1$, e la *parametrizzazione* $f(t) = (\cos t, \sin t)$ di $\mathcal{C}$. Cosa rappresenta geometricamente il parametro t?

(iii) Consideriamo ora il ramo di iperbole equilatera $\mathcal{I}_0^+$ che si ottiene da $\mathcal{I}^+$ per $a = b = 1$, e la parametrizzazione $g(t) = (\cosh t, \sinh t)$ di $\mathcal{I}_0^+$. Cosa rappresenta geometricamente ora il parametro t?

Nota. Una *parametrizzazione* di una conica (o di un suo ramo) $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ è un'applicazione $f : I \to \mathbb{R}^2$ definita su un intervallo aperto I di $\mathbb{R}$, la cui immagine è $\mathcal{C}$. La parametrizzazione si dice *regolare* se è almeno C^1 e $df \neq 0$ in ogni punto.

Esercizio 6.8 *(Ellisse, iperbole e parabola in coordinate polari)*
Sia $\mathcal{C}$ una parabola, un'ellisse o un ramo di iperbole in $\mathbb{R}^2$ con un fuoco in F ed asse principale a (orientato da un vettore direzione $\vec{a}$).
Ogni punto $P \in \mathcal{C}$ può essere scritto come $P = r(\vartheta)(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$, dove

$$\vartheta = \measuredangle \overrightarrow{FP}, \vec{a} \qquad\qquad r(\vartheta) = d(P, F)$$

dunque l'applicazione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da $F(\vartheta) = r(\vartheta)(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$ è una parametrizzazione di $\mathcal{C}$. Usando la proprietà della direttrice descritta in 6.2, mostrare che, se $\mathcal{C}$ ha eccentricità $e \neq 0$:

(i) se $\mathcal{C}$ ed F sono dalla stessa parte rispetto a d allora

$$r(\vartheta) = \frac{eC}{e\cos\vartheta + 1} \tag{1}$$

dove C è una costante;

(ii) se $\mathcal{C}$ ed F sono dalla parte opposta rispetto a d (il che è possibile solo se $\mathcal{C}$ è un ramo di iperbole), allora $r(\vartheta) = \frac{eC}{e\cos\vartheta - 1}$.

Nota 1. I parametri (r, ϑ) associati al punto P si dicono le *coordinate polari* di P (rispetto al polo F e all'asse di riferimento a). L'equazione (1) è un'equazione cartesiana di $\mathcal{C}$ nelle "coordinate" (r, ϑ). Si noti che tale equazione non è data da un polinomio di secondo grado: l'equazione di una conica è un'equazione polinomiale di secondo grado solo rispetto a un sistema di coordinate affini!

Nota 2. La parametrizzazione (1) è la base per dimostrare che un corpo sottoposto a una forza centrale inversamente proporzionale al quadrato della distanza segue una traiettoria che è una conica (come avrete visto nel corso di Fisica o di Meccanica).

Esercizio 7.1 Si considerino le seguenti quadriche euclidee, $a > b > c > 0$:

$$\begin{array}{rll} \mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 & & \text{(ellissoide)} \\ \mathcal{I}^{ip}: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 & & \text{(iperboloide iperbolico, a una falda)} \\ \mathcal{I}^{ell}: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 & & \text{(iperboloide ellittico, a due falde)} \\ \mathcal{P}^{ip}: z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} & & \text{(paraboloide iperbolico)} \\ \mathcal{P}^{ell}: z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} & & \text{(paraboloide ellittico)} \end{array}$$

(i) Disegnarle studiandone le intersezioni con i piani paralleli ai piani coordinati.
Quali di esse sono insiemi limitati?
Quali di esse sono insiemi connessi (cioè costituiti da "un solo pezzo")?
Quali di esse possiedono piani o rette di simmetria rigida?

(ii) L'ellissoide è l'insieme dei punti dello spazio la cui somma delle distanze da due punti fissati $F_\pm$ è costante?

(iii) Dare una *parametrizzazione* per ognuna di esse (nel caso dell'iperboloide ellittico, per una sola delle due falde); a tal fine, si usino, ove possibile, le funzioni trigonometriche ed iperboliche. Sono parametrizzazioni regolari?

Nota. Una *parametrizzazione* di un insieme $S \subset \mathbb{R}^n$ è un'applicazione $f: U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ definita su un dominio U, con $f(U) = S$. La parametrizzazione si dice *regolare* se è almeno C^1 e df ha rango massimo in ogni punto.

(iv) Supponiamo ora $a = b > c > 0$: quali di esse sono allora superfici di rotazione?

Attenzione: come fare per dimostrare che una superficie *non* è un insieme di rotazione?

Esercizio 7.2 Determinare, per ciascuna delle seguenti quadriche euclidee:

$$\mathcal{Q}_1 : 6xz + 8yz - 5x = 0$$

$$\mathcal{Q}_2 : 6xz + 8yz - 5 = 0$$

$$\mathcal{Q}_3 : 3x^2 + 2y^2 + 2xz + 3z^2 - 4 = 0$$

$$\mathcal{Q}_4 : 3x^2 + 2y^2 + 2xz + 3z^2 = 0$$

$$\mathcal{Q}_5 : 3x^2 + 2y^2 + 2xz + 3z^2 + 4 = 0$$

$$\mathcal{Q}_6 : x^2 + 2xy + y^2 + 2z^2 - 4x = 0$$

$$\mathcal{Q}_7 : x^2 + 2xy + y^2 + 2z^2 - 4 = 0$$

$$\mathcal{Q}_8 : 2x^2 - 2y^2 - 2yz - 2z^2 - 3 = 0$$

$$\mathcal{Q}_9 : 2x^2 - 2y^2 - 2yz - 2z^2 + 3 = 0$$

$$\mathcal{Q}_{10} : 2x^2 - 2y^2 - 2yz - 2z^2 = 0$$

(i) il tipo affine di $\mathcal{Q}_i$, utilizzando solo gli invarianti e i semi-invarianti affini;
(ii) un'isometria $F_i : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ che la trasformi in una quadrica in forma canonica;
(iii) i piani di simmetria di $F_i(\mathcal{Q}_i)$ e di $\mathcal{Q}_i$, e le equazioni cartesiane di tali piani nelle coordinate canoniche (x, y, z).

Esercizio 7.3 *(L'iperboloide e il paraboloide iperbolici sono superfici rigate)*
i) Dimostrare che l'iperboloide iperbolico I^{ip} è una superficie rigata, che ammette come direttrice la curva $\gamma(s) = (a\cos s, b\sin s, 0)$.

ii) Dimostrare che il paraboloide iperbolico P^{ip} è una superficie rigata che ammette una retta γ per direttrice.

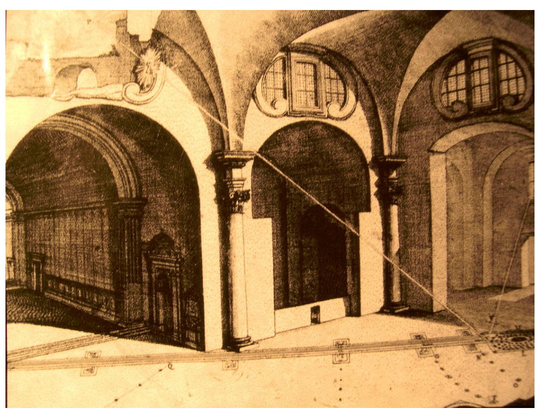
Suggerimento per (ii): si prenda γ uguale a una delle due rette ottenute intersecando P^{ip} con il piano $z = 0$.

Esercizio 7.4 *(Sezioni di coni)*
Un cono di $\mathbb{E}^3$ si dice *circolare* se è della forma $\mathcal{C}(B, V)$, dove B è un cerchio su un piano di $\sigma \subset \mathbb{E}^3$; il cono si dice *retto* se la proiezione ortogonale di V su σ cade nel centro di B.
(i) Sia $\mathcal{C}(B, V)$ un cono rotondo, non necessariamente retto: dimostrare che ogni sezione $C = \mathcal{C}(B, V) \cap \pi$ con un piano π è una conica. Dire per quali piani C è: non vuota, un'ellisse, un'iperbole, una parabola, un punto, una retta, una coppia di rette. Può l'intersezione di un cono rotondo con un piano dar luogo a una coppia di rette parallele?

(ii) Si consideri la traiettoria che l'ombra dello gnomone (cioè il foro o il vertice estremo dell'asta) di una meridiana descrive in una giornata: che curva è?

Il punto (i) è il motivo per il quale ellissi, iperboli e paraboli sono chiamate "coniche".

Per verificare sperimentalmente (ii), recarsi a osservare la meridiana di Bianchini a S.Maria degli Angeli, costruita nel 1702 e restaurata recentemente (nella foto, una stampa originale di Bianchini).



Esercizio 7.5 Si trovi:
(i) l'equazione cartesiana del *toro di rotazione*, ottenuto ruotando attorno all'asse z la circonferenza C, contenuta nel piano Oyz, di raggio r e centro $c = (0, R, 0)$, per $R > r > 0$;

(ii) l'equazione cartesiana del "pomodoro" ottenuto ruotando attorno all'asse z la circonferenza C, contenuta nel piano Oyz, di raggio R e centro $c = (0, r, 0)$, con $R > r > 0$;

(iii) l'equazione cartesiana dell'insieme di rotazione ottenuto ruotando attorno all'asse z un insieme S di equazioni $x = g(y, z) = 0$.
Il toro di rotazione è una quadrica? Se non lo è, dimostrare che non ammette un'equazione polinomiale di grado due.

8. Quadriche in dimensione $n > 3$.

Esercizio 8.1 *(Clsssificazione euclidea delle quadriche di $\mathbb{E}^n$)*
Dimostrare che ogni quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{R}^n$ ammette un'equazione cartesiana di uno dei tre tipi seguenti, con $\lambda_1, ..., \lambda_k$ non nulli:

(i) $\lambda_1 y_1^2 + \cdots\cdots + \lambda_k y_k^2 = y_n$

(ii) $\lambda_1 y_1^2 + \cdots\cdots + \lambda_k y_k^2 = 1$

(iii) $\lambda_1 y_1^2 + \cdots\cdots + \lambda_k y_k^2 = 0$

Suggerimento: usare le stesse tecniche per portare le quadriche di $\mathbb{E}^3$ in forma euclidea canonica: se poi restano dei termini $a_{k+1}x_{k+1} + \cdots + a_n x_n$, dividere il tutto per $\lambda = \sqrt{a_{k+1}^2 + \cdots a_n^2}$ e chiamare $y_n = a_{k+1}x_{k+1} + \cdots + a_n x_n$. Come si devono definire allora $y_1, ..., y_k, ..., y_{n-1}$ affinché le (y_i) siano ancora coordinate cartesiane?

Esercizio 8.2
Diciamo che una quadrica $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^n$ è *sconnessa* da un iperpiano H: $L(x_1, ..., x_n) = 0$ se $\mathcal{Q} \cap H = \emptyset$ e le intersezioni di $\mathcal{Q}$ con i semispazi $H^+ : L(x_1, ..., x_n) > 0$ e $H^- : L(x_1, ..., x_n) < 0$ sono entrambe non vuote.
(i) Dimostrare che, se $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ sono quadriche affinemente equivalenti in $\mathbb{R}^n$, allora $\mathcal{Q}$ è sconnessa da un iperpiano H se e solo se $\mathcal{Q}'$ è sconnessa da un iperpiano H'.
(ii) Determinare le quadriche in $\mathbb{R}^n$ per le quali esiste un iperpiano che le sconnetta.

Esercizio 8.3
Considerare lo spazio vettoriale $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ delle matrici reali 2×2. Dimostrare che $(\det - \mathrm{tr}) : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è un'applicazione polinomiale quadratica e classificare il tipo affine della quadrica di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ data da

$$\mathcal{Q} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,|\, \det(M) - \mathrm{tr}(M) = 0\}$$

(cioè quale delle tre forme canoniche (i)-(ii)-(iii) dell'es. 8.1 ha?)