Esercizi di Geometria 1

Foglio 3 (30 ottobre 2015)

(esercizi analoghi potranno essere chiesti all'esame scritto o orale)

Esercizio 1 (insiemi di applicazioni)

Sia $\mathbb{E}^n$ lo spazio vettoriale euclideo reale numerico di dimensione n.

(a) Fare un diagramma di inclusioni per tutti i seguenti insiemi di applicazioni $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ (per $n \geq 2$):

- (i) le applicazioni continue $C^0(\mathbb{E}^n, \mathbb{E}^n)$, e quelle continue con inversa continua $\mathrm{Homeo}(\mathbb{E}^n)$ (dette *omeomorfismi*);
- (ii) le applicazioni (dette *razionali*) $\mathrm{Raz}(\mathbb{E}^n, \mathbb{E}^n)$ le cui componenti sono funzioni razionali, cioè rapporti di funzioni polinomiali, e quelle $\mathrm{Bir}(\mathbb{E}^n)$ razionali con inversa razionali (dette *birazionali*);
- (iii) le applicazioni *conformi* $\mathrm{Conf}(\mathbb{E}^n, \mathbb{E}^n)$ che preservano gli angoli, e quelle $\mathrm{Conf}(\mathbb{E}^n)$ conformi con inversa conforme;
- (iv) le applicazioni *affini* $\mathrm{Aff}(\mathbb{E}^n, \mathbb{E}^n)$, e le *affinità* $\mathrm{Aff}(\mathbb{E}^n)$;
- (v) le applicazioni *lineari* $\mathrm{L}(\mathbb{E}^n, \mathbb{E}^n)$, e gli *isomorfismi lineari* $\mathrm{GL}(\mathbb{E}^n)$;
- (vi) le applicazioni *ortogonali* $\mathrm{O}(\mathbb{E}^n)$ (dette anche *isometrie lineari*), e le *isometrie* $\mathrm{Isom}(\mathbb{E}^n) = \mathrm{Cong}(\mathbb{E}^n)$ (dette anche *isometrie affini*, o *congruenze*, o *trasformazioni rigide*);
- (vii) le *similitudini* lineari $\mathrm{Sim}(\mathbb{E}^n)$, e tutte le similitudini $\mathrm{Sim}_{\mathrm{aff}}(\mathbb{E}^n)$;
- (viii) le *traslazioni* $\mathrm{T}(\mathbb{E}^n)$, le *dilatazioni* $\mathrm{Dil}(\mathbb{E}^n) := \{\lambda Id\}$, e le *omotetie* $\mathrm{Om}(\mathbb{E}^n)$;
- (ix) le *proiezioni lineari o affini* su un sottospazio A (lineare o affine) fissato lungo un sottospazio di dimensione complementare, denotate $\mathrm{P}(\mathbb{E}^n, A)$;
- (x) le *proiezioni ortogonali* lineari o affini su un sottospazio A (lineare o affine), denotate con $\mathrm{P}_{ort}(\mathbb{E}^n, A)$;
- (xi) le applicazioni lineari *simmetriche* (anche dette *auto-aggiunte (rispetto al prodotto scalare standard)*) $\mathrm{Simm}(\mathbb{E}^n)$; e le applicazioni $\mathrm{Simm}_{\mathrm{aff}}(\mathbb{E}^n)$ affini con giacitura simmetrica;
- (xii) le *riflessioni lineari o affini* rispetto a un sottospazio A fissato, denotate $\mathrm{R}(\mathbb{E}^n, A)$.

(b) Evidenziare gli insiemi che non sono gruppi rispetto all'operazione di composizione.

(c) Se due insiemi soddisfano una relazione di inclusione $B \subsetneq A$, dare un esempio esplicito di un'applicazione che sta in A ma non in B.

Esercizio 2 (azioni di gruppo)

Verificare che le applicazioni $\mu : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(S)$ seguenti definiscono un'azione del gruppo G sull'insieme S.

(a) Sia $G = \mathfrak{S}_n$ gruppo simmetrico sull'insieme $\{1, 2, \ldots, n\}$ e $S = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Definiamo $\mu(\sigma) \cdot M := N$, dove $N_{ij} := M_{i,\sigma(j)}$.

(b) Siano V uno spazio vettoriale e $k \geq 1$ un intero. Siano $S = V^k$ e $G = \mathrm{GL}(V)$ e definiamo $\mu(g) \cdot (v_1, \dots, v_k) := (g(v_1), \cdot, g(v_k))$. Dire se i $\mu(g)$ sono isomorfismi lineari di V in sé.

(c) Dato V uno spazio vettoriale e $k \geq 1$ un intero, sia $S := \{(v_1, \dots, v_k) \in V^k \mid v_i \neq v_j \text{ se } i \neq j\}$ e $G = \mathrm{GL}(V)$. Definiamo $\mu(g) \cdot (v_1, \dots, v_k) := (g(v_1), \cdot, g(v_k))$.

(d) Siano V uno spazio vettoriale e $k \geq 1$ un intero. Siano $S = \{f \in \mathrm{End}(V) \mid \mathrm{rango}(f) = k\}$, $G = \mathrm{GL}(V)$ e poniamo $\mu(g) \cdot f := gfg^{-1}$.

Esercizio 3 (classificazione)

Classificare gli elementi di S a meno della relazione di equivalenza $\sim$ definita dall'azione μ del gruppo G su S, ossia trovare un insieme $S_{can} \subseteq S$ di rappresentanti per $\sim$, nei seguenti casi:

(a) $S = \mathbb{R}^n$, $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ e $\mu(g) \cdot v := g(v)$;

(b) $S = \mathbb{R}^n$, $G = \mathbb{R}_+$ (con l'operazione di moltiplicazione) e $\mu(t) \cdot v := tv$;

(c) $S = \{$sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ formati da due elementi distinti$\}$, $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ e $\mu(g) \cdot \{v, w\} := \{g(v), g(w)\}$;

(c) $S = \{$sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ formati da due elementi distinti$\}$, $G = \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ e $\mu(g) \cdot \{v, w\} := \{g(v), g(w)\}$;

(e) $S = \{$sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ formati da due elementi distinti$\}$, $G = \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ e $\mu(f) \cdot \{P, Q\} := \{f(P), f(Q)\}$;

(f) $S = \mathrm{Hom}(V, W)$ omomorfismi di spazi vettoriali, $G = \mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}(W)$ e $\mu(f, g) \cdot h := fhg^{-1}$;

(g) $S = \{$triangoli T non degeneri in $\mathbb{R}^2$ con vertici numerati$\}$, $G = \mathrm{Isom}_+(\mathbb{R}^2)$ e $\mu(g) \cdot T := g(T)$;

(h) $S = \{$triple ordinate (P, Q, R) di punti distinti di $\mathbb{R}\}$, $G = \mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ e $\mu(g) \cdot (P, Q, R) := (g(P), g(Q), g(R))$;

(i) $S = \{$triple ordinate (P, Q, R) di punti distinti di $\mathbb{R}\}$, $G = \mathrm{Isom}_{\mathrm{aff}}(\mathbb{R})$ e $\mu(g) \cdot (P, Q, R) := (g(P), g(Q), g(R))$;

(j) $S = \{$matrici simmetriche N complesse $n \times n\}$, $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mu(Q) \cdot N := QNQ^T$;

(k) $S = \{$matrici M simmetriche reali $n \times n\}$, $G = \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mu(P) \cdot M := PMP^T$;

(l) $S = \{$matrici N unitarie $n \times n\}$, $G = \mathrm{U}(n)$, $\mu(Q) \cdot N := QN\overline{Q}^T$;

(l) $S = \{$matrici M ortogonali reali $n \times n\}$, $G = \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mu(P) \cdot M := PM\overline{P}^T$;

(m**) $S = \{$matrici N complesse $n \times n\}$, $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mu(Q) \cdot N := QNQ^{-1}$.

Esercizio 4 (spostamento)

Sia $\mathbb{E}^n$ lo spazio affine euclideo numerico reale di dimensione n, munito della distanza d. Per ogni affinità f di $\mathbb{E}^n$ in sé, definiamo lo *spostamento di f* come

$$t(f) := \inf\{d(x, f(x)) \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{E}^n\}$$

e sia $\mu(f) := \{y \in \mathbb{E}^n \mid d(y, f(y)) = t(f)\}$ l'insieme dei punti di $\mathbb{E}^n$ su cui $t(f)$ è raggiunto.

(a) Dimostrare che, per ogni $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{E}^n)$, l'insieme $\mu(f)$ è non vuoto.

(b) Dimostrare che $\mu(f)$ è un sottospazio affine di $\mathbb{E}^n$ e calcolarne la dimensione.

(c) Dimostrare che, se $f^m = id$ per qualche intero $m \geq 2$, allora

$$y := \frac{1}{m}\Big(x + f(x) + f^2(x) + \cdots + f^{m-1}(x)\Big)$$

è un punto fisso di f per ogni $x \in \mathbb{E}^n$, e quindi $t(f) = 0$.

(d) Dimostrare che $t(f^k) \leq k \cdot t(f)$ per ogni $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{E}^n)$ e che $t(f) > 0 \iff t(f^k) > 0$ per ogni $k \geq 1$.

(e*) È vero che $t(f^k) = k \cdot t(f)$ per ogni $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{E}^n)$ e ogni $k \geq 1$?

Esercizio 5 (isometrie del piano euclideo)

(a) Classificare le isometrie dello spazio affine euclideo (reale) $\mathbb{E}^2$

(i) a meno di coniugio per affinità $\mathrm{Aff}(\mathbb{E}^2)$;

(ii) a meno di coniugio per isometrie $\mathrm{Iso}(\mathbb{E}^2)$.

(b) Dimostrare che, se G è un sottogruppo finito di $\mathrm{Aff}(\mathbb{E}^2)$, allora esiste un punto $C \in \mathbb{E}^2$ fissato da G, ossia tale che $g(C) = C$ per ogni $g \in G$.

Esercizio 6 (sottogruppi finiti delle trasformazioni del piano)

(a) Determinare i sottogruppi finiti di $\mathrm{O}(2, \mathbb{R})$.

(b) Sia (V, b) uno spazio vettoriale euclideo reale. Dimostrare che, per ogni sottogruppo finito G di $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(V)$, la forma bilineare simmetrica B definita come

$$B(v, v') := \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} b(g(v), g(v'))$$

è definita positiva e $G \subset \mathrm{O}(V, B)$.
(Analogamente per (W, h) spazio vettoriale euclideo complesso e $G \subset \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(W)$.)

(c) Sia G un sottogruppo finito di $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$. Dimostrare che esiste $f \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ e un sottogruppo finito G' di $\mathrm{O}(2, \mathbb{R})$ tali che $G = fGf^{-1} := \{fg'f^{-1} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \mid g' \in G'\}$.

Esercizio 7 (stabilizzatori/simmetrie)

Dati G un gruppo che agisce sull'insieme S e un sottoinsieme X di S come sotto, calcolare il sottogruppo di G delle simmetrie di X (anche detto *stabilizzatore di X per l'azione di G*), ovvero $\mathrm{stab}_G(X) := \{g \in G \,|\, g \cdot X = X\}$:

(a) $G = \mathrm{Aff}(\mathbb{E}^2)$ che agisce tramite affinità su $S = \mathbb{E}^2$,
$X = \{$poligono regolare di k lati inscritto nel disco di raggio 1 centrato in $0\}$

(b) $G = \mathrm{Aff}(\mathbb{E}^2)$ che agisce tramite affinità su $S = \mathbb{E}^2$,
$X = \{$triangolo isoscele (non equilatero)$\}$

(c) $G = \mathrm{Aff}(\mathbb{E}^2)$ che agisce tramite affinità su $S = \mathbb{E}^2$,
$X = \{$rettangolo (non quadrato)$\}$

(d) $G = \mathrm{Aff}(\mathbb{E}^2)$ che agisce tramite affinità su $S = \mathbb{E}^2$,
$X = \{$rombo (non quadrato)$\}$

(e) $G = \mathrm{Aff}(\mathbb{E}^3)$ che agisce tramite affinità su $S = \mathbb{E}^3$,
$X = \{$tetraedro regolare inscritto nella palla di raggio 1 centrata in $0\}$;

(f) $G = \mathrm{Aff}(\mathbb{E}^3)$ che agisce tramite affinità su $S = \mathbb{E}^3$,
$X = \{$cubo di lato 1 centrato in 0;

(g) $G = \mathrm{Aff}(\mathbb{E}^2)$ che agisce tramite affinità su $S = \mathbb{E}^2$,
$X = \{$circonferenza di raggio 1 e centro $0\}$;

(h) $G = \mathrm{Aff}(\mathbb{E}^2)$ che agisce tramite affinità su $S = \mathbb{E}^2$,
$X = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 \,|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ con $a, b > 0$ fissati;

(i*) $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ che agisce sull'insieme $S = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ delle matrici $n \times n$ reali tramite coniugio $\mu(g)\cdot M := gMg^1$, e $X = \{D\}$ dove D è una matrice diagonale;

(j) $G = \mathrm{Aff}(\mathbb{E}^2)$ che agisce tramite affinità su $S = \mathbb{E}^2$, $X = \mathbb{Z}^2$ (punti di S a coordinate intere);

(m) $G = \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R})$ (oppure $G = \mathrm{O}(n+1, \mathbb{R})$) che agisce tramite trasformazioni lineari (oppure lineari ortogonali) su $S = \mathbb{R}^{n+1}$, $X =$immagine dell'applicazione affine $i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ tale che $i(e_k) = e_k$ per ogni $k = 1, \dots, n$.

Esercizio 8 (simmetrie dei reticoli di rango 2**)**

Sia $\tau \in \mathbb{C}$ con parte immaginaria positiva e sia X_τ il sottogruppo additivo di $S = \mathbb{C}$ generato da $\{1, \tau\}$. Considerare l'azione del gruppo $G = \mathbb{C}^*$ per moltiplicazione su $S = \mathbb{C}$.
Per ogni τ come sopra, calcolare $\mathrm{stab}(X_\tau)$.

Esercizio 9 (triangolabilità)

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo $\mathbb{K}$. Una *bandiera (completa)* su V è una catena $V_\bullet = (\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = V)$ di sottospazi vettoriali di V con $\dim(V_k) = k$ per ogni k. Un endomorfismo lineare $f : V \to V$ si dice *triangolabile* se esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ è triangolare superiore.

(a) Dimostrare che $f : V \to V$ è triangolabile se e solo se esiste una bandiera completa $V_\bullet$ *preservata da f*, ossia tale che $f(V_k) \subseteq V_k$ per ogni k.

(b) Sia $L \subset V$ un sottospazio vettoriale di dimensione 1 e sia $\pi : V \to V/L$ la proiezione canonica. Sia data $W_\bullet := (\{0\} = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_{n-1} = V/L)$ una bandiera di V/L. Dimostrare che, ponendo $V_0 := \{0\}$ e $V_{k+1} := \pi^{-1}(W_k)$ per $k = 0, \ldots, n-1$, si ottiene una bandiera $V_\bullet$ di V.

(c) Sia $W \subset V$ un sottospazio vettoriale, sia $\pi : V \to V/W$ la proiezione canonica e sia $f : V \to V$ un endomorfismo lineare tale che $f(W) \subseteq W$. Sia $f|_W^W : W \to W$ la restrizione di f a W.

  (c1) Dimostrare che è ben definito un omomorfismo $\overline{f} : V/W \to V/W$, ponendo $\overline{f}([v]) := [f(v)]$.

  (c2) Dimostrare che $\det(f) = \det(f|_W^W) \cdot \det(\overline{f})$ e per i polinomi caratteristici vale $p_f(t) = p_{f|_W^W}(t) \cdot p_{\overline{f}}(t)$. Concludere che f ha tutti autovalori in $\mathbb{K}$ se e solo se sia $f|_W^W$ sia $\overline{f}$ hanno tutti autovalori in $\mathbb{K}$.

(d) Supponiamo che il polinomio caratteristico $p_f(t)$ dell'endomorfismo $f : V \to V$ abbia tutte le radici in $\mathbb{K}$. Dimostrare che f è triangolabile.

Esercizio 10 (diagonalizzabilità simultanea)

(a) Sia $k \geq 2$ e siano $q_1(t), \ldots, q_k(t) \in \mathbb{K}[t]$ polinomi di grado ≥ 1 tali che $(q_i, q_j) = 1$ per ogni $i \neq j$. Dimostrare che $\exists r_1(t), \ldots, r_k(t) \in \mathbb{K}[t]$ tali che

$$r_1 q_2 q_3 \cdots q_k + q_1 r_2 q_3 \cdots q_k + \cdots + q_1 q_2 \cdots q_{k-1} r_k = 1.$$

e che necessariamente $(r_i, q_i) = 1$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.

(b) Sia $f : V \to V$ un endomorfismo. Dimostrare che f è diagonalizzabile con autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ se e solo se $(\lambda_1 I - f)(\lambda_2 I - f) \cdots (\lambda_k I - f) = 0 \in \mathrm{End}(V)$.

(c) Sia $f : V \to V$ un endomorfismo e $W \subset V$ un sottospazio vettoriale tale che $f(W) \subseteq W$. Dimostrare che, se f è diagonalizzabile, allora $f|_W^W : W \to W$ è diagonalizzabile.

(d) Siano $f, g : V \to V$ endomorfismi diagonalizzabili tali che $fg = gf$.

  (d1) Se $E_\lambda(f)$ è l'autospazio di f corrispondente all'autovalore λ, dimostrare che $g(E_\lambda(f)) = E_\lambda(f)$.

  (d2) Dimostrare che f e g sono *simultaneamente diagonalizzabili*, ossia esiste una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di V tale che v_i sia autovettore di f e di g per ogni $i = 1, \ldots, n$ (e quindi le matrici $[f]_\mathcal{B}$ e $[g]_\mathcal{B}$ sono entrambe diagonali).

Esercizio 11 (coppie di rotazioni di $\mathbb{R}^3$ che commutano)

Determinare quali coppie (R, S) di rotazioni in $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ *commutano*, ossia soddisfano $RS = SR$.

Esercizio 12 (norma su uno spazio vettoriale quoziente)

Sia V uno spazio vettoriale reale e b un prodotto scalare su V definito positivo (denotiamo con $\|\cdot\|_V$ la norma indotta). Sia inoltre W un sottospazio vettoriale. Definiamo $\|\cdot\|_{V/W} : V/W \to \mathbb{R}$ come

$$\|[v]\|_{V/W} := \inf\left\{ \|v'\|_V \;\middle|\; v' \sim v \right\}$$

per ogni $[v] \in V/W$.

(a) Dimostrare che la restrizione della proiezione canonica $\pi : V \to V/W$ a $W^\perp$ soddisfa $\|\pi(u)\|_{V/W} = \|u\|_V$ per ogni $u \in W^\perp$.

(b) Concludere che $\|\cdot\|^2_{V/W}$ è una forma quadratica definita positiva.

Esercizio 13 (orientazione, volume e volume con segno)

Sia V uno spazio vettoriale reale, b una forma bilineare definita positiva e $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ una base b-ortonormale per V, che definisce l'orientazione $[\mathcal{B}]$ su V. Definiamo $\delta : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n \text{ times}} \to \mathbb{R}$ come

$$\delta(v_1, \dots, v_n) := \det\Big([v_1]_{\mathcal{B}} \Big| [v_2]_{\mathcal{B}} \Big| \cdots \Big| [v_n]_{\mathcal{B}} \Big)$$

e $\mathrm{Vol} : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n \text{ times}} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ come $\mathrm{Vol}(v_1, \dots, v_n) := |\delta(v_1, \dots, v_n)|$.

(La funzione Vol *va interpretata come "volume del parallelepipedo in V con lati $v_1, \dots, v_n$; la funzione δ va interpretata come "volume con segno del parallelepipedo in V con lati $v_1, \dots, v_n$.)*

(a) Dimostrare che δ è multilineare, alterna e $\delta(u_1, \dots, u_n) = 1$.

(b) Dimostrare che $\delta(v_1, \dots, v_n) = \mathrm{Vol}(v_1, \dots, v_n) = 0$ se e solo se $\{v_1, \dots, v_n\}$ non sono linearmente indipendenti.

(c) Sia $f : V \to V$ un'applicazione lineare. Dimostrare che

$$\delta\Big(f(v_1), \dots, f(v_n)\Big) = \det(f) \cdot \delta(v_1, \dots, v_n)$$

per ogni $v_1, \dots, v_n \in V$.

(d) Sia $\mathcal{B}'$ un'altra base ortonormale e sia δ' calcolato usando $\mathcal{B}'$.
Dimostrare che, se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono basi ortonormali concordi, allora $\delta = \delta'$; e che, se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono basi ortonormali non concordi, allora $\delta = -\delta'$.
Concludere che Vol dipende solo da b e che δ dipende solo da $(b, [\mathcal{B}])$.

(d) Dimostrare che un'isomorfismo lineare $f : V \to V$ può non preservare i volumi ma preserva i rapporti tra volumi con segno (ossia, preserva i rapporti $\frac{\delta(v_1,\dots,v_n)}{\delta(v'_1,\dots,v'_n)}$).