Esercizi di Geometria 1

Foglio 2 (19 ottobre 2015)

(esercizi analoghi potranno essere chiesti all'esame scritto o orale)

Esercizio 1

Considerare lo spazio vettoriale (reale) $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ delle matrici reali 2×2 e sia $W \subset V$ il sottospazio delle matrici con traccia nulla.

(a) Esibire una base $\mathcal{B}_W$ di W e calcolarne la dimensione. Estenderla ad una base $\mathcal{B}$ di V.

(b) Per ogni $X \in V$ considerare l'applicazione $a_X : V \to V$ definita come $a_X(M) := [X, M] = XM - MX$. Dimostrare che a_X è un'applicazione lineare e che $a_X(W) \subseteq W$.

(c) Considerare l'applicazione $K : V \times V \to \mathbb{R}$ definita come $K(X, Y) := \mathrm{tr}(a_X \circ a_Y)$, dove $a_X, a_Y \in \mathrm{End}(V)$ sono gli endomorfismi di V definiti al punto (b). Dimostrare che K è bilineare e simmetrica.

(d) Esibire una base di Sylvester per K e calcolare gli indici di positività, negatività, nullità di K. Dire se K sia non degenere e se lo sia la restrizione $K|_W$.

Esercizio 2

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione n e sia b una forma bilineare simmetrica su V. Ricordiamo che $L_b : V \to V^*$ è l'applicazione lineare definita come $L_b(v) := b_v$, dove $b_v : V \to \mathbb{K}$ è il funzionale definito da $b_v(v') := b(v, v')$.

(a) Sia $\mathcal{B}$ una base di V e sia $\mathcal{B}^*$ la sua base duale. Dimostrare che la matrice $[b]_{\mathcal{B}}$ che rappresenta b rispetto alla base $\mathcal{B}$ coincide con la matrice $[L_b]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}^*}$.

(b) Verificare che l'indice di nullità $n_0(b)$ coincide con la dimensione del nucleo della matrice $[b]_{\mathcal{B}}$. Dedurre che b è non degenere se e solo $[b]_{\mathcal{B}}$ è invertibile.

(c) Dimostrare enunciati analoghi sostituendo V con uno spazio vettoriale complesso W e b con una forma hermitiana h su W.

Esercizio 3*

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione n e sia b una forma bilineare simmetrica su V con indice di nullità n_0.

(a) Mostrare che, se $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 2$, allora potrebbe non esistere una base di V ortogonale per b.

(b) Sia $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e sia $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ una matrice simmetrica di rango $n - n_0$. Dimostrare che esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che $[b]_{\mathcal{B}} = M$.

(c) Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e sia $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica di rango $n - n_0$ e con n_+ autovalori positivi e n_- negativi. Dimostrare che esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che $[b]_{\mathcal{B}} = M$.

(d) Sia B una forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^2$ tale che $n_+(B) = 1 = n_-(B)$. Dimostrare che esiste una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ tale che $[B]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(e) Sia ora $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Definiamo $\mathcal{S}_0 := \{Z \subseteq V$ sottospazio vettoriale $| \, b|_Z \equiv 0\}$ e sia $m := \max\{\dim(Z) \,|\, Z \in \mathcal{S}_0\}$. Dimostrare che $m = n_0 + \min\{n_+, n_-\}$, dove n_0, n_+, n_- sono gli indici di nullità, positività e negatività di b.

(f) Dimostrare enunciati analoghi a quelli dei punti (c-d-e), sostituendo V con uno spazio vettoriale complesso W e b con una forma hermitiana h su W.

Esercizio 4*

Sia $\mathbb{K}$ un campo con $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ e V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione n e sia $\omega : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare. Supponiamo che ω sia *alterna*, ossia che $\omega(v_1, v_2) = -\omega(v_2, v_1)$.

(a) Verificare che, per ogni $v \in V$, l'applicazione $\omega_v : V \to \mathbb{K}$ data da $\omega_v(v') := \omega(v, v')$ è lineare e che l'applicazione $L_\omega : V \to V^*$ definita da $L_\omega(v) := \omega_v$ è lineare.

(b) Verificare che $\ker(L_\omega) = \mathrm{Rad}(\omega)$, dove $\mathrm{Rad}(\omega) := \{v \in V \,|\, \omega(v, v') = 0 \ \forall v' \in V\}$. Diciamo che ω è *non degenere* se $\mathrm{Rad}(\omega) = \{0\}$.

(c) Sia $\mathcal{B}$ una base di V. Dimostrare che $[\omega]_{\mathcal{B}}$ è una matrice antisimmetrica, che coincide con $[L_\omega]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}^*}$.

(d) Se $U \subseteq V$ è un sottospazio, denotiamo con $U^\perp$ l'ortogonale di U rispetto a ω, ossia $U^\perp := \{v \in V \,|\, \omega(v, u) = 0 \ \forall u \in U\}$. Dimostrare che $U^\perp = \mathrm{Ann}(L_\omega(U))$. Dedurre che, se ω è non degenere, allora $\dim(U^\perp) + \dim(U) = n$; inoltre, se $\omega|_U$ è non degenere, allora $U^\perp \cap U = \{0\}$.

(e) Sia $n_0 = \dim(\mathrm{Rad}(\omega))$ e sia $k = \frac{1}{2}(n - n_0)$. Dimostrare che esistono una base $\mathcal{B}$ di V e $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}^*$ tali che

$$[\omega]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c|c} 0_{n_0} & & \\ \hline & 0_k & -D \\ \hline & D & 0_k \end{array} \right), \text{ dove } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

(f) Dimostrare che, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, vale l'enunciato (e) con $D = I_k$.

Esercizio 5

Siano (V, b) e (V', b') spazi vettoriali euclidei (ossia, b e b' sono forme bilineari simmetriche definite positive) e sia $f : V \to V'$ un'applicazione lineare. Supponiamo che f sia *conforme*, ovvero che preservi gli angoli (ossia tale che, per ogni $v_1, v_2 \in V$ non nulli, l'angolo fra $f(v_1)$ e $f(v_2)$ calcolato rispetto a b' sia uguale all'angolo fra v_1 e v_2 calcolato rispetto a V). Dimostrare che f è la composizione di una isometria lineare e di una omotetia lineare.

Esercizio 6

Siano (E, d_E) e (F, d_F) spazi affini euclidei e sia $f : E \to F$ un'applicazione biunivoca. Supponiamo che f preservi i rapporti fra le distanze, ossia

$$\frac{d_F(f(P), f(Q))}{d_F(f(Q), f(R))} = \frac{d_E(P, Q)}{d_E(Q, R)}$$

per ogni $P, Q, R \in E$ tripla di punti distinti di E.
Dimostrare che f è un'affinità.

Esercizio 7

Siano (E, d_E) e (F, d_F) spazi affini euclidei.

(a) Sia $f : E \to F$ un'affinità. Dimostrare che f è un'isometria affine se e solo se $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{F}$ è un'isometria lineare.

(b) Sia $f : E \to F$ una *isometria biunivoca*, ossia un'applicazione biunivoca tale che $d_F(f(P), f(Q)) = d_E(P, Q)$ per ogni $P, Q \in E$. Dimostrare che f è un'isometria affine.

Esercizio 8

(a) Dire quali delle seguenti definiscono una forma hermitiana su $\mathbb{C}^2$.

$$\begin{array}{ll} h(v, w) = v_1\overline{w}_1 + iv_1\overline{w}_2 + iv_2\overline{w}_1 & h(v, w) = i|v_1||w_1| \\ h(v, w) = v_1\overline{w}_1 + 2iv_1\overline{w}_2 - 2iv_2\overline{w}_1 & h(v, w) = 1 + v_1\overline{w}_1 + v_1\overline{w}_2 \\ h(v, w) = v_1\overline{w}_1 + 2v_2\overline{w}_2 & \end{array}$$

per ogni $v, w \in \mathbb{C}^2$.

(b) Per quelle h al punto (a) che definiscono forme hermitiane su $\mathbb{C}^2$, rappresentarle tramite matrici hermitane, esibire una base ortogonale e calcolare gli indici di nullità, positivà e negatività.

(c) Dire quali delle seguenti matrici rappresentano forme bilineari simmetriche e quali rappresentino forme hermitiane (su $\mathbb{C}^2$ o su $\mathbb{C}^3$).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} i & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & 2 & 1+i \\ -i & 1-i & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} i & 1 & i \\ -1 & 2 & 2i \\ -i & -2i & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Per le matrici al punto (c) che rappresentano prodotti hermitiani (su $\mathbb{C}^2$ o su $\mathbb{C}^3$), esibire una base ortogonale e calcolare gli indici di nullità, positivà e negatività.

Esercizio 9

(a) Considerare $W = \mathbb{C}^3$ con il prodotto hermitiano h standard. Utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt, ortonormalizzare la seguente base di W rispetto ad h:

$$\mathcal{B} = \left\{ w_1 = \begin{pmatrix} i \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ i \end{pmatrix}, \right\}$$

(b) Calcolare la matrice che rappresenta (rispetto alla base $\mathcal{B}$) la riflessione ortogonale rispetto al sottospazio U generato da $\{w_2, w_3\}$.

Esercizio 10

Considerare lo spazio vettoriale reale $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ dei polinomi di grado al più 2 nella indeteminata t e sia

$$b(p,q) := p(0)q(0) - p(-1)q(-1) + \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

una forma bilineare simmetrica su V.

(a) Trovare una base ortogonale per V rispetto a b e determinare gli indici di positività, negatività e nullità di b.

(b) Sia $U \subset V$ il sottospazio vettoriale dei polinomi costanti. Descrivere $U^\perp$ per mezzo di una equazione lineare.

(c) Calcolare l'applicazione π di proiezione ortogonale su Ued esibire la matrice $[\pi]_\mathcal{C}$ che la rappresenta rispetto alla base canonica $\mathcal{C} = \{v_0 = 1, v_1 = t, v_2 = t^2\}$.

Esercizio 11**

Sia M una matrice $n \times n$ simmetrica reale e sia b la forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^n$ rappresentata da M (rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$).

(a) Siano n_+, n_-, n_0 gli indici di positività, negatività e nullità di b. Dimostrare che l'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ rappresentato da M ha esattamente n_+ autovalori positivi e n_- autovalori negativi (se contati con le loro molteplicità) e che il nucleo di M ha dimensione n_0.

(b*) Sia M_k il k-esimo *minore principale* di M, ovvero la matrice $k \times k$ ottenuta da M cancellando le righe e le colonne oltre la k-esima, e sia $m_k := \det(M_k)$. Supponiamo $m_1, \ldots, m_h \neq 0$ e poniamo $\mu_1 := m_1$ e $\mu_j := \frac{m_j}{m_{j-1}}$ per ogni $j = 2, \ldots, h$.
Dimostrare che $n_+ \geq \Big|\{j \in \{1, \ldots, h\} \mid \mu_j > 0\}\Big|$ e $n_- \geq \Big|\{j \in \{1, \ldots, h\} \mid \mu_j < 0\}\Big|$.

(c**) Sia $p(t) = \det(I - tM)$ il polinomio caratteristico di M e supponiamo che $p(t) = \sum_{j=0}^n a_j t^j$ con $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{n-h} \neq 0$. Sia $\lambda_j := -\frac{a_j}{a_{j+1}}$ per ogni $j = n-1, \ldots, n-h$. Dimostrare che $n_+ \geq \Big|\{j \in \{n-1, \ldots, n-h\} \mid \lambda_j > 0\}\Big|$ e $n_- \geq \Big|\{j \in \{n-1, \ldots, n-h\} \mid \lambda_j < 0\}\Big|$.

(d) Supponiamo $M = N^T N$, dove N è una matrice quadrata reale $n \times n$. Dimostrare che b è semi-definita positiva e che $\mathrm{Rad}(b)$ coincide con il nucleo dell'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ rappresentato da N.

(e) Supponiamo che b sia semi-definito positivo. Dimostrare che esiste ed è unica una matrice $n \times n$ reale P simmetrica e semi-definita positiva tale che $M = P^2$ (e a volte si scrive $P = \sqrt{M}$).

Esercizio 12

Sia (V, g) uno *spazio vettoriale euclideo reale* (ossia V è uno spazio vettoriale reale e g è un prodotto scalare su V definito positivo). Mostrare che:

(a) se $F : V \to V$ è un endomorfismo, allora $b_F : V \times V \to \mathbb{R}$, definita come $b_F(u, v) := g(F(u), v)$, è una forma bilineare su V;

(b) b_F è una forma simmetrica se e solo se $F : (V, g) \to (V, g)$ è *autoaggiunto* (anche detto *simmetrico*) rispetto a g;

(c) la mappa $F \mapsto b_F$ definisce isomorfismi di spazi vettoriali $\mathrm{End}(V) \cong \mathrm{Bil}(V)$ ed $\mathrm{End}_s(V, g) \cong \mathrm{Bil}_s(V)$, dove $\mathrm{Bil}(V)$ è l'insieme delle forme bilineari su V, $\mathrm{Bil}_s(V)$ è l'insieme delle forme bilineari simmetriche su V e $\mathrm{End}_s(V, g)$ è l'insieme degli endomorfismi di V autoaggiunti rispetto a g.

Esercizio 13

Si consideri sullo spazio vettoriale reale numerico $V = \mathbb{R}^n$ la forma bilineare simmetrica $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita come $g(v, v') := v^t A v'$ e sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'endomorfismo definito come $f(v) := Av$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinare, se esiste (oppure dimostrare che non esiste):

(a) una matrice $M \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ tale che $M^T A M$ sia diagonale;

(b) una matrice $N \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ tale che $N^{-1} A N$ sia diagonale;

(c) una matrice $P \in \mathrm{O}(3, \mathbb{R})$ tale che $P^T A P = P^{-1} A P$ sia diagonale.

Ripetere l'esercizio sostituendo alla matrice A la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 14

Si consideri il prodotto scalare definito positivo $b : V \times V \to \mathbb{R}$ sullo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[t]$ definito da $b(p(t), q(t)) := \int_0^1 p(x)q(x)dx$. Sia inoltre T l'endomorfismo $T : V \longrightarrow V$ definito come $T(p(t)) := p(1-t)$.

(a) Dire se T sia lineare. Stabilire se T sia un endomorfismo ortogonale di (V, b) (ovvero una *isometria* di (V, b) in sé). Stabilire se T sia un endomorfismo autoaggiunto (anche detto "simmetrico") di (V, b).

(b) Trovare, se possibile, una base $\mathcal{B}$ di V rispetto alla quale T sia rappresentato da una matrice diagonale. Dire se sia possibile trovare una base ortogonale rispetto a b tale che $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ sia diagonale.

Esercizio 15

Sia $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, \cdot)$ lo *spazio euclideo reale numerico di dimensione* n (ossia $\mathbb{R}^n$ munito del prodotto scalare standard). Sia V un sottospazio vettoriale di $\mathbb{E}^n$ e W un sottospazio di $\mathbb{E}^n$ a lui complementare.

(a) Determinare per quali V, W la proiezione $\pi = \pi_{V,W} : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ su V lungo W (anche detta "di direzione W") sia un endomorfismo simmetrico di $\mathbb{E}^n$ oppure un endomorfismo ortogonale.

(b) Determinare per quali V, W la riflessione $\sigma = \sigma_{V,W}$ rispetto a V lungo W (anche detta "di direzione W") sia un endomorfismo simmetrico oppure un endomorfismo ortogonale di $\mathbb{E}^n$.

Esercizio 16

Determinare l'insieme degli endomorfismi lineari dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{E}^n$ (ovvero di $\mathbb{R}^n$ munito del prodotto scalare standard) che siano contemporaneamente simmetrici e ortogonali.
Descriverli precisamente nel caso $n = 3$.

Esercizio 17

Sia $\mathbb{E}^n$ lo spazio euclideo reale standard di dimensione n, munito della distanza euclidea $d = d_{\mathbb{E}^n}$. Si dice che $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ *preserva le distanze* se

$$d(f(P), f(Q)) = d(P, Q)$$

per ogni $P, Q \in \mathbb{E}^n$.

(a) Verificare che ogni applicazione affine del tipo $f(v) := Av + w$, dove $A \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ e $w \in \mathbb{R}^n$, preserva le distanze;

(b*) Viceversa mostrare che, se un'applicazione $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ preserva le distanze, allora $f(v) = Av + w$ per opportuni $A \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ e $w \in \mathbb{R}^n$.

Un'applicazione del tipo descritto in (a-b) si dice anche un'*isometria (affine)*, ovvero una *congruenza*, o ancora una *trasformazione rigida* di $\mathbb{E}^n$.

Esercizio 18*

Sia $\mathbb{E}^n$ lo spazio euclideo reale standard di dimensione n. Si dice che un'applicazione $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ (almeno C^1) *preserva gli angoli nel punto* $P \in \mathbb{E}^n$ se, per ogni coppia di curve regolari $\alpha(t), \beta(t)$ passanti per P al tempo $t = 0$, si ha

$$\vartheta\left((f \circ \alpha)'(0), (f \circ \beta)'(0)\right) = \vartheta(\alpha'(0), \beta'(0)).$$

(Si noti che richiediamo per definizione che $(df)_P$ non sia singolare, altrimenti l'angolo in $f(P)$ tra le curve $f(\alpha(t))$ e $f(\beta(t))$ potrebbe non essere neppure definito per $t = 0$).
Un'applicazione che preserva gli angoli in ogni punto di un aperto $U \subset \mathbb{E}^n$ si dice anche *conforme* in U.

(a) Mostrare che, per un'applicazione lineare $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ le seguenti sono condizioni equivalenti:

   (i) f preserva gli angoli in un punto di $\mathbb{E}^n$;

   (ii) f preserva gli angoli in ogni punto di $\mathbb{E}^n$;

   (iii) esiste $\lambda > 0$ tale che $\|f(v)\|^2 = \lambda^2\|v\|^2$ per ogni $v \in \mathbb{E}^n$;

   (iv) $f(v) = \lambda Av$, con $\lambda \neq 0$ e $A \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$.

   Una tale trasformazione si dice anche *similitudine lineare*.

(b) Mostrare che un'applicazione affine $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ preserva gli angoli se e solo se $f(v) = \lambda Av + w$ per opportuni $\lambda \neq 0$ e $A \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ e $w \in \mathbb{R}^n$. Una tale trasformazione si dice *similitudine*.

(c*) Dire se esistano applicazioni (non affini) che preservino gli angoli ma che non siano similitudini.