Esercizi di Geometria 1

Foglio 1 – 29 settembre 2015

(esercizi analoghi potranno essere chiesti all'esame scritto o orale)

0. Esercizi di algebra e geometria elementare che dovremmo già saper fare

Esercizio 0.1
Si consideri $\mathbb{R}^2$ con le operazioni $\oplus, \odot$ componente per componente.
Siano inoltre $\mathbb{C}$ l'insieme dei numeri complessi, ed S^1 il sottoinsieme dei complessi di norma 1 (circonferenza unitaria), con usuale somma e prodotto.
Si consideri infine l'insieme $I = [0, 1)$ dotato di somma e prodotto così definiti: $\quad x \boxplus y = frac(x + y), \quad x \boxdot y = frac(x \cdot y)$
(dove $frac(x)$ indica la parte decimale di un numero non negativo x).

(i) Sono gruppi additivi? O moltiplicativi? Quali tra loro sono isomorfi come gruppi?

(ii) Hanno una struttura di spazio vettoriale reale compatibile con la loro struttura additiva? E quali sono isomorfi come spazi vettoriali?

(iii) Come trovare geometricamente l'inverso moltiplicativo di un numero $z \in S^1$? E di un qualsiasi $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$?

(iv) Se $z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ e $z' = r'(\cos\vartheta' + i\sin\vartheta')$, quanto vale modulo e argomento di $z \cdot z'$?

(v) Spiegare cosa vuol dire geometricamente: moltiplicare un numero z per i; moltiplicarlo per $1 + i$; moltiplicarlo per un numero complesso $z_0 \neq 0$ qualsiasi.

Esercizio 0.2 Si considerino gli endomorfismi

$$f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2, \quad f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1)$$

$$g : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2, \quad g(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_1 + 4x_2)$$

$$h : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3, \quad h(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, 6x_1 + 2x_2 + 3x_3, 2x_1 + x_2 + 2x_3)$$

e siano F, G ed H le matrici di f, g, h rispetto alla base canonica.
(i) Si trovino autovalori e autospazi di f, g, h, nei casi $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$;
(ii) Si dica se f, g, h sono diagonalizzabili, nei differenti casi $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$;
(iii) Trovare, se esiste, una matrice invertibile M a coefficienti razionali, reali o complessi, tale che $M^{-1}FM$ sia diagonale. Analoga domanda per G ed H.

Esercizio 0.3 Sia $h_{C,\lambda} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'*omotetia di centro* C *e rapporto* $\lambda > 0$ che, ricordiamo, è così definita: $\overrightarrow{Ch_{C,\lambda}(P)} = \lambda \cdot \overrightarrow{CP}$.

(i) Se $C = (c_1, ..., c_n)$ e $P = (x_1, ..., x_n)$, quanto vale $h_{C,\lambda}(P)$?

(ii) In quali casi $h_{C,\lambda}$ commuta con una traslazione t_u di vettore u?

(iii) L'insieme $Om(\mathbf{R}^n)$ di tutte le omotetie di $\mathbb{R}^n$ è un gruppo rispetto alla composizione ?

Esercizio 0.4 Trovare le coordinate canoniche del punto P' che è:
(i) la *proiezione ortogonale* di $P = (x, y, z)$ sulla retta s di $\mathbb{R}^3$ di equazioni

$$x + y + z - 1 = x - y - z = 0$$

(ii) la proiezione ortogonale di $P = (x, y, z)$ sul piano σ di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y + 2z = 1$
(iii) la proiezione ortogonale di $P = (x, y, z, w)$ sul sottospazio vettoriale S di $\mathbb{R}^4$ di equazioni

$$x + y + z + w - 1 = x - w - 2 = 0$$

(iv) ottenuto da $P = (x, y)$ per riflessione ortogonale rispetto alla retta r che ha vettore direzione $u = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$ e che passa per l'origine;
(v) ottenuto da $P = (x, y)$ per riflessione ortogonale rispetto alla retta $r' = (1, 0) + r$;
(vi) ottenuto da $P = (x, y, z)$ per riflessione ortogonale rispetto alla retta s di $\mathbb{R}^3$ del punto (i);
(vii) ottenuto ruotando $P = (x, y, z)$ di $\frac{\pi}{2}$ rispetto alla stessa retta s.

1. Spazi e applicazioni affini.

Esercizio 1.0 Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, e sia $A = a + \overrightarrow{A}$ un suo sottospazio affine, di giacitura $\overrightarrow{A}$. Mostrare che:
(i) se A non è uno spazio vettoriale, allora $A \cap \overrightarrow{A} = \emptyset$;
(ii) se a' è un punto qualsiasi di A, allora si ha anche $A = a' + \overrightarrow{A}$.
(iii) si ha $\overrightarrow{A} = \{\overrightarrow{PQ} \mid P, Q \in A\}$;
Sia ora $B = b + \overrightarrow{B}$ un altro sottospazio affine di V, con giacitura $\overrightarrow{B}$.
(iv) Mostrare che $A \cap B$, se non è vuoto, è un sottospazio affine (qual è la sua giacitura?)
(v) In quali casi $A \cup B$ è un sottospazio affine?
Il più piccolo sottospazio affine di V che contiene sia A sia B è denotato $\mathrm{Span}_{aff}(A, B)$ (perché non $A + B$?)
(vi) Se $A \cap B \neq \emptyset$, qual è la giacitura di $\mathrm{Span}_{aff}(A, B)$? Dare esempi in $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 1.1 Dire quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali o affini degli spazi $\mathbb{K}^n$, $M(m, n, \mathbb{K})$, $\mathbb{K}[T]$, $\mathcal{S}(\mathbb{K}) = \{\text{successioni a valori in } \mathbb{K}\}$ e $\mathcal{F}(E, \mathbb{K}) = \{\text{funzioni } f : E \to \mathbb{K}\}$ (oppure dimostrare che non lo sono):
(i) l'unione $r \cup s$ di due rette r, s del piano $\mathbb{R}^2$, passanti per l'origine;
(ii) $S = \{X \in \mathbb{K}^n \mid X \text{ soluzione del sistema } AX = b\}$ $(A, b$ fissati);
(iii) l'insieme delle matrici triangolari superiori $T(n, \mathbb{K})$;
(iv) l'insieme delle matrici $Tr_0(n, \mathbb{K})$ con traccia uguale a 0;
(v) $\mathbb{K}_n[T] = \{\text{polinomi } p(T) \in \mathbb{K}[T] \text{ di grado } n\}$;
(vi) $T\mathbb{K}[T] = \{\text{polinomi } p(T) \in \mathbb{K}[T] \text{ con termine noto nullo}\}$;
(vii) $\mathbb{K}_1[T] = \{\text{polinomi } p(T) \in \mathbb{K}[T] \text{ con termine noto uguale ad } 1\}$;
(viii) $\mathcal{S}_1(\mathbb{R}) = \{\text{successioni}(s_n) \text{ a valori in } \mathbb{R} \text{ tali che } \lim_{n\to\infty} s_n = 1\}$;
(ix) $\mathcal{F}_{x_0,0}([a, b], \mathbb{R}) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ t.c. } f(x_0) = 0\}$ $(x_0 \in [a, b]$ fissato);
(x) $\mathcal{F}_{x_0,1}([a, b], \mathbb{R}) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ t.c. } f(x_0) = 1\}$ $(x_0 \in [a, b]$ fissato).

Esercizio 1.2 Siano $f : U \to V$ e $g : V \to W$ applicazioni affini.
(i) Dimostrare che la composizione $g \circ f$ è affine;
(ii) dimostrare che f è invertibile se e solo se la sua giacitura $\overrightarrow{f}$ è invertibile;
(iii) dire se $f^{-1}(0)$ e $\mathrm{Im}(f)$ sono sottospazi affini;
(iv) vale la formula $\dim(U) = \dim f^{-1}(0) + \dim \mathrm{Im}(f)$?

Esercizio 1.3 Dire se le seguenti sono applicazioni lineari o affini:
(giustificare la risposta con una dimostrazione o un controesempio)
(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 - y^3}$;
(ii) traslazioni $t_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$;
(iii) omotetie $h_{C,\lambda} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$;
(iv) la *proiezione affine* $p_{A,V} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sul sottospazio affine $A \subset \mathbb{R}^n$ e direzione complementare V (i.e. $\overrightarrow{A} \oplus V = \mathbb{R}^n$), definita come

$$p_{A,V}(x) = (x + V) \cap A$$

(e.g. la *proiezione ortogonale* su una retta o un piano di $\mathbb{R}^3$);
(v) la *riflessione affine* $s_{A,V} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ rispetto ad un sottospazio affine $A \subset \mathbb{R}^n$ e direzione complementare V, definita come

$$s_{A,V}(x) = p_{A,V}(x) + \overrightarrow{x p_{A,V}(x)}$$

(e.g. la *riflessione ortogonale* rispetto ad una retta o ad un piano di $\mathbb{R}^3$);
(vi) $R_{C,\vartheta} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *rotazione antioraria di centro* C *ed angolo* $\vartheta \in [0, 2\pi[$;
(vii) $R_{r^+,\vartheta} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la *rotazione antioraria di angolo* ϑ *rispetto alla retta orientata* r^+;
(viii) $f : \mathbb{K}_{\leq n}[T] \to \mathbb{K}_{\leq n}[T]$, definita da $f(p(T)) = p(T + 1)$;
(ix) $\iota : \mathbb{K}_{\leq n}[T] \to \mathbb{K}_{\leq n}[T]$, che trasforma un polinomio $p(T) = \sum_i a_i T^i$ cambiando ogni coefficiente a_i in $1 - a_i$;
(x) $Tr : M(n; \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ che manda $A \mapsto Tr(A)$;
(xi) $det : M(3; \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ che manda $A \mapsto det(A)$;
(xii) $l : \mathcal{S}_c(\mathbb{R}) = \{(a_n) \text{ succ. reali convergenti}\} \to \mathbb{R}$, $l[(a_n)] = \lim_{n\to\infty} a_n$;
(xiii) $d_{x_0} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come $(d_{x_0} f)(x) = f'(x_0)(x - x_0)$, per $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ fissata (l'applicazione $d_{x_0} f$ si dice il *differenziale* della funzione f in x_0);
(xiv) $\mathcal{T}^n_{x_0} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come $(\mathcal{T}^n_{x_0} f)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$, per $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ fissata (l'applicazione $\mathcal{T}^n_{x_0} f$ si dice il *polinomio di Taylor di grado* n della funzione f in x_0);
(xv) $\mathcal{D} : \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, $\mathcal{D}(f) = f'$.

Esercizio 1.5 Siano A, B spazi affini con giacitura $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}$.
(i) Verificare che $Aff(A, \overrightarrow{B})$ è uno spazio vettoriale.
(ii) $Aff(A, B)$ è uno spazio affine?

Esercizio 1.6*
Una *collineazione* è un'applicazione biunivoca $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ che trasforma rette in rette. Lo scopo di questo esercizio è mostrare che, se $n \geq 2$, ogni collineazione è un'applicazione affine (biunivoca).

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione biunivoca che trasforma rette in rette.

(i) Dimostrare che se P_1, P_2, P_3 sono punti non allineati, allora anche $f(P_1), f(P_2), f(P_3)$ non sono allineati;

(ii) Dimostrare che se π è un piano, allora $f(\pi)$ è contenuto in un piano π';

(iii) Dimostrare che se r_1, r_2 sono rette parallele, allora anche $f(r_1), f(r_2)$ sono parallele.

Sia ora $b = f(0)$. È sufficiente dimostrare che l'applicazione $f' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definita da $f'(P) = f(P) - b$ è lineare (in tal caso infatti, avremo $f = f' + b$ ed $\overrightarrow{f} = f'$).

(iv) Usare i punti precedenti e la regola del parallelogramma per dimostrare che $f'(u+v) = f'(u) + f'(v)$ per ogni $u, v \in \mathbb{R}^n$;

(v) usare il teorema di Talete per mostrare che esiste una funzione $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f'(\lambda u) = \sigma(\lambda) f'(u)$ per ogni $u \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Per concludere, bisogna dimostrare che σ è l'identità:

(vi) mostrare che $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è un *automorfismo* del *campo* $\mathbb{R}$;

(vii) mostrare che σ, ristretta a $\mathbb{Q}$, è l'identità;

(viii) mostrare che σ è crescente e dedurne che $\sigma = id$.

(I punti (vi)-(vii)-(viii) mostrano che $\mathbb{R}$ non ha automorfismi non banali).

L'insieme delle collineazioni coincide dunque con il gruppo delle affinità*:*

$$Aff(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid f(X) = AX + b,\ A \in GL(n, R),\ b \in \mathbb{R}^n\}$$

Esercizio 1.7
(i) Esistono endomorfismi affini $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ senza punti fissi, che non siano traslazioni?
(ii) Sia $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ affine con applicazione lineare associata $\overrightarrow{F}$. Mostrare che se $\overrightarrow{F}$ non ha autovalore 1, allora F ha esattamente un punto fisso.

Esercizio 1.8 (Coordinate baricentriche)
Si dice che $k+1$ punti distinti $A_0, A_1, A_2, ..., A_k$ di $\mathbb{R}^n$ sono *affinemente indipendenti* (o *in posizione generale*) se non esiste alcun sottospazio affine di dimensione $< k$ che li contenga tutti (equivalentemente, se l'insieme dei vettori $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, ..., \overrightarrow{A_0A_k}$ è linearmente indipendente). Una *base affine* (o *riferimento affine*) di $\mathbb{R}^n$ è un insieme ordinato di $n+1$ punti affinemente indipendenti.

(i) Mostrare che, dati $k+1$ punti $A_0, A_1, ..., A_k$ di $\mathbb{R}^n$ e $k+1$ reali $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k$ tali che $\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_k \neq 0$, esiste un unico punto P tale che $\sum_i \lambda_i \overrightarrow{PA_i} = 0$. Tale punto è denotato

$$P = bar \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & ... & A_k \\ \lambda_0 & \lambda_1 & ... & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

Se $\sum_i \lambda_i = 1$, il punto P si dice *baricentro di* $A_0, A_1, ..., A_k$ *con pesi* $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k$. In tal caso, si usa anche la notazione

$$P = \lambda_0 A_0 + \lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_k A_k = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i A_i \,.$$

Dimostrare che, in questo caso, tale notazione è motivata dal fatto che

$$\overrightarrow{QP} = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \overrightarrow{QA_i}$$

per qualunque scelta del punto $Q \in \mathbb{R}^n$, e quindi in particolare $\overrightarrow{OP} = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$.

(ii) Sia $\mathcal{A} = (A_0, A_1, A_2, ..., A_n)$ è una base affine di $\mathbb{R}^n$ e sia $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$ l'iperpiano affine di equazione $\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Mostrare che l'applicazione

$$bar_H : H \to \mathbb{R}^n$$

definita come $bar_H(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) = \lambda_0 A_0 + \ldots + \lambda_n A_n$ è un isomorfismo affine.

Dunque, se $\mathcal{A} = (A_0, A_1, A_2, ..., A_n)$ è una base affine di $\mathbb{R}^n$, ogni punto P si scrive in modo unico come $P = bar \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & ... & A_k \\ \lambda_0 & \lambda_1 & ... & \lambda_k \end{pmatrix}$, con $\sum_i \lambda_1 = 1$.
La $(n+1)$-pla di numeri $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ è detta $(n+1)$-upla delle *coordinate baricentriche* di P, rispetto alla base $\mathcal{A}$.

Esercizio 1.9 (Isobaricentro)
Il baricentro di k punti con pesi tutti uguali è detto *isobaricentro*, ed è denotato semplicemente con $G = bar(A_0, A_1, \cdots, A_k)$. Sia ABC un triangolo in $\mathbf{R}^2$ e siano a, b, c i punti medi dei segmenti opposti ai vertici A, B, C.
(i) Mostrare che l'isobaricentro G di A, B, C (detto anche *baricentro del triangolo* ABC) soddisfa

$$G = A + \frac{2}{3}\overrightarrow{Aa} = B + \frac{2}{3}\overrightarrow{Bb} = C + \frac{2}{3}\overrightarrow{Cc}$$

(ii) Dedurre da ciò il ben noto teorema che dice che le mediane di un triangolo si incontrano nel baricentro.
(iii) Cosa succede se un punto materiale posto in G è soggetto all'azione di tre forze corrispondenti ai vettori $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GC}$?

Esercizio 1.10 (Convessità)
Un sottoinsieme $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ si dice *convesso* se per ogni $A, B \in \mathcal{C}$ il segmento AB è interamente contenuto in $\mathcal{C}$. Il più piccolo insieme convesso contenente un sottoinsieme S è detto *inviluppo convesso* di S, ed è denotato $\mathcal{C}(S)$.
Dato $S \subset \mathbb{R}^n$, sia

$$Bar^+(S) = \left\{ bar \begin{pmatrix} A_0 & ... & A_k \\ \lambda_0 & ... & \lambda_k \end{pmatrix} \;\middle|\; k \geq 0, A_i \in S, \lambda_i \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1 \right\}$$

cioè l'insieme tutti i baricentri a coefficienti positivi di collezioni finite di punti di S. Dimostrare che $\mathcal{C}(S) = Bar^+(S)$.

Esercizio 2.1 Portare esempi di:
a) una 2-forma simmetrica *semidefinita positiva* in $\mathbb{R}^3$ e due vettori u, v per cui la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz è un'uguaglianza, *ma* u, v *non sono linearmente dipendenti*;

b) una 2-forma simmetrica *semidefinita positiva* in $\mathbb{R}^3$ e due vettori u, v per cui la disuguaglianza triangolare è un'uguaglianza, *ma* u, v *non sono linearmente dipendenti*;

c) una 2-forma simmetrica b *semidefinita positiva* in $\mathbb{R}^3$, una base B di Sylvester per b, ed un vettore u per cui non vale la formula di Fourier;

d) una 2-forma simmetrica non degenere b in $\mathbb{R}^3$ ed una base B di $\mathbb{R}^3$ formata tutta da vettori b-isotropi.

Esercizio 2.2
a) Sia b una 2-forma simmetrica indefinita (ossia né positiva, né negativa) su V. Come si può procedere per trovare un vettore isotropo per b?

b) Sia ora b una 2-forma simmetrica indefinita non nulla su V. Come si può procedere per trovare un vettore anisotropo per b?

Esercizio 2.3 Sia b la 2-forma simmetrica su $\mathbb{R}^4$ con associata forma quadratica

$q(X) = 4x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+8x_1x_4-3x_2^2-6x_2x_3+4x_2x_4-3x_3^2+4x_3x_4+4x_4^2$

a) Scrivere la matrice $[b]_E$, dove E è la base standard di $\mathbb{R}^4$;

b) trovare almeno un vettore isotropo per b;

c) determinare $\operatorname{Ann}(b)$ e una sua base B_0;

d) trovare un complementare U di $\operatorname{Ann}(b)$ in $\mathbb{R}^4$ (nota: $b|_U$ è non degenere);

e) determinare una base B di $\mathbb{R}^4$ che sia di Sylvester per b (nota: basta prendere come base $B = B_0 \cup B_1$, dove B_1 è una base di U che sia di Sylvester per $b|_U$);

f) scrivere la matrice di b e la forma quadratica associata q rispetto alla base B, e determinare gli indici di nullità τ_0, negatività τ_- e positività τ_+ di b;

g) verificare che $([id]_B^E)^t\,[b]_E[id]_B^E = [b]_B$ (se non torna, si è sbagliato qualcosa).

Esercizio 2.4 Rispondere alle stesse domande dell'Eserciio 2.3 per le 2-forme simmetriche/hermitiane associate alle seguenti forme quadratiche:

i) $q_1(X) = 8x_2^2 - 3x_1^2 + 2x_1x_2$ in $\mathbb{R}^2$, e in $\mathbb{C}^2$;

ii) $q_2(X) = 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 2x_1x_2 - x_1^2 - x_3^2$ in $\mathbb{R}^3$, e in $\mathbb{C}^3$;

iii) $q_3(X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3$ in $\mathbb{R}^3$;

iv) $q_4(X) = |x_1|^2 - |x_2|^2 + |x_3|^2 + ix_1\bar{x}_3 - ix_3\bar{x}_1$ in $\mathbb{C}^3$.

Nell'esercizio 2.3 come cambia la formula g) nel caso di $2-$forme hermitiane?

Esercizio 2.5 Una *norma* su uno spazio vettoriale reale V è un'applicazione $V \to \mathbb{R}$, usualmente denotata $\|\cdot\|$, che verifica le seguenti condizioni:

(i) $\|v\| \geq 0 \; \forall v \in V \quad$ e $\quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$;

(ii) $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in V$;

(iii) (disuguaglianza triangolare) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \forall u, v \in V$.

a) Verificare che se g è un *prodotto scalare* (i.e. 2-forma simmetrica *definita positiva*), allora ponendo $\|v\| := \sqrt{q_g(v)} = \sqrt{g(v,v)}$ si ottiene una norma su V. Tale norma è detta la *norma associata a g*.

b)* Esistono norme $\|\cdot\|$ su $\mathbb{R}^n$ che non provengono da alcun prodotto scalare? (i.e. per cui non esiste alcun prodotto scalare g tale che $\|v\| = \sqrt{g(v,v)}$?)

Suggerimento. Si sfrutti l'identità di polarizzazione, valida per ogni 2-forma simmetrica: $g(u,v) = \frac{1}{2}(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$.

Esercizio 2.6 Sia $V = C([a,b])$ lo spazio delle funzioni reali continue sull'intervallo $[a,b]$. Si consideri su V la forma bilineare

$$g(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(t) f_2(t) dt$$

a) Dire se è simmetrica, degenere o nondegenere, semidefinita o definita;
b) È vera la formula di Cauchy e la disuguaglianza triangolare per questa forma g? Come si scriverebbero tali disuguaglianze in questo caso?