Esercizi di Geometria 1

Foglio 0 (5 ottobre 2015)

(esercizi analoghi potranno essere chiesti all'esame scritto o orale)

Esercizi di geometria affine elementare

Esercizio 1
Si considerino i seguenti due sottospazi affini di $\mathbb{R}^3$:

$$R = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \end{array} \right\}$$
$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = -2 \end{array} \right\}$$

(a) Determinare equazioni cartesiane per le giaciture $\overrightarrow{R}, \overrightarrow{S}$. Determinare una base di $\overrightarrow{R}$ e per $\overrightarrow{S}$.

(b) Calcolare $R \cap S$.

(c) Determinare equazioni cartesiane per $\overrightarrow{R} + \overrightarrow{S}$ e per lo span affine di $R \cup S$.

(d) Determinare riferimenti affini per R, S e per $\mathrm{Span}_{aff}(R \cup S)$.

Esercizio 2
Si considerino i seguenti due sottospazi affini di $\mathbb{R}^3$:

$$R = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_3 = -1 \end{array} \right\}$$
$$\Pi = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -4 \right\}$$

(a) Determinare una base di $\overrightarrow{R}$ e per $\overrightarrow{S}$.

(b) Determinare se R, S siano paralleli o incidenti. Calcolare $R \cap S$.

(c) Determinare riferimenti affini per R, S.

Esercizio 3
Si consideriano i seguenti punti di $\mathbb{R}^3$ al variare del parametro reale t:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \; D_t = \begin{pmatrix} t \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il valore $t = \bar{t}$ per il quale $A, B, C, D_{\bar{t}}$ appartengano ad uno stesso piano affine $\Pi \subset \mathbb{R}^3$. Esibire un'equazione cartesiana per Π.

(b) Verificare che $\mathcal{P} = (A, B, C)$ è un riferimento affine per Π. Calcolare le coordinate baricentriche $[D]_{\mathcal{P}}$ del punto $D = D_{\bar{t}}$ rispetto a $\mathcal{P}$. È vero che D appartiene all'inviluppo convesso di $\{A, B, C\}$?

(c) Calcolare equazioni cartesiane per le rette L per A, B e L' per C, D. Calcolare $L \cap L'$.

(d) Determinare l'applicazione affine $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B$, $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = C$, $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = D$.

Esercizio 4

Si consideriano i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$:

$$
\begin{aligned}
R &= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} x_1 - x_3 = -1, \\ x_2 - 1 = 0 \end{array} \right\} \\
R' &= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{c} x_2 - 3x_1 = -5, \\ x_3 - 4x_1 = -10 \end{array} \right\} \\
\Pi &= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 4x_1 + x_2 - 5x_3 = -4 \right\} \\
\Pi' &= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 5x_1 + 18x_2 - 16x_3 = -55 \right\}
\end{aligned}
$$

(a) Esibire, se esiste, un'affinità $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(R) \subseteq R'$ e $f(\Pi) \subseteq \Pi'$.

(b) Ammesso che esista, dire se una tale f è unica. Se è unica, dimostrarlo; se f non è unica, esibire due applicazioni distinte che soddisfino le condizioni al punto (a).