Geometria I

Anno accademico 2015/2016

Prova scritta del 28 giugno 2016

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Numero di matricola: ______________________________

Canale: ☐ Canale A-H ☐ Canale I-Z

Motivare le risposte: una risposta giusta priva di motivazione, o con una motivazione errata, riceverà 0 *punti.*

Esercizio	Punti disponibili	Punti ottenuti
1	10	
2	10	
3	12	
Totale	32	

Voto/30: ☐

Esercizio 1. Consideriamo una forma bilineare simmetrica g su $\mathbb{R}^d$, diversa dal prodotto scalare standard.

(i) Siano U_1, U_2 due sottospazi complementari di $\mathbb{R}^d$, ortogonali tra loro per il prodotto scalare standard, e siano g_i le restrizioni di g a U_i per $i = 1, 2$. È vero che se g_1 e g_2 sono entrambi definiti positivi, allora g è necessariamente definito positivo?

(ii) Siano ora U'_1, U'_2 due sottospazi complementari di $\mathbb{R}^d$, g-ortogonali tra loro e siano g'_i le restrizioni di g a U'_i per $i = 1, 2$. È vero che se g'_1 e g'_2 sono entrambi definiti positivi, allora g è necessariamente definito positivo?

(iii) È vero che, se g è non degenere, allora g'_1 e g'_2 sono entrambi non degeneri?

(iv) Dare la definizione di indici di positività n_+, negatività n_- e nullità n_0 di g, e dimostrare che essi coincidono rispettivamente con il numero di autovalori positivi, negativi e nulli della matrice G che rappresenta g rispetto alla base canonica.

Risoluzione:

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}^2$ il piano affine reale con coordinate canoniche (x, y). Si considerino i seguenti quadrilateri:

$$Q = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| \leq 1, \quad |y| \leq 1\right\}$$
$$Q' = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |y - 2x| \leq 2, \quad |2y + x| \leq 2\right\}$$
$$Q'' = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |y| \leq 1, \quad y + 2|x| \leq 3\right\}$$

(i) Si trovino i vertici A, B, C, D di Q, i vertici A', B', C', D' di Q', e i vertici A'', B'', C'', D'' di Q''

(ii) Si determini (se esiste) un'affinità f di $\mathbb{R}^2$ che porti il quadrilatero Q nel quadrilatero Q'.

(iii) Si determini (se esiste) un'affinità g di $\mathbb{R}^2$ che porti Q in Q''.

(iv) Identificando $\mathbb{R}^2$ con il complementare in $\mathbb{RP}^2$ della retta proiettiva $\{X_0 = 0\}$, si determini (se esiste) una proiettività h di $\mathbb{RP}^2$ che porti Q' in Q''.

Risoluzione:

Esercizio 3. Sia data la famiglia di coniche γ_t nel piano euclideo $\mathbb{E}^2$ di equazioni:

$$\gamma_t : x^2 + (1-t)y^2 + 2tx - 2(1-t)y + 2 - t = 0.$$

Determinare i valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ per cui:

(i) il supporto di γ_t è un punto oppure una retta;

(ii) γ_t è una parabola;

(iii) γ_t è un'iperbole;

(iv) γ_t è una circonferenza con punti reali e raggio $r > 0$;

(v) γ_t è un'ellisse con punti reali;

(vi) γ_t è un'ellisse senza punti reali.

[Suggerimento: scrivere, prima, la lista delle coniche euclidee in forma canonica, con i rispettivi invarianti.]

Risoluzione: