Geometria I

Anno accademico 2015/2016

Soluzioni della prova scritta del 28 giugno 2016

Esercizio 1. Consideriamo una forma bilineare simmetrica g su $\mathbb{R}^d$, diversa dal prodotto scalare standard.

(i) Siano U_1, U_2 due sottospazi complementari di $\mathbb{R}^d$, ortogonali tra loro per il prodotto scalare standard, e siano g_i le restrizioni di g a U_i per $i = 1, 2$. È vero che se g_1 e g_2 sono entrambi definiti positivi, allora g è necessariamente definito positivo?

Soluzione.

In generale non è vero.
Infatti, il prodotto scalare g su $\mathbb{R}^2$ definito dalla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^2$ fornisce un controesempio, se si prendono $U_1 = \mathbb{R}e_1$ e $U_2 = \mathbb{R}e_2$. Infatti, $\det(B) < 0$ *e quindi g non è definito positivo, eppure $g|_{U_i}$ è definito positivo per $i = 1, 2$.*

(ii) Siano ora U_1', U_2' due sottospazi complementari di $\mathbb{R}^d$, g-ortogonali tra loro e siano g_i' le restrizioni di g a U_i' per $i = 1, 2$. È vero che se g_1' e g_2' sono entrambi definiti positivi, allora g è necessariamente definito positivo?

Soluzione.

Sì, è vero.
Infatti, dato $v \in \mathbb{R}^d$, possiamo scriverlo in maniera unica come $v = v_1 + v_2$, con $v_1 \in U_1'$ e $v_2 \in U_2'$. Da cui

$$\begin{aligned} g(v, v) &= g(v_1, v_1) + g(v_2, v_2) + 2g(v_1, v_2) = \\ &= g_1'(v_1, v_1) + g_2'(v_2, v_2) \geq 0 \end{aligned}$$

perché $g(v_1, v_2) = 0$, essendo $U_1' \perp U_2'$. Ne segue che $g(v, v) \geq 0$ e che $g(v, v) = 0 \iff v_1 = v_2 = 0 \iff v = 0$.

(iii) È vero che, se g è non degenere, allora g_1' e g_2' sono entrambi non degeneri?

Soluzione.

Sì, è vero.
Infatti, dato $0 \neq v \in \mathbb{R}^d$, possiamo scriverlo in maniera unica come $v = v_1 + v_2$, con $v_1 \in U_1'$ e $v_2 \in U_2'$. Poiché $0 \neq v$, necessariamente $v_1 \neq 0$ oppure $v_2 \neq 0$ (o entrambi).

Supponiamo $v_1 \neq 0$. Allora, essendo g_1' non degenere, esiste $u_1 \in U_1'$ tale che $g(v_1, u_1) = g_1'(v_1, u_1) \neq 0$. Poiché $U_1' \perp U_2'$, si ha anche $g(v_2, u_1) = 0$, e dunque $g(v, u_1) = g(v_1, u_1) + g(v_2, u_1) \neq 0$.

Nel caso in cui $v_1 = 0$ si avrebbe $v_2 = 0$ e il ragionamento è analogo.

(iv) Dare la definizione di indici di positività n_+, negatività n_- e nullità n_0 di g, e dimostrare che essi coincidono rispettivamente con il numero di autovalori positivi, negativi e nulli della matrice G che rappresenta g rispetto alla base canonica.

SOLUZIONE.

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione d e sia g una forma bilineare simmetrica su V.

L'indice di nullità n_0 di g è la dimensione del radicale di g, ossia di

$$\mathrm{Rad}(g) = \{v \in V \mid g(v, w) = 0 \ \forall w \in V\}$$

L'indice di positività n_+ di g è

$$n_+ = \max \{\dim(W) \mid W \subseteq V,\ g|_W \text{ è definito positivo}\}$$

L'indice di negatività n_- di g è

$$n_- = \max \{\dim(U) \mid U \subseteq V,\ g|_U \text{ è definito negativo}\}$$

Mettiamoci ora su $V = \mathbb{R}^d$ e sia g il prodotto rappresentato dalla matrice $n \times n$ simmetrica G rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^d$.

Essendo G simmetrica, G è autoaggiunta rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^d$ (che è definito positivo). Dunque, esiste una base ortonormale $\mathcal{B}$ per il prodotto scalare standard tale che $[g]_{\mathcal{B}} = D$ sia diagonale. Chiaramente, $[g]_{\mathcal{B}} = P^T GP = P^{-1}GP$, essendo P una matrice ortogonale (che rappresenta il cambio di base tra la basi ortonormali canonica e $\mathcal{B}$). Dunque $[g]_{\mathcal{B}}$ è coniugata a G e quindi hanno gli stessi autovalori; d'altra parte $[g]_{\mathcal{B}}$ è congruente a G, e dunque hanno gli stessi indici di nullità, negatività e positività.

Quindi basta dimostrare l'enunciato per la matrice diagonale D, ovvero per il prodotto scalare g' rappresentato da D rispetto alla base canonica.

Siano $I = \{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid D_{ii} > 0$ e $J = \{j \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid D_{jj} < 0\}$ e poniamo $W = \mathrm{span}\{e_i \mid i \in I\}$ e$U = \mathrm{span}\{e_j \mid j \in J\}$. Basta dimostrare che $n_0(g') = \dim(\ker(D))$, $n_+(g') = \dim(W) = |I|$ e $n_-(g') = \dim(U) = |J|$.

È chiaro che $\mathrm{Rad}(g') = \ker(D)$ dalla definizione. Dunque, poiché $n_0 + n_+ + n_- = d$, è sufficiente dimostrare che $n_+ \geq \dim(W)$ e $n_- \geq \dim(U)$, ovvero è sufficiente mostrare che $g'|_W$ è definito positivo e che $g'|_U$ è definito negativo.

Nel primo caso, se $w \in W$, allora $w = \sum_{i \in I} a_i e_i$ e dunque $g'(w, w) = \sum_{i \in I} D_{ii} a_i^2 \geq 0$, e inoltre $g'(w, w) = 0$ se e solo se $a_i = 0$ per ogni $i \in I$, ossia se e solo se $w = 0$. Il secondo caso è analogo.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}^2$ il piano affine reale con coordinate canoniche (x, y). Si considerino i seguenti quadrilateri:

$$Q = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| \leq 1, \quad |y| \leq 1\right\}$$
$$Q' = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |y - 2x| \leq 2, \quad |2y + x| \leq 2\right\}$$
$$Q'' = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |y| \leq 1, \quad y + 2|x| \leq 3\right\}$$

(i) Si trovino i vertici A, B, C, D di Q, i vertici A', B', C', D' di Q', e i vertici A'', B'', C'', D'' di Q''.

Soluzione.

Dal calcolo diretto si ottiene:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$A' = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ B' = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ C' = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \ D' = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$
$$A'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ B'' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ C'' = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ D'' = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Si determini (se esiste) un'affinità f di $\mathbb{R}^2$ che porti il quadrilatero Q nel quadrilatero Q'.

Soluzione.

Tale affinità f esiste.
In effetti, sarà una trasformazione lineare, in quanto $A + B + C + D = 0 = A' + B' + C' + D'$ e le affinità preservano il baricentro. Esplicitamente, un esempio di tale f è

$$f = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Si determini (se esiste) un'affinità g di $\mathbb{R}^2$ che porti Q in Q''.

Soluzione.

Tale affinità non esiste.
Infatti, i lati del quadrilatero Q generano 4 rette con due giaciture distinte, mentre i lati del quadrilatero Q'' generano 4 rette con tre giaciture distinte.

(iv) Identificando $\mathbb{R}^2$ con il complementare in $\mathbb{RP}^2$ della retta proiettiva $\{X_0 = 0\}$, si determini (se esiste) una proiettività h di $\mathbb{RP}^2$ che porti Q' in Q''.

Soluzione.

Sia $P_0 = [1 : 0 : 0]$, $P_1 = [0 : 1 : 0]$, $P_2 = [0 : 0 : 1]$, $U = [1 : 1 : 1]$ il riferimento proiettivo standard di $\mathbb{RP}^2$. Consideriamo proiettività $F = [M]$ e $G = [N]$ di $\mathbb{RP}^2$ rappresentate dalle matrici M, N tali che $F(P_0) = A'$, $F(P_1) = B'$, $F(P_2) = C'$, $F(U) = D'$ e $G(P_0) = A''$, $G(P_1) = B''$, $G(P_2) = C''$, $G(U) = D''$. Esplicitamente,

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 5 \\ 2 & -2 & -2 \\ 6 & 6 & -6 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Chiaramente, $h = G \circ F^{-1} = [NM^{-1}]$ *manda i vertici di* Q' *nei vertici di* Q''*, dove*

$$M^{-1} = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 0 & -15 & 5 \\ 6 & -15 & 0 \end{pmatrix}, \quad e\, NM^{-1} = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 12 & 0 & 5 \\ -6 & 45 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

Per verificare che h *sia la proiettività cercata, occorre controllare che* h *mandi l'interno di* Q' *nell'interno di* Q''*. Calcoliamo* $h([1:0:0]) = [1 : -\frac{1}{2} : 0]$*, e quindi* h *manda* $0 \in Q' \subset \mathbb{R}^2$ *nel punto* $(\frac{1}{2}, 0) \in Q'' \subset \mathbb{R}^2$*. Dunque*

$$h = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 5 \\ -6 & 45 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

è la proiettività cercata (non unica!).

Esercizio 3. Sia data la famiglia di coniche γ_t nel piano euclideo $\mathbb{E}^2$ di equazioni:

$$\gamma_t : x^2 + (1-t)y^2 + 2tx - 2(1-t)y + 2 - t = 0.$$

Determinare i valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ per cui:

Soluzione.

Rappresentiamo la conica reale euclidea γ_t con la matrice

$$Q_t = \left(\begin{array}{c|cc} 2-t & t & t-1 \\ \hline t & 1 & 0 \\ t-1 & 0 & 1-t \end{array}\right), \quad \textit{con } A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-t \end{pmatrix}$$

e calcoliamo

$$\det(A_t) = (1-t), \qquad \det(Q_t) = (1-t)^2(1+t)$$

e alcuni invarianti affini reali di γ_t:

$$\operatorname{rg}(A_t) = \begin{cases} 1 & \textit{per } t = 1 \\ 2 & \textit{per } t \neq 1 \end{cases} \qquad \operatorname{rg}(Q_t) = \begin{cases} 1 & \textit{per } t = 1 \\ 2 & \textit{per } t = -1 \\ 3 & \textit{per } t \neq \pm 1 \end{cases}$$

$$|\sigma(A_t)| = \begin{cases} 0 & \textit{per } t > 1 \\ 1 & \textit{per } t = 1 \\ 2 & \textit{per } t < 1 \end{cases} \qquad |\sigma(Q_t)| = \begin{cases} 1 & \textit{per } t \geq 1 \textit{ oppure } t < -1 \\ 2 & \textit{per } t = -1 \\ 3 & \textit{per } -1 < t < 1 \end{cases}$$

(ii) γ_t *è una parabola* $\iff \operatorname{rg}(Q_t) = 3$ *e* $\operatorname{rg}(A_t) = 1$, *quindi per nessun t.*

(iii) γ_t *è un'iperbole* $\iff \operatorname{rg}(Q_t) = 3,\ \sigma(A_t) = 0 \iff t > 1.$

(v) γ_t *è un'ellisse con punti reali* $\iff |\sigma(A_t)| = 2$ *e* $|\sigma(Q_t)| = 1 \iff t < -1.$

(iv) γ_t *è una circonferenza con punti reali e raggio $r > 0$* $\iff |\sigma(A_t)| = 2,\ |\sigma(Q_t)| = 1$ *e A_t è un multiplo dell'identità.*
È immediato vedere che A_t è multipla dell'identità se e solo se $t = 1$. Tuttavia, per $t = 1$ si ha $|\sigma(Q_t)| = 3$. Dunque γ_t non è una circonferenza (con punti reali e $r > 0$) per alcun t.

(vi) γ_t *è un'ellisse senza punti reali* $\iff |\sigma(A_t)| = 2$ *e* $|\sigma(Q_t)| = 3 \iff -1 < t < 1.$

(i) Gli unici casi rimasti sono $t = \pm 1$.
Per $t = 1$, $\operatorname{rg}(A_t) = \operatorname{rg}(Q_t) = 1$ e dunque γ_1 è una retta doppia.
Per $t = -1$, $|\sigma(A_t)| = |\sigma(Q_t)| = 2$, e dunque γ_{-1} è una coppia di rette incidenti immaginarie, il cui supporto in $\mathbb{E}^2$ consiste di un solo punto.

Concludendo, il supporto di γ_t è un punto oppure una retta $\iff t = \pm 1$.